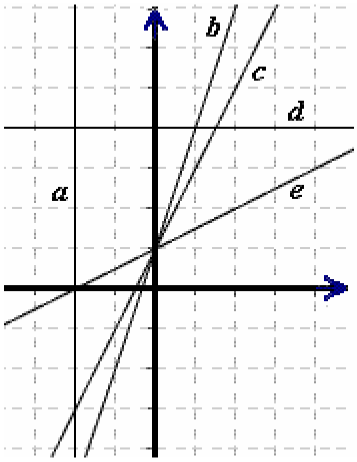
7. ESERCIZI (risposte alle pagg. 452, 453)

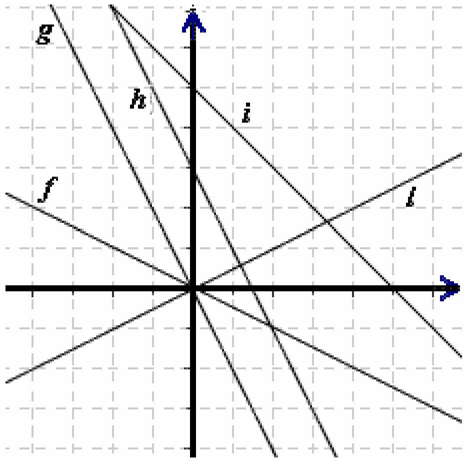
DISEGNARE, RICONOSCERE

1) **Disegna** le seguenti rette:
a) $y=x+3$ b) $y=x$ c) $y=x-3$ d) $y=3$ e) $x=3$
f) $y=-4x+2$ g) $y=-4x$ h) $y=4x$ i) $y=\frac{1}{4}x$ j) $y=-\frac{1}{4}x-3$

2) **Abbina** a ciascuna fra le seguenti equazioni la corrispondente retta fra quelle raffigurate:

i) $y=\frac{1}{2}x$ ii) $y=\frac{1}{2}x+1$
iii) $x=-2$ iv) $y=-2x$
v) $y=-\frac{1}{2}x$ vi) $y=4$
vii) $y=-2x+3$ viii) $y=5-x$
ix) $y=3x+1$ x) $y=2x+1$





IDEE E FORMULE

Distanza fra due punti:
$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
$d=|x_2-x_1|$ stessa ordinata
$d=|y_2-y_1|$ stessa ascissa

Punto medio di un segmento:
$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$
$y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$

Due rette sono PARALLELE se e solo se hanno coefficienti angolari uguali;
due rette sono PERPENDICOLARI se e solo se hanno coefficienti angolari antireciproci.

Proprietà fondamentale del coeff. angolare:
$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Formula per l'equazione della retta passante per due punti dati:
$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

Formula per l'equazione della retta passante per $(x_0,\ y_0)$ e avente coefficiente angolare m:
$y-y_0=m(x-x_0)$

COEFFICIENTE ANGOLARE, PARALLELISMO, PERPENDICOLARITA'

3) Determina (formula $m=\Delta y/\Delta x$) il coefficiente angolare della retta passante per ciascuna coppia di punti:
i) $A(1,2)$ $B(4,3)$ ii) $C(4,5)$ $D(7,2)$ iii) $E(1,-1)$ $F(3,5)$ iv) $G(3,2)$ $H(3,-2)$
v) $I(0,3)$ $L(-1,1)$ vi) $M(7,7)$ $N(-5,7)$ vii) $O(0,0)$ $P\left(\frac{1}{2},-2\right)$ viii) $Q\left(1,\frac{1}{3}\right)$ $R\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$

4) Data la retta $y=-\frac{2}{3}x$, riconosci quali fra le seguenti rette sono ad essa I) parallele II) perpendicolari
a) $y=\frac{2}{3}x+1$ b) $y=\frac{3}{2}x-1$ c) $y=1-\frac{2}{3}x$ d) $4x+6y+30=0$ e) $3x+2y+6=0$

5) Stabilisci quale coeff. angolare hanno tutte le rette parallele alla retta che passa per la coppia di punti:
a) $A(1,-3);\ B(3,2)$ b) $C(1/8,\ 1/4);\ D(1/2,\ -1/2)$ c) $E(5,\ 4);\ F(5,\ -2)$

