6. COMPLEMENTI SULLA RETTA E SUL PIANO CARTESIANO

A) Scrivere l'EQUAZIONE DELLA RETTA (NON VERTICALE) PASSANTE PER DUE PUNTI ASSEGNATI

A dire il vero, esisterebbe anche un'apposita formula, a questo scopo: la vedremo più avanti nel capitolo; tuttavia, è sufficiente procedere nel modo illustrato dal seguente esempio.

Supponiamo di voler scrivere l'equazione della retta passante per i due punti $\mathrm{A}(-3,\ 5)$ e $\mathrm{B}(1,\ 3)$.
La nostra retta non è verticale: la sua equazione è perciò della forma $y = mx + q$,
dove i valori di m e di q sono da determinare in modo che la retta passi per i due punti dati.

Ma una retta passa per $\mathrm{A}(-3,\ 5)$ se e soltanto se,
assegnando a x il valore –3 nell'equazione della retta, si ottiene 5 come corrispondente valore di y;
quindi la retta $y = mx + q$ passerà per $\mathrm{A}(-3,\ 5)$ se e solo se l'uguaglianza $5 = m\cdot(-3) + q$ è vera.
Allo stesso modo, la retta $y = mx + q$ passerà per $\mathrm{B}(1,\ 3)$ se e soltanto se l'uguaglianza $3 = m\cdot 1 + q$ è vera.

Perciò per determinare l'equazione della retta in questione basterà risolvere il sistema

$$\begin{cases} 5 = m\cdot(-3) + q \\ 3 = m\cdot 1 + q \end{cases} \quad (\text{NOTA})\,.$$

Si trova $\begin{cases} 5 = -3m + q \\ 3 = m + q \end{cases}$; $\begin{cases} -3m + q = 5 \\ m + q = 3 \end{cases}$; $\begin{matrix} (1)-(2) \\ (2) \end{matrix}\begin{cases} -4m = 2; & m = -1/2 \\ -1/2 + q = 3; & q = 7/2 \end{cases}$ per cui la retta che ci interessa è $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}$

NOTA - Si dice in questi casi che "si è posta la **CONDIZIONE DI APPARTENENZA**"
(di un punto dato, a una curva di equazione data)

♥ **Un punto appartiene ad una curva associata a una certa equazione se e solo se, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione della curva al posto di *x* e di *y* rispettivamente, si ottiene un'uguaglianza vera.**

Questo fatto è banale se si tiene presente che, come insegna la Geometria Analitica,

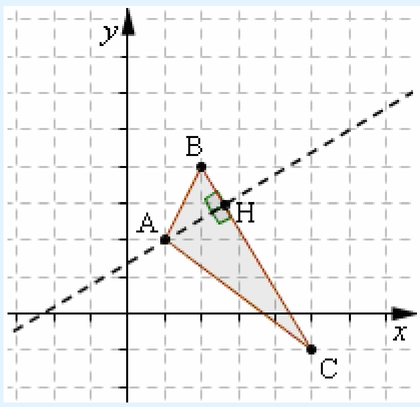
♥ **l'equazione associata a una data curva nel piano cartesiano è quell'uguaglianza contenente *x* e *y* che è verificata dalla coppia $(x,\ y)$ delle coordinate di tutti i punti della curva, e di essi soltanto.**

B) Scrivere l'equazione della RETTA PASSANTE PER UN PUNTO ASSEGNATO E AVENTE UN DATO COEFFICIENTE ANGOLARE

Anche qui sarebbe possibile stabilire un'apposita formula (pag. 448). Ma possiamo pure farne a meno …

Scrivi l'equazione della retta su cui giace l'altezza AH *del triangolo* ABC*, con* $\mathrm{A}(1,\ 2)$; $\mathrm{B}(2,\ 4)$; $\mathrm{C}(5,\ -1)$.

Ricordiamo che due rette sono perpendicolari se e solo se
hanno coefficienti angolari fra loro antireciproci;
allora basterà ricavare il coefficiente angolare della retta BC,
poi scrivere l'equazione della retta passante per A e avente
coefficiente angolare antireciproco di quello prima determinato.



Per trovare il coefficiente angolare di BC è possibile

1) determinare l'equazione di BC
(retta per due punti dati: vedi esercizio precedente;
puoi provarci, e otterresti $\mathrm{BC}:\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{22}{3}$)

2) oppure (più comodo!) utilizzare la formula $m = \Delta y / \Delta x$:
$$m_{\mathrm{BC}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-4}{5-2} = -\frac{5}{3}$$

Da $m_{\mathrm{BC}} = -\frac{5}{3}$ si ricava poi $m_{\mathrm{AH}} = \frac{3}{5}$ (antireciproco di $-\frac{5}{3}$) da cui $\mathrm{AH}:\ y = \frac{3}{5}x + q$

dove si potrà determinare q ponendo la condizione di appartenenza del punto $\mathrm{A}(1,\ 2)$: $2 = \frac{3}{5}\cdot 1 + q;\ q = \frac{7}{5}$.

L'equazione richiesta è perciò $\mathrm{AH}:\ y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$. Puoi constatare come m, q siano coerenti con la figura!

C) FORMA ESPLICITA E FORMA IMPLICITA PER L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

Abbiamo già rilevato che un'equazione della forma

$$y = mx + q$$

non è in grado di rappresentare *qualsiasi* retta, perché restano *escluse* le rette verticali.

Invece un'equazione della forma

$$ax + by + c = 0$$

può rappresentare davvero *tutte* le rette, quelle verticali *comprese* (esse si ottengono nel caso $b = 0$).

Quando tutti i termini si trovano a primo membro:

$$ax + by + c = 0$$

si dice che l'equazione della retta è in FORMA IMPLICITA.

La forma

$$y = mx + q$$

è invece detta FORMA ESPLICITA.

Il passaggio dalla forma implicita a quella esplicita, possibile solo per le rette non verticali, si effettua con semplici passaggi algebrici, finalizzati a isolare y a primo membro, come nei due esempi della colonna qui a fianco.

