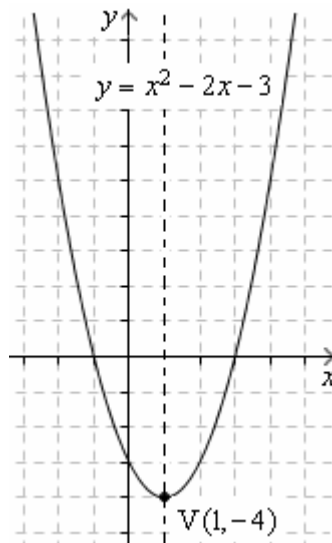


8. FUNZIONI