6) Stabilisci quale coefficiente angolare hanno tutte le rette perpendicolari alla retta che passa per ciascuna delle tre coppie di punti a), b), c) dell'esercizio precedente

RETTA PER DUE PUNTI

7) Scrivi l'equazione della retta AB, con:
a) $A(0,4);\ B(-6,1)$ b) $A(-3,4);\ B(2,-1)$ c) $A(-3,-6);\ B(4,1)$ d) $A\left(1,\frac{1}{2}\right);\ B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$
e) $A(3,5);\ B(1,-1)$ f) $A(-1,-4);\ B(-3,2)$ g) $A\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right);\ B\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{4}\right)$ h) $A(1,3);\ B(1,-1)$

RETTA PER UN PUNTO DATO, CON DATO COEFFICIENTE ANGOLARE

8) Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $P(2,3)$ ed è parallela alla retta

a) $y=2x+1$ b) $y=x$ c) $y=-4x-5$ d) $y=7-x$ e) $y=-\frac{1}{2}x$

f) $3x-y+1=0$ g) $4x+3y+2=0$ h) AB, con $A(1,2);\ B(2,7)$ i) $y=1$ j) Asse y

9) Riprendi l'esercizio precedente, sostituendo "perpendicolare" a "parallela"

10) Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto $P(-3,0)$ ed è parallela alla retta

a) $y=-2x-4$ b) $y=-x$ c) $y=\frac{5}{7}x$ d) $x=0$ e) Asse x

f) AB, con $A(-3,1);\ B(0,4)$ g) CD, con $C(-1,-5);\ D(-2,4)$ h) EF, con $E(0,1);\ F(0,-1)$

11) Riprendi l'esercizio precedente, sostituendo "perpendicolare" a "parallela"

12) Scrivi le equazioni delle tre altezze (= delle rette su cui giacciono le altezze) di ABC, nei seguenti casi:

a) $A(2,1);\ B(5,3);\ C(7,2)$
b) $A(-5,-2);\ B(-3,4);\ C(0,1)$
c) $A\equiv O(0,0);\ B(0,5);\ C(-4,1)$
d) $A\left(2,\frac{1}{2}\right);\ B\left(4,-\frac{1}{2}\right);\ C(1,-1)$

Sarà forse ovvio, ma è davvero IMPORTANTISSIMO fare la **figura** con precisione e **controllare se i risultati trovati sono in accordo con essa!**

SU FORMA ESPLICITA E IMPLICITA

13) Porta le seguenti equazioni in forma esplicita:

a) $x+y-1=0$ b) $3x-y+4=0$ c) $x+4y-6=0$ d) $2x+3y=0$ e) $x-5y-10=0$

14) Porta le seguenti equazioni in forma implicita:

a) $y=-3x+8$ b) $y=x+2$ c) $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}$ d) $y=\frac{x-7}{2}$ e) $y=-\frac{4}{3}x$

SU APPARTENENZA E INTERSEZIONE

15) Per ciascuna delle rette indicate qui a fianco, determina
i) il punto di ascissa -3 (basterà sostituire -3 al posto di x e ricavare y!)
ii) il punto di ordinata 4 (basterà sostituire 4 al posto di y e ricavare x!)
iii) il punto comune con l'asse y
iv) il punto comune con l'asse x

a) $y=4x-3$
b) $y=-\frac{5}{6}x+2$
c) $3x-5y+6=0$
d) $y=-4$

16) Trova le coordinate del punto in cui si tagliano le rette a fianco indicate

a) $r: y=12x+1,\ r': y=13x-1$
b) $r: 3x-5y+2=0,\ r': 7x+5y-4=0$ c) $r: y=-\frac{x}{3},\ r': x+y=1$

17) Trova le coordinate dei vertici del triangolo individuato dalle rette seguenti:

a) $r: y=-x,\ \ s: 3x-y-2=0,\ \ t: 2x-2y+1=0$ b) $r: x=0,\ \ s: y-2=0,\ \ t: y=5x-1$