♪ $3x + 4y - 5 = 0$

$$4y = -3x + 5; \quad y = \frac{-3x+5}{4} \quad opp. \ y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

♫ $2x - y + 7 = 0; \quad -y = -2x - 7; \quad y = 2x + 7$

Di norma la forma *esplicita* è più comoda, in quanto

- viene utilizzata nel disegnare la retta
- consente di osservare direttamente il coefficiente angolare e l'ordinata all'origine.

Inoltre c'è da dire che, per una data retta, i due parametri m e q della forma *esplicita* sono determinati in modo unico, mentre i 3 parametri a, b, c della forma *implicita* non sono determinati univocamente, ma solo "A MENO DI UNA COSTANTE DI PROPORZIONALITÀ".

Ad esempio, le seguenti equazioni:

$$3x - 2y + 1 = 0 \qquad 6x - 4y + 2 = 0$$

$$-9x + 6y - 3 = 0 \qquad \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6} = 0$$

...

rappresentano tutte LA STESSA RETTA.

ALTRI ESEMPI

- **Portare l'equazione** $\boxed{8x - 2y - 1 = 0}$ **in forma esplicita**

  Si tratta di isolare y a primo membro:

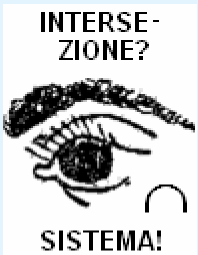
  $$8x - 2y - 1 = 0; \quad -2y = -8x + 1; \quad 2y = 8x - 1; \quad y = \frac{8x-1}{2}; \quad \boxed{y = 4x - \frac{1}{2}}$$

- **Viceversa: portare l'equazione** $\boxed{y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{12}}$ **in forma implicita**

  Porteremo tutto a 1° membro, in modo che il 2° m. sia 0; sarà bene mandare pure via i denominatori:

  $$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{12}; \quad 12y = -9x + 1 \ (abbiamo\ moltiplicato\ per\ 12); \quad \boxed{9x + 12y - 1 = 0}$$

D) Per TROVARE LE COORDINATE DEL PUNTO DI INTERSEZIONE fra due rette di equazioni note basta prendere tali equazioni e porle a SISTEMA.



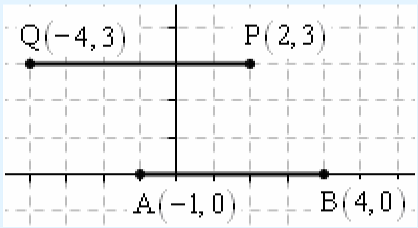
Infatti il punto di intersezione fra due rette è quello che appartiene *sia all'una che all'altra*. Ora, un punto appartiene sia alla prima che alla seconda retta se e solo se le sue coordinate verificano tanto l'equazione della prima, quanto l'equazione della seconda, ossia il *sistema* formato da tali due equazioni.

Se, ad esempio, in relazione all'esercizio con figura della pagina precedente, venissero richieste le coordinate di H, basterebbe impostare il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5} & \text{(AH)} \\ y = -\frac{5}{3}x + \frac{22}{3} & \text{(BC)} \end{cases}$$

e risolverlo. Si troverebbe $\begin{cases} x = \frac{89}{34} \\ y = \frac{101}{34} \end{cases}$ ossia $H\left(\frac{89}{34}, \frac{101}{34}\right)$.

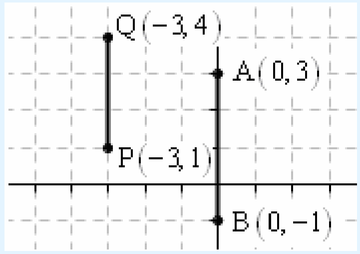
E) DISTANZA FRA DUE PUNTI NEL PIANO CARTESIANO



Se i due punti hanno UGUAL ORDINATA (segmento orizzontale): si fa il valore assoluto della differenza delle ascisse

$$\boxed{d = |x_2 - x_1|}$$

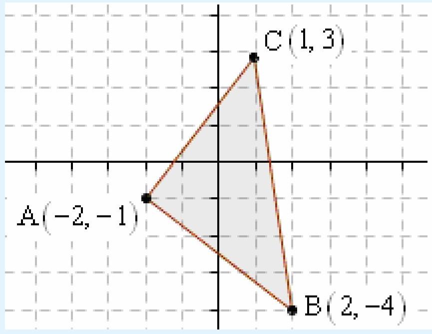
Ad esempio, in figura: $AB = |4-(-1)| = 5$
$PQ = |-4-2| = |-6| = 6$



Se i due punti hanno UGUALE ASCISSA (segmento verticale): si fa il valore assoluto della differenza delle ordinate

$$\boxed{d = |y_2 - y_1|}$$

Ad esempio, in figura: $AB = |-1-3| = |-4| = 4$
$PQ = |4-1| = |3| = 3$



CASO GENERALE:

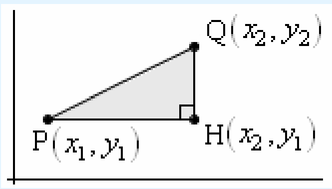
$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ad es., i lati del triangolo ABC nella figura qui a fianco misurano:

$$AB = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(1-2)^2 + (3-(-4))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 7,...$$

$$CA = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



La formula relativa al caso generale è "figlia" del Teorema di Pitagora (pag. 214), come mostra il triangolo PHQ della figura qui a sinistra, nel quale

$$PH = |x_2 - x_1|, \quad HQ = |y_2 - y_1|$$

$$PQ = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

OSSERVAZIONI

1) **In tutte e tre le formule È INDIFFERENTE L'ORDINE nel quale vengono presi i due punti**
2) **LA FORMULA RELATIVA AL "CASO GENERALE" È APPLICABILE, VOLENDO, ANCHE AI CASI IN CUI I DUE PUNTI ABBIANO UGUAL ASCISSA O UGUAL ORDINATA (sebbene, evidentemente, nella fattispecie siano più comode le due formule "specifiche")**.

F) COORDINATE DEL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

Dati due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, il punto medio M del segmento AB ha coordinate

$$\boxed{x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}}\ ; \quad \boxed{y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

L'ascissa del punto medio di un segmento è la media delle ascisse degli estremi, la sua ordinata è la media delle ordinate.