SULLA DISTANZA FRA DUE PUNTI

18) Calcola le distanze fra le seguenti coppie di punti:

a) $A(0,2);\ B(6,10)$ b) $A(-8,3);\ B(7,-5)$ c) $A(0,-3);\ B(0,-7)$

d) $A(2,-1);\ B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ e) $A(10,-1);\ B(6,2)$ f) $A(3,42);\ B(12,2)$ g) $A\left(-\frac{1}{6},-2\right);\ B\left(\frac{3}{2},2\right)$

19) Determina il perimetro del triangolo di vertici a) $A(1,-4);\ B(13,-9);\ C(1,0)$ b) $D(-7,3);\ E(7,3);\ F(2,-9)$

20) Trova il perimetro di PQR, con $P(-4,2);\ Q(-1,-2);\ R(5,6)$ (il risultato conterrà una radice)

21) Il triangolo di vertici $D(-3,3);\ E(0,-1);\ F(-7,0)$ è isoscele: dimostralo, e calcola la sua base

Nel seguito si parlerà, a volte, di **parallelogrammi**, eventualmente "particolari" (rettangolo, quadrato). Questo argomento è trattato alle pagine 312 … 316 del volume: vai a dare un'occhiata!

22) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,6);\ B(10,1);\ C(7,-3);\ D(-5,2)$ è un parallelogrammo, utilizzando: a) i coefficienti angolari b) la formula per la distanza fra due punti

23) Verifica che il triangolo di vertici $A(-2,-1);\ B(10,-10);\ C(22,6)$ è rettangolo
a) coi coefficienti angolari b) utilizzando *esclusivamente* la formula per la distanza fra due punti.

24) Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-2,2);\ B\left(0,\frac{7}{2}\right);\ C\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right);\ D\left(-\frac{1}{2},0\right)$ è un quadrato

a) col metodo che ti pare b) utilizzando *esclusivamente* la formula per la distanza fra due punti

SUL PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

25) Calcola le coordinate del punto medio del segmento AB, essendo

a) $A(3,5);\ B(-1,9)$ b) $A(-4,0);\ B(-3,0)$ c) $A(-2,-4);\ B(0,2)$

d) $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right);\ B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$ e) $A\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\right);\ B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ f) $A(k,-3);\ B(1,-3)$

g) $A(a+b,\ a-b);\ B(a-b,\ b)$ h) $A(3{,}6;\ 0{,}4);\ B(1{,}4;\ -0{,}5)$

26) Calcola le coordinate dei punti medi I, L, M, N dei lati del quadrilatero ABCD, essendo $A(-3,1);\ B(1,-5);\ C(5,7);\ D(1,7)$. Il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero qualsiasi è sempre un parallelogrammo: verificalo in questo caso particolare, constatando che i lati opposti di ILMN sono a due a due paralleli come direzione, e uguali come lunghezza.

27) M è il punto medio di PQ, essendo $P(0,1);\ Q(-4,3)$. Che coordinate ha N, punto medio di PM?

28) Nell'esercizio 22 si è verificato che ABCD, con $A(-2,6);\ B(10,1);\ C(7,-3);\ D(-5,2)$, è un parallelogrammo; ma allora le sue diagonali dovrebbero tagliarsi scambievolmente per metà, vale a dire i loro punti medi dovrebbero coincidere. Verificalo.

29) Se $M(1,-1)$ è il punto medio del segmento AB e $A(-4,3)$, quali sono le coordinate di B?

30) Se $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{4}\right)$ è il punto medio del segmento AB e $A\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$, quali sono le coordinate di B?

31) Trova le coordinate del punto R, simmetrico di $T(-4,2)$ rispetto a $S(-1,-3)$

32) Trova il quarto vertice del parallelogrammo che ha tre vertici in $A\left(-3,\frac{13}{2}\right);\ B(-2,4);\ C(3,2)$

VARI

33) E' dato il triangolo ABC, con $A(-1,0);\ B(3,-3);\ C(-4,-6)$. Scrivi le equazioni delle mediane relative ai lati AB e AC (= delle *rette* su cui giacciono tali mediane), poi determina il loro punto di intersezione.

34) Dopo aver dimostrato che ABCD, con $A(-5,-2);\ B(5,-3);\ C(6,2);\ D(-4,3)$, è un parallelogrammo, congiungi il vertice A col punto medio M del lato DC e il vertice C con il punto medio N nel lato AB e verifica che i due segmenti AM e CN dividono la diagonale DB in tre parti uguali $DE = EF = FB$.

35) Verifica algebricamente che i tre punti $A(2,5);\ B(4,1);\ C(5,-1)$ sono allineati.

36) Verifica, utilizzando esclusivamente i coeff. angolari, che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.

a) $A(-4,1);\ B(0,-2);\ C(3,0);\ D(-1,3)$ b) $A(-1,-1);\ B\left(3,-\frac{8}{3}\right);\ C\left(3,\frac{4}{3}\right);\ D(-1,3)$

37) Ripeti la verifica richiesta all'es. precedente utilizzando, invece, la formula per la distanza fra due punti.

38) Verifica, utilizzando esclusivamente i coefficienti angolari, che il triangolo a) ABC b) DEF è rettangolo.
a) $A(-10,-8);\ B(2,8);\ C(14,-1)$ b) $D(-1,0);\ E(4,-12);\ F(8,\ 15/4)$

39) Ripeti la stessa verifica richiesta all'esercizio precedente utilizzando, invece, la relazione pitagorica.

40) Considera il triangolo di vertici $A(-8,-3);\ B(0,12);\ C(0,3)$ e verifica (nei tre possibili casi) che la congiungente i punti medi di due lati è sempre parallela al lato rimanente, e uguale alla sua metà

41) Determina il baricentro (= punto di incontro delle mediane) e l'ortocentro (delle altezze):
a) di OAB, con $O(0,0);\ A(5,0);\ B(1,6)$ b) di DEF, con $D(1,2);\ E(-5,-6);\ F(-3,0)$

42) Disegna i punti $A(6,-8);\ B(12,5)$ e determina l'area del triangolo OAB assumendo OA come base.

43) Determina l'area del triangolo che ha per vertici a) $(-2,\ -3);\ (0,\ 6);\ (6,\ 3)$ b) $(-9,\ 5);\ (-6,\ -3);\ (-1,\ -3)$

44) Quanto misurano area e perimetro del triangolo che la retta $2x-3y+6=0$ forma con gli assi cartesiani?

45) Determina le coordinate del punto di incontro degli assi di due dei lati del triangolo che ha per vertici i punti $(-7,-3);\ (-5,\ 5);\ (4,\ 5)$. Verifica che anche l'asse del lato rimanente passa per quel punto. [L'asse di un segmento è la perpendicolare a quel segmento condotta per il suo punto medio].

46) I vertici del triangolo ABC sono: $A(-7,\ 5);\ B(-6,\ -2);\ C(2,\ 2)$. Scrivi le equazioni: dell'altezza e della mediana relative al lato BC; dell'asse di BC; della parallela a BC passante per A. Ora BC, l'altezza relativa a BC, l'asse di BC e la parallela a BC per A determinano un rettangolo: trovane l'area e determina la misura delle sue diagonali, constatando che sono uguali.

47) Gli assi dei tre lati di un triangolo passano sempre per uno stesso punto, che ha ugual distanza dai tre vertici del triangolo: verificalo nel caso particolare del triangolo di vertici $A(-1,-5);\ B(8,-2);\ C(0,2)$. Quanto vale in questo caso la distanza comune?

RISPOSTE

2) i) *l* ii) *e* iii) *a* iv) *g* v) *f* vi) *d* vii) *h* viii) *i* ix) *b* x) *c*

3) i) $1/3$ ii) -1 iii) 3 iv) *non esiste/ è infinito* v) 2 vi) 0 vii) -4 viii) $1/3$

4a) *né* || *né* $\perp$ 4b) $\perp$ 4c) || 4d) || 4e) *né* || *né* $\perp$

5a) $m=\frac{5}{2}$ 5b) $m=-2$ 5c) $m=$ "*non esistente*", "*non definito*", "*infinito*" (*retta verticale*)