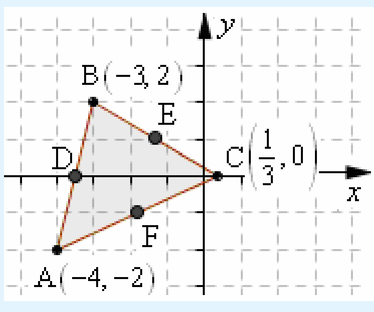
Ad esempio, i punti medi dei lati del triangolo ABC,

con $A(-4,-2)$; $B(-3,2)$; $C\left(\frac{1}{3},0\right)$, sono:

$$D\left(\frac{-4-3}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$$

$$E\left(\frac{-3+\frac{1}{3}}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = \left(-\frac{4}{3}, 1\right)$$

$$F\left(\frac{-4+\frac{1}{3}}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) = \left(-\frac{11}{6}, -1\right)$$



ESERCIZIETTI PER PRENDER CONFIDENZA

1) Scrivi l'equazione della retta passante per i 2 punti: a) $(-1, 7)$ e $(4, 2)$ b) $(0, 5)$ e $(1, 8)$

2) Determina il punto di $\cap$ fra le rette r, s: a) $r: x+3y=0;\ s: y=x-4$ b) $r: y=-2x-6;\ s: 4x+2y-1=0$

3) Riconosci se il punto P appartiene alla retta r: a) $P(-2,0);\ r: y=-257x-514$ b) $P(2,-5);\ r: x-y-7=0$

4) Porta le equazioni seguenti in forma esplicita: a) $5x-4y+2=0$ b) $3x+3y+1=0$

5) Porta le equazioni seguenti in forma implicita: a) $y=7x+41$ b) $y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}=0$

6) Scrivi l'equaz. della retta r che passa per P ed è $\parallel$ a s: a) $P(-1,3);\ s: x+y=0$ b) $P(-2,-5);\ s: y=3x-4$

7) Scrivi l'equaz. della retta r che passa per P ed è $\perp$ a s: a) $P(-1,3);\ s: x+y=0$ b) $P(-2,-5);\ s: y=3x-4$

8) Trova la lunghezza del segmento di estremi P, Q: a) $P(3,-8);\ Q(-4,16)$ b) $P(0,10);\ Q(21,-10)$

Da www.mathworksheets4kids.com

9) Find the midpoint of the following line segments with the given endpoints:

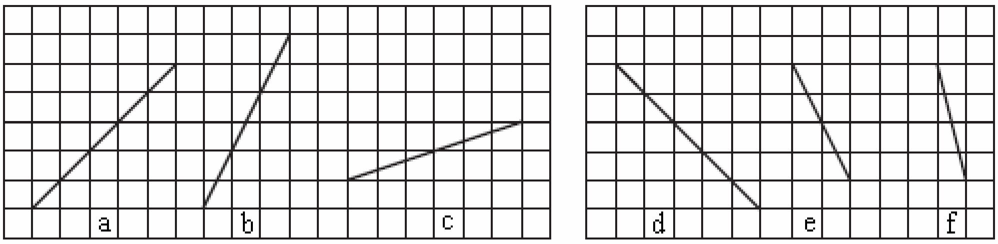
Endpoint	Endpoint	Midpoint
(2, 5)	(8, 7)	
(4, −6)	(6, 8)	
(9, −4)	(−5, −4)	
(−3, −5)	(3, 5)	

10) Find the missing end point of the following line segments whose midpoint and one of the endpoints is given:

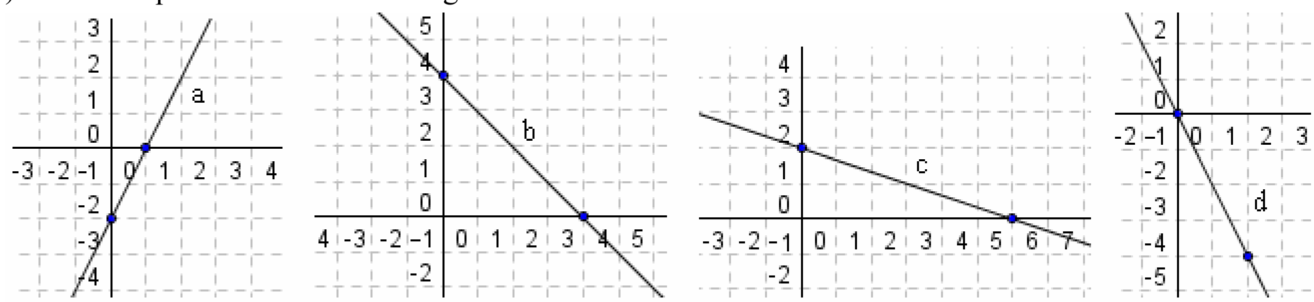
Endpoint	Midpoint	Missing endpoint
(2, 5)	(3, 4)	
(−4, 8)	(0, 8)	
(6, −2)	(4.5, −2.5)	

Da www.cimt.plymouth.ac.uk

11) Determine the gradient of each of the following lines: [*gradient = slope = coefficiente angolare*]



12) Scrivi le equazioni delle rette raffigurate:



RISPOSTE e INDICAZIONI

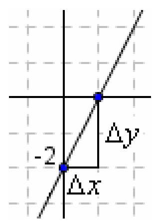
1) a) $y=6-x$ b) $y=3x+5$ 2) a) $(3,-1)$ b) Sono parallele! 3) a) Sì b) Sì 4) a) $y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$ b) $y=-x-\frac{1}{3}$

5) a) $7x-y+41=0$ b) $2x+12y-3=0$ 6) a) $y=-x+2$ b) $y=3x+1$ 7) a) $y=x+4$ b) $y=-\frac{1}{3}x-\frac{17}{3}$

8) a) $PQ=25$ b) $PQ=29$ 9) $(5,6);\ (5,1);\ (2,-4);\ (0,0)$ 10) $\frac{2+x}{2}=3,\ \frac{5+y}{2}=4\ \ldots\ (4,3);\ (4,8);\ (3,-3)$

11) In questi casi va applicata la fondamentale formula $\Delta y/\Delta x=m$. a) 1 b) 2 c) 1/3 d) -1 e) -2 f) -4

12) Qui si può applicare il procedimento per trovare l'equazione di una retta noti due punti, oppure osservare che è sempre nota l'intersezione con l'asse delle y quindi dell'equazione cercata $y=mx+q$ si conosce subito q, ed m è facilmente ricavabile calcolando il rapporto fra Δy (spostamento verticale quando si passa da un punto ad un altro) e Δx (spostamento orizzontale). La figura qui a fianco si riferisce al caso a).