6a) $m=-\frac{2}{5}$ 6b) $m=\frac{1}{2}$ 6c) $m=0$

7) a) $y=\frac{1}{2}x+4$ b) $y=1-x$ c) $y=x-3$ d) $y=\frac{3}{8}x+\frac{1}{8}$
e) $y=3x-4$ f) $y=-3x-7$ g) $y=-x-\frac{5}{4}$ h) $x=1$

8) a) $y=2x-1$ b) $y=x+1$ c) $y=-4x+11$ d) $y=-x+5$ e) $y=-\frac{1}{2}x+4$
f) $y=3x-3$ g) $y=-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}$ h) $y=5x-7$ i) $y=3$ j) $x=2$

9) a) $y=-\frac{1}{2}x+4$ b) $y=-x+5$ c) $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$ d) $y=x+1$ e) $y=2x-1$
f) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$ g) $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ h) $y=-\frac{1}{5}x+\frac{17}{5}$ i) $x=2$ j) $y=3$

10) a) $y=-2x-6$ b) $y=-x-3$ c) $y=\frac{5}{7}x+\frac{15}{7}$ d) $x=-3$ e) $y=0$
f) $y=x+3$ g) $y=-9x-27$ h) $x=-3$

11) a) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ b) $y=x+3$ c) $y=-\frac{7}{5}x-\frac{21}{5}$ d) $y=0$ e) $x=-3$
f) $y=-x-3$ g) $y=\frac{1}{9}x+\frac{1}{3}$ h) $y=0$

12) a) $y=2x-3;\ y=-5x+28;\ y=-\frac{3}{2}x+\frac{25}{2}$ b) $y=x+3;\ y=-\frac{5}{3}x-1;\ y=-\frac{1}{3}x+1$
c) $y=-x;\ y=4x+5;\ y=1$ d) $y=-6x+\frac{25}{2};\ y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{6};\ y=2x-3$

13) a) $y=-x+1$ b) $y=3x+4$ c) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$ d) $y=-\frac{2}{3}x$ e) $y=\frac{1}{5}x-2$

14) a) $3x+y-8=0$ b) $-x+y-2=0$ o $x-y+2=0$ c) $-5x+15y+3=0$ o $5x-15y-3=0$ d) $-x+2y+7=0$ $x-2y-7=0$ e) $4x+3y=0$

15) a) i) $(-3,-15)$ ii) $\left(\frac{7}{4},4\right)$ iii) $(0,-3)$ iv) $\left(\frac{3}{4},0\right)$ b) i) $\left(-3,\frac{9}{2}\right)$ ii) $\left(-\frac{12}{5},4\right)$ iii) $(0,2)$ iv) $\left(\frac{12}{5},0\right)$
c) i) $\left(-3,-\frac{3}{5}\right)$ ii) $\left(\frac{14}{3},4\right)$ iii) $\left(0,\frac{6}{5}\right)$ iv) $(-2,0)$ d) i) $(-3,-4)$ ii) *non esiste* iii) $(0,-4)$ iv) *non esiste*

16) a) $(2,25)$ b) $\left(\frac{1}{5},\frac{13}{25}\right)$ c) $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

17) a) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);\ \left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right);\ \left(\frac{5}{4},\frac{7}{4}\right)$ b) $(0,2);\ (0,-1);\ \left(\frac{3}{5},2\right)$

18) a) 10 b) 17 c) 4 d) 5/2 e) 5 f) 41 g) 13/3

19) a) 32 b) 42 20) $15+\sqrt{97}$

21) In effetti, è $DE=DF=5$. base $=EF=\sqrt{50}\approx 7{,}07$

22) a) Due lati opposti giacciono su rette di coeff. ang. $-5/12$, gli altri due su rette di coeff. ang. 4/3
b) Occorrerà controllare che i lati opposti siano a due a due uguali. Si trova $AB=DC=13;\ AD=CB=5$.

23) b) Basta verificare che la somma dei quadrati di due lati uguaglia il quadrato del lato rimanente: si potrà così concludere che il triangolo è rettangolo in virtù dell'inverso del Teorema di Pitagora (pag. 214).