$q=-2$

$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{+2}{+1}=+2$

Le risposte sono: a) $y=2x-2$ b) $y=-x+4$ c) $y=-\frac{1}{3}x+2$ d) $y=-2x$

13)

Nella figura a fianco, disegna le rette con le seguenti caratteristiche e accanto a ciascuna scrivi la rispettiva equazione:

a) passante per A e parallela all'asse x

b) passante per A e parallela all'asse y

c) passante per A e per l'origine

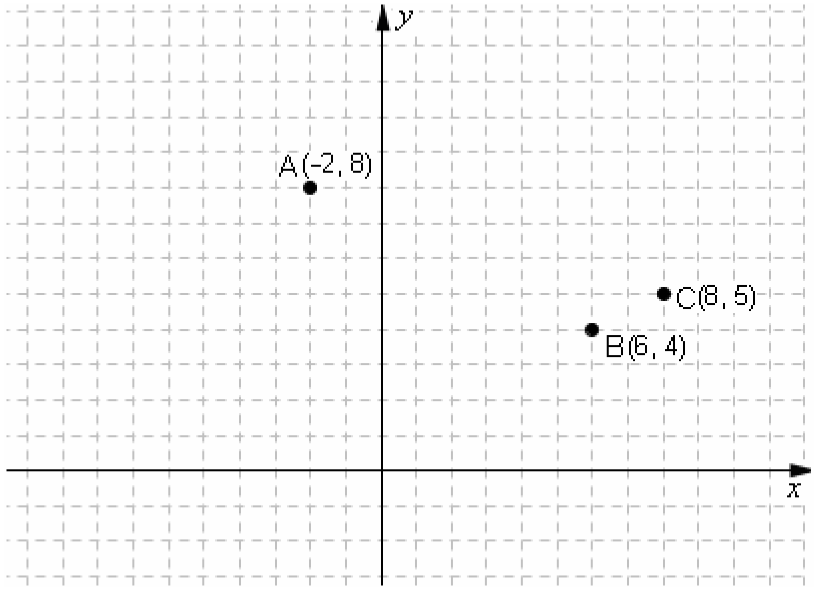
d) passante per A e per B

e) passante per A e parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

f) passante per A e parallela alla bisettrice del 2° e 4° quadrante

g) passante per A e parallela alla retta BC

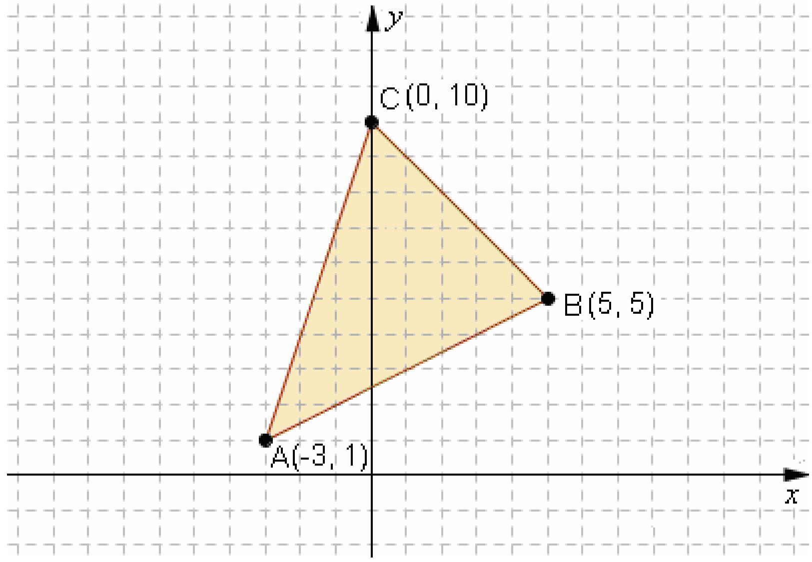
h) passante per A e perpendicolare alla retta BC



14)

In figura compare il triangolo ABC, di vertici $A(-3,1)$, $B(5,5)$, $C(0,10)$. Scrivi le equazioni delle due altezze che partono dai vertici B e C, e delle due mediane che partono dagli stessi vertici.
Disegna le quattro rette in questione, e determina le coordinate dell'ortocentro (punto di incontro delle altezze) e del baricentro (punto di incontro delle mediane).
Scrivi anche l'equazione della terza mediana, e verifica che anch'essa passa per il punto di incontro delle altre due.

[Troverai Ortocentro $(2, 6)$
Baricentro $(2/3, 16/3)$]



15)

La figura riporta il quadrilatero di vertici
$O(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(-3, 8)$, $C(-6, 4)$.

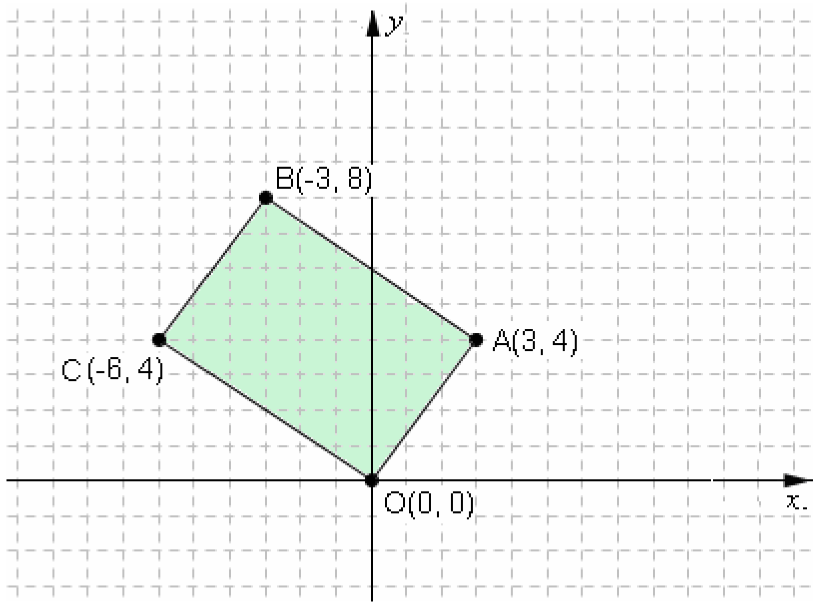
Verifica che:

a) ha i lati opposti paralleli

b) ha i lati opposti uguali

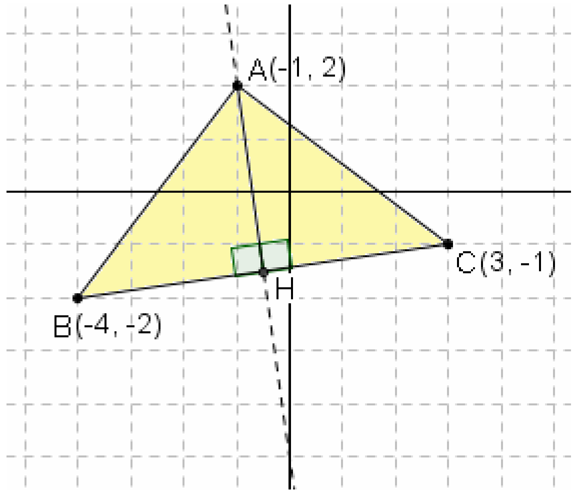
c) ha le diagonali disuguali, ma che si tagliano scambievolmente per metà nel punto $(-3/2, 4)$

Verifica infine col calcolo che le intersezioni della retta BC con gli assi sono i punti $(-9, 0)$ e $(0, 12)$



FACCIAMO INSIEME QUALCHE ESERCIZIO PIU' IMPEGNATIVO

- **SEGUI CON ATTENZIONE I VARI RAGIONAMENTI ESPOSTI**
- **COMPLETA I CALCOLI**
- **E RIEMPI I PUNTINI**



1) I tre punti $A(-1, 2), B(-4, -2), C(3, -1)$ sono vertici di un triangolo.
I) Verifica che ABC è isoscele e trovane il perimetro
II) Determina le coordinate del punto H, piede dell'altezza AH
III) Calcola l'area di ABC
IV) Il triangolo ABC è rettangolo?

I) Calcoliamo innanzitutto le misure dei tre lati di ABC, così potremo controllare se è isoscele e avere i dati per determinarne il perimetro.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4+1)^2 + (-2-2)^2} = ...$$
$$BC = ... \qquad = \sqrt{50} \approx 7{,}1$$
$$AC = ...$$

Bene, allora abbiamo verificato che il nostro triangolo ABC è isoscele in quanto AB = AC.
Avremo poi $2p(ABC) = \quad ... \quad = 10 + \sqrt{50} \approx 17{,}1$

II) Per determinare le coordinate di H abbiamo a disposizione due modi:
- ❑ il primo è molto più svelto,
- ❑ il secondo è più generale perché sarebbe applicabile anche se il triangolo non fosse isoscele.

1° modo. E' noto che in un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche mediana, quindi H sarà il punto medio di BC. E allora
$$H = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) = \left(\quad ... \quad , \frac{-2-1}{2}\right) = (\ ... \ , \ ... \ )$$
Controlliamo subito se le due coordinate trovate possono andare d'accordo col disegno!
E in caso affermativo, segniamole in matita a fianco di H.

2° modo. Se ABC non fosse stato isoscele con base BC, non avremmo potuto determinare le coordinate di H attraverso le formule per il punto medio di un segmento.
Come sarebbe stato il procedimento, allora?
- Si trova l'equazione della retta su cui giace l'altezza AH (brevemente: della retta AH)
- poi si scrive pure l'equazione della retta BC
- e infine si determina l'intersezione di tali due rette, facendo il sistema fra le loro equazioni.

Iniziamo col trovare l'equazione della retta AH.
Cosa conosciamo di questa retta?
Sappiamo che è una retta non verticale,
passante per $A(-1, 2)$ e perpendicolare alla retta BC, con $B(-4, -2), C(3, -1)$.
Ma allora l'equazione della retta AH sarà della forma $y = mx + q$,
col coefficiente angolare m uguale all'antireciproco del coefficiente angolare della retta BC
(ricordi? Due rette sono perpendicolari se e solo se i loro coefficienti angolari sono uno l'antireciproco dell'altro; e "antireciproco" significa "l'opposto del reciproco": ad esempio, l'antireciproco di 5 è $-\frac{1}{5}$, mentre l'antireciproco di $-\frac{3}{8}$ è $+\frac{8}{3}$).
Il coefficiente angolare di BC si può determinare in due modi:
uno più lungo (ricavando l'equazione di BC),
e uno molto più svelto, ossia con la nota formula: $m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{...}{...} = \frac{1}{7}$.

Ma allora sarà $m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = -7$, che "va d'accordo" col disegno
perché in esso vediamo che AH è una retta in discesa piuttosto ripida.

Perciò avremo $\mathrm{AH}: y=-7x+q$ dove dobbiamo solo determinare il valore di q.
A tale scopo, porremo la condizione di appartenenza, a tale retta, del punto $\mathrm{A}(-1, 2)$:
$\mathrm{A}(-1,2) \in \mathrm{AH} \quad \to \quad 2=-7\cdot(-1)+q$
da cui, risolvendo rispetto a q che in questo momento fa da incognita, $q=\ldots$.

Dopo aver determinato l'equazione di AH
che è risultata essere $\mathrm{AH}: y=-7x-5$,
abbiamo ora bisogno dell'equazione della retta BC.