24) b) Si deve verificare che i quattro lati sono uguali, e pure le diagonali sono uguali!
Si trova $AB = BC = CD = DA = \frac{5}{2}$, $AC = BD = \sqrt{\frac{50}{4}} = \sqrt{12,5} \approx 3,5$

25) a) $(1,7)$ b) $\left(-\frac{7}{2},0\right)$ c) $(-1,-1)$ d) $\left(\frac{3}{8},\frac{4}{15}\right)$ e) $\left(-\frac{1}{8},-\frac{2}{3}\right)$ f) $\left(\frac{k+1}{2},-3\right)$ g) $\left(a,\frac{a}{2}\right)$ h) $(2,5;-0,05)$

26) $(-1,-2)$; $(3,1)$; $(3,7)$; $(-1,4)$; due lati opposti di ILMN misurano 5 e gli altri due 6

27) $N\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 28) In effetti, sia AC che BD hanno per punto medio $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ 29) $B(6,-5)$ 30) $B\left(\frac{7}{6},-1\right)$

31) $R(2,-8)$ 32) $D\left(2,\frac{9}{2}\right)$ 33) Il punto di intersezione delle mediane è $G\left(-\frac{2}{3},-3\right)$ 34) $E(-1,1)$; $F(2,-1)$

35) Puoi scrivere l'equazione della retta che passa per 2 di questi punti e verificare che anche il 3° punto le appartiene.

36) a) $m_{AB} = -\frac{3}{4} = m_{DC}$ perciò $AB \parallel DC$; $m_{AD} = \frac{2}{3} = m_{BC}$ perciò $AD \parallel BC$
b) $m_{AB} = -\frac{5}{12} = m_{DC}$ perciò $AB \parallel DC$; $m_{AD} = \infty = m_{BC}$ perciò $AD \parallel BC$ (entrambe verticali)

37) a) $AB = 5 = DC$; $AD = \sqrt{13} = BC$ e un quadrilatero coi lati opposti a due a due uguali è un parallelogrammo.
b) $AB = \frac{13}{3} = DC$; $AD = 4 = BC$

38) a) $m_{AB} = \frac{4}{3}$ e $m_{BC} = -\frac{3}{4}$ perciò $AB \perp BC$ $\left(A\hat{B}C = 90°\right)$ b) $m_{DE} = -\frac{12}{5}$ e $m_{DF} = \frac{5}{12}$ perciò $DE \perp DF$ $\left(E\hat{D}F = 90°\right)$

39) a) $AB = 20$, $BC = 15$, $AC = 25$ quindi $AB^2 + BC^2 = 400 + 225 = 625 = AC^2$ da cui $A\hat{B}C = 90°$
b) $DE = 13$, $DF = \frac{39}{4}$, $EF = \frac{65}{4}$ quindi $DE^2 + DF^2 = 169 + \frac{1521}{16} = \frac{4225}{16} = EF^2$ da cui $E\hat{D}F = 90°$

40) Ad esempio, i punti medi di AB e BC hanno coordinate $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$ e $\left(0, \frac{15}{2}\right)$
e la loro congiungente ha coefficiente angolare, come retta, $\frac{3}{4}$, e misura, come segmento, 5.
Ora, AC ha coefficiente angolare, come retta, ancora $\frac{3}{4}$ e misura, come segmento, 10 cioè $5 \cdot 2$.
A te le altre verifiche.

41) a) ortocentro: $\left(1, \frac{2}{3}\right)$; baricentro: $(2,2)$ b) ortocentro: $(-11, 6)$; baricentro: $\left(-\frac{7}{3},-\frac{4}{3}\right)$

42) $S(OAB) = 63$ 43) a) $S = 30$ b) $S = 20$ 44) $S = 3$, $2p = 5 + \sqrt{13}$ 45) $(-1/2, -3/8)$

46) $y = -2x - 9$; $y = -x - 2$; $y = -2x - 4$; $y = \frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$;
il rettangolo ha area uguale a 15 e le sue diagonali misurano entrambe $\sqrt{50}$

47) Scrivi le equazioni degli assi dei tre lati, trova il punto di intersezione di due qualsiasi di tali assi e verifica che questo punto appartiene pure all'asse restante. La distanza comune vale 5.