- Potremmo, a tale scopo, partire dall'equazione $y=mx+q$ di una generica retta non verticale, e trovare m e q ponendo le due condizioni di appartenenza
  - del punto $\mathrm{B}(-4,-2)$: $-2=-4m+q$
  - e del punto $\mathrm{C}(3,-1)$: $\ldots$

  per poi farne il sistema: $\begin{cases} -2=-4m+q \\ \ldots \end{cases}$ da cui $\begin{cases} m=\ldots \\ q=\ldots \end{cases}$
- Oppure potremmo sfruttare il fatto che il coeff. ang. di BC lo avevamo già trovato in precedenza (valeva 1/7)

♥ Comunque, per scrivere l'equazione della retta passante per due punti di coordinate note oppure della retta passante per un punto di coordinate note e avente un determinato coefficiente angolare esistono due apposite e comode ***FORMULE****, alle quali volutamente abbiamo scelto di rinunciare per ora: le introdurremo più avanti.*

quindi già si sapeva che l'equazione di BC era della forma $y=\frac{1}{7}x+q$; ma per determinare il valore di q è possibile porre la condizione di appartenenza di B o di C, indifferentemente: ad esempio, la condizione di appartenenza di B porta a $-2=-\frac{4}{7}+q$ da cui $q=\ldots$

Bene! Ora che abbiamo stabilito le due equazioni di AH e di BC, ossia $\mathrm{AH}: y=-7x-5$, $\mathrm{BC}:\ldots$
basterà farne il sistema e risolverlo, per trovare le coordinate di H:

punto H $\begin{cases} y=-7x-5 \\ \ldots \end{cases} \quad \ldots$

III) Per trovare l'area di ABC (a parte il fatto che si tratta di un triangolo isoscele del quale si conoscono le misure dei tre lati, quindi potremmo benissimo ignorare il fatto che sia inserito in un riferimento cartesiano e determinare la misura dell'altezza AH con Pitagora, ecc.) possiamo calcolare la lunghezza del segmento AH utilizzando la nota formula:

$$\mathrm{AH}=\sqrt{(x_\mathrm{H}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{H}-y_\mathrm{A})^2}=\ldots$$
$$=\sqrt{\frac{50}{4}}\overset{\text{NOTA 1}}{=}\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{50}}{2}$$

E a questo punto,

$$S(\mathrm{ABC})=\frac{base\cdot altezza}{2}=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}}{2}=\frac{\sqrt{50}\cdot\frac{\sqrt{50}}{2}}{2}=$$
$$=\frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}}{2}\cdot\frac{1}{2}\overset{\text{NOTA 2}}{=}\frac{50}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{2}$$

NOTA 1:
Quando sotto radice c'è una somma o una sottrazione, la radice NON può essere "spezzata" (sarebbe errore gravissimo! ☹), si può invece spezzare quando c'è un prodotto o un quoziente:
$\sqrt{9+4}\neq\sqrt{9}+\sqrt{4},\ \sqrt{9-4}\neq\sqrt{9}-\sqrt{4}$
$\sqrt{9\cdot 4}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{4},\ \sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}$

NOTA 2 Cos'è $\sqrt{50}$? E' quel numero che, se viene elevato alla seconda, dà come risultato 50; e allora, se lo moltiplico per sé stesso, operazione che equivale a elevarlo al quadrato, ottengo appunto 50!!! $\to$ $\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}=50$

IV) Dalla figura, è chiaro che i lati che eventualmente possono formare un angolo retto sono AB e AC.
Se andiamo a calcolare i coefficienti angolari delle due rette AB e AC avremo:

$$m_\mathrm{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}}=\ldots \qquad m_\mathrm{AC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\ldots$$

e vediamo quindi che sono antireciproci uno dell'altro.
Pertanto tali due rette sono perpendicolari e dunque il triangolo ABC è rettangolo.
Oppure: avevamo già calcolato le misure dei lati di ABC, ottenendo $\mathrm{AB}=5,\ \mathrm{AC}=5,\ \mathrm{BC}=\sqrt{50}$.

Andiamo allora a controllare se vale la relazione $5^2+5^2=\left(\sqrt{50}\right)^2$: $\ldots$

Come si vede la risposta è affermativa, quindi,
per l'inverso del teorema di Pitagora, il triangolo ABC è rettangolo.

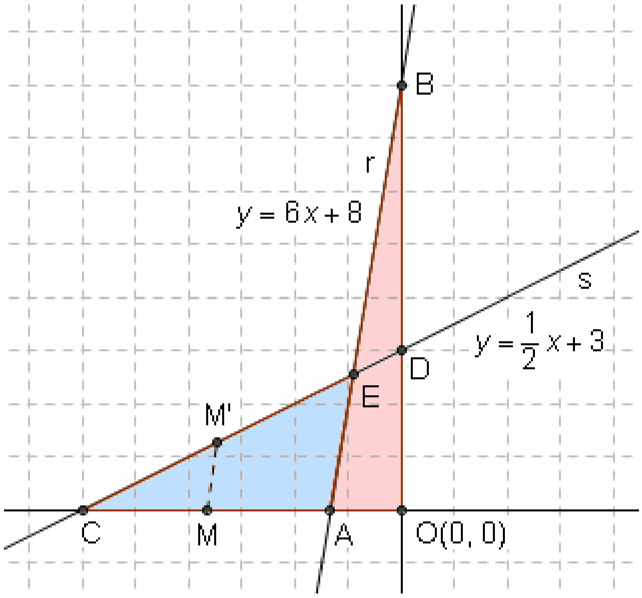
2) Le due rette

$r: y = 6x + 8; \quad s: y = \frac{1}{2}x + 3$

intersecano gli assi cartesiani nei punti
A e B (retta *r*), C e D (retta *s*)
e si tagliano nel punto E.

I) E' maggiore la superficie del triangolo AOB o quella di CAE?

II) Verifica che, detto M il punto medio di CA e M' il punto medio di CE, la congiungente MM' è parallela ad AE



I)
Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti A, B, C, D, E.
A è l'intersezione della retta $r: \; y = 6x + 8$ con l'asse delle x,
che è l'insieme dei punti del piano cartesiano aventi ordinata 0, e ha perciò equazione $y = 0$.

Quindi A si determina risolvendo il sistema $\begin{cases} y = 6x + 8 \\ y = 0 \end{cases}$ o anche, semplicemente,

tenendo conto che la sua y vale 0 e ponendo $y = 0$ nell'equazione $y = 6x + 8$ per trovare anche la x.
Dunque $0 = 6x + 8$ da cui $x = ...$
Di conseguenza le coordinate di A sono: $\mathrm{A}(\; ... \; , 0)$

Analogamente si procede per trovare le coordinate di C, intersezione con l'asse x della retta $s: y = \frac{1}{2}x + 3$.

Si trova $\mathrm{C}(\; ... \; , 0)$.
Le coordinate di B e D sono immediate da determinare.
B, ad esempio, è l'intersezione della retta $r: \; y = 6x + 8$ con l'asse delle y,
che è l'insieme dei punti del piano cartesiano aventi ascissa 0, e ha perciò equazione $x = 0$.

Perciò B si determina risolvendo il sistema $\begin{cases} y = 6x + 8 \\ x = 0 \end{cases}$ o anche, in modo estremamente semplice,

tenendo conto che la sua x vale 0 e ponendo $x = 0$ nell'equazione $y = 6x + 8$ per trovare anche la y.
In alternativa, B è l'intersezione della retta $r: \; y = 6x + 8$ con l'asse delle y
quindi la y di B coincide con l'ordinata all'origine q di quella retta, che vale …
In definitiva risulta $\mathrm{B}(0, \; ... \;)$, $\mathrm{D}(0, \; ... \;)$.

Il punto E poi, essendo il punto di intersezione fra le due rette $r: y = 6x + 8$, $s: y = \frac{1}{2}x + 3$,

si trova risolvendo il … delle equazioni delle due rette.

$\begin{cases} ... \\ ... \end{cases}$

Si trovano così, per E, coordinate frazionarie: $\mathrm{E}(\; ... \; , \; ... \;)$

Area di CAE:

si può ottenere col calcolo $S_{\mathrm{CAE}} = \frac{\mathrm{CA} \cdot y_{\mathrm{E}}}{2}$,

essendo $\mathrm{CA} = |x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{C}}| = ...$

Verifica che così facendo si trova $S_{\mathrm{CAE}} = \frac{196}{33}$.

Per quanto riguarda AOB, è $S_{\mathrm{AOB}} = \frac{\mathrm{AO} \cdot \mathrm{OB}}{2} = ...$

Confrontando i valori frazionari di S_{CAE} e S_{AOB}, si vede che è maggiore la superficie di …

II)

M è il punto medio del segmento CA, con $C(-6,\,0)$ e $A\left(-\frac{4}{3},\,0\right)$.

Dunque $M\left(\frac{-6-\frac{4}{3}}{2},\,\frac{0+0}{2}\right)=(\ \ldots\ ,\ \ldots\ )$. Allo stesso modo, si ottiene $M'(\ \ldots\ ,\ \ldots\ )$

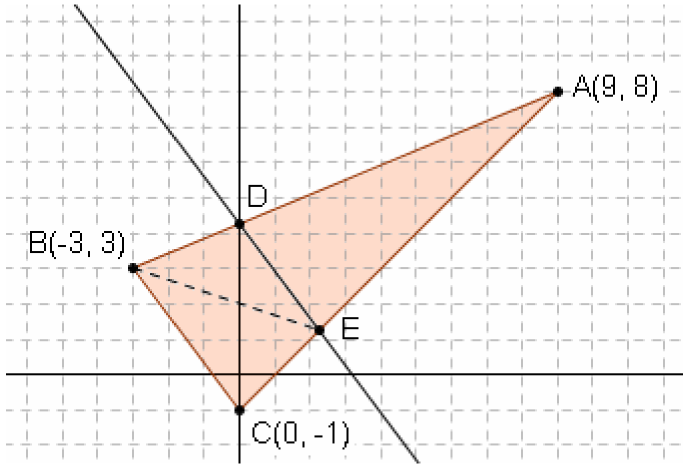
Determiniamo il coefficiente angolare della retta MM' applicando la formula $m_{MM'}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\ldots$

e vediamo che tale coefficiente angolare coincide con quello della retta AE: $y=6x+8\ \rightarrow\ m_{AE}=\ldots$

Perciò resta verificato che le due rette sono parallele.

Fra l'altro, questo è in accordo con un teorema generale della Geometria, che afferma:
"in ogni triangolo, la congiungente i punti medi di due lati è *sempre* parallela al terzo lato (e uguale, come lunghezza, alla metà di questo)".

3) I punti $A(9,\,8)$; $B(-3,\,3)$; $C(0,\,-1)$ sono vertici di un triangolo.
Per il punto di intersezione D del lato AB con l'asse delle ordinate si traccia la parallela al lato BC, che taglia il lato AC in E.
Determina le misure delle diagonali del trapezio BCED.
Qual è la diagonale più lunga?



Occorre determinare innanzitutto le coordinate del punto D, intersecando la retta AB con l'asse y.
Retta AB: $y=mx+q$ dove m e q si trovano ponendo le condizioni di appartenenza di A e di B.

$$\begin{matrix} A(9,\,8) \\ B(-3,\,3) \end{matrix}\ \begin{cases} 8=9m+q \\ \ldots \end{cases}\quad \text{da cui}\ \begin{cases} m=\ldots \\ q=\ldots \end{cases}\quad \text{e di conseguenza l'equazione di AB è } y=\ \ldots\ +\frac{17}{4}$$

Ora le coordinate di D, punto di ascissa 0 della retta AB, saranno $D(0,\ \ldots\ )$.

La retta DE, essendo parallela a BC, avrà coefficiente angolare uguale a quello di BC. Ma è $m_{BC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\ldots$

per cui l'equazione della retta DE, tenuto conto che la sua ordinata all'origine vale … , sarà $y=\ldots$

Per determinare le coordinate di E bisogna intersecare tale retta con la retta AC.
L'equazione di quest'ultima si può scrivere considerando la generica equazione $y=mx+q$
e determinando i valori di m e q che interessano tramite le condizioni di appartenenza di A e di C:

$$\begin{matrix} A(9,\,8) \\ C(0,-1) \end{matrix}\ \begin{cases} 8=9m+q \\ \ldots \end{cases}\quad \text{da cui, dopo aver risolto il sistema, } AC:\ y=\ldots$$

oppure tenendo conto del fatto che per la retta AC l'ordinata all'origine vale …

e determinando m_{AC} con la formula $m_{AC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\ldots$: si ha subito che l'equazione di AC è $y=\ldots$

A questo punto, con un sistema, si determinano le coordinate di E:

$$\begin{cases} \ldots \\ y=x-1 \end{cases}\qquad \text{da cui } E\left(\frac{9}{4},\,\frac{5}{4}\right)$$

Infine, $DC=|y_C-y_D|$ perché il segmento DC ha per estremi due punti con la stessa ascissa:

$$DC=|y_C-y_D|=\ldots$$

mentre

$$BE=\sqrt{\qquad\ldots\qquad}=\qquad\ldots\qquad=\sqrt{\frac{490}{16}}=\frac{\sqrt{490}}{4}\approx\frac{22{,}136}{4}=5{,}534$$

Fra le due diagonali BE e DC, è quindi leggermente più lunga …

PER FINIRE, DUE FORMULE IMPORTANTI E *MOLTO* COMODE

Intenzionalmente, abbiamo rimandato fin qui la presentazione di un paio di formule che rendono assai più rapido il procedimento risolutivo di parecchi problemi.
La prima è la formula per l'equazione della **retta passante per due punti di coordinate note**.
Essa nei testi viene solitamente ricavata impostando una opportuna proporzione, e scritta sotto la forma

♥ $$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$ **FORMULA PER L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI DATI**

essendo (x_1,y_1) e (x_2,y_2) i due punti in questione.
Osserviamo subito che questa formula NON vale qualora i due punti individuino una retta parallela a uno degli assi cartesiani, e vediamo un paio di esempi di applicazione.
Se fosse richiesto di determinare l'equazione della retta passante per i due punti $A(-8,1)$ e $B(2,-4)$,

... procedendo, come abbiamo sempre fatto fin qui, *senza formule*, si tratterebbe di considerare la generica equazione $y=mx+q$ per porre le due condizioni di appartenenza

$$\begin{matrix}(-8,\,1)\\(2,-4)\end{matrix}\ \begin{cases}1=-8m+q\\-4=2m+q\end{cases}$$

e risolvere il sistema trovando così m e q:

$$\begin{cases}m=-\dfrac{1}{2}\\q=-3\end{cases}\ \rightarrow\ \textit{la retta è }\ y=-\frac{1}{2}x-3$$

… mentre *con la formula* si ottiene direttamente

$$\frac{y-1}{-4-1}=\frac{x+8}{2+8}$$

Si fanno poi i calcoli, si porta l'equazione in forma esplicita oppure implicita, ed è fatta.

$$\frac{y-1}{-5}=\frac{x+8}{10};\ \ -(y-1)=\frac{x+8}{2};$$
$$-2y+2=x+8;\ \ -x-2y-6=0$$
$$\textit{da cui }\ x+2y+6=0\ \textit{ oppure }\ y=-\frac{1}{2}x-3$$

Se invece i due punti assegnati fossero ad esempio $(2,\,5)$ e $(9,5)$, la formula non sarebbe applicabile perché si otterrebbe uno 0 a denominatore: $\frac{y-5}{5-5}=\frac{x-2}{9-2}$; tuttavia, in casi come questo (due punti con uguale ordinata oppure uguale ascissa), dato che le retta è orizzontale oppure verticale la sua equazione si potrà scrivere *immediatamente* senza scomodare formule (nel nostro caso, è $y=5$).

Un'altra formula che può risultare parecchio utile è quella per la
retta passante per un punto dato, e avente coefficiente angolare assegnato:

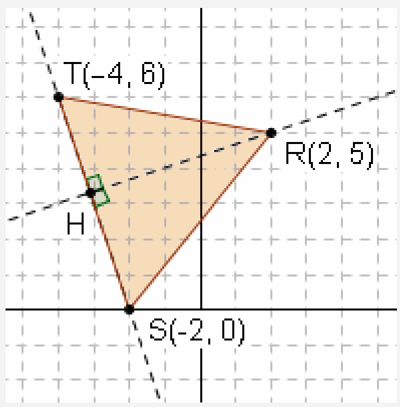
♥ $$\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$$ **FORMULA PER L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER IL PUNTO $P_0(x_0,y_0)$ E AVENTE COEFFICIENTE ANGOLARE m**

Indipendentemente da come sia stata ricavata, osserviamo che questa semplice formula "funziona", perché
a) l'equazione scritta rappresenta certamente una retta
   (per il fatto che si tratta di un'equazione di 1° grado nelle due variabili x, y);
b) tale retta ha coeff. ang. m (se si portasse in forma esplicita, il moltiplicatore di x risulterebbe essere m)
c) tale retta infine passa certamente per $P_0(x_0,y_0)$
   in quanto sostituendo x_0, y_0 al posto di x e y rispettivamente, si ottiene un'uguaglianza vera.

Ad esempio, la retta che passa per il punto $(4,-12)$ e ha coefficiente angolare $m=5$ è semplicemente $y+12=5(x-4)$ ossia $y+12=5x-20;\ \ y=5x-32$.

NEGLI ESERCIZI PROPOSTI ALLE PAGINE SEGUENTI potrai, volendo, rendere più veloci le risoluzioni attraverso le due belle formule presentate in questo riquadro. Per fare un esempio:

Il triangolo RST ha per vertici $R(2,5)$; $S(-2,0)$; $T(-4,6)$.
Scrivi l'equazione della retta ST e determina le coordinate della proiezione H del punto R su questa retta.



Equazione della retta passante per i due punti S, T:

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}};\ \ \frac{y-0}{6-0}=\frac{x+2}{-4+2};\ \ \dots\ \ y=-3x-6$$

Equazione della retta che passa per R e ha coefficiente angolare $1/3$

(antireciproco di -3): $\boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$; $y-5=\frac{1}{3}(x-2); \dots\ y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$.

Facendo il sistema fra questa retta e la retta ST, si ottiene $H\left(-\frac{31}{10},\frac{33}{10}\right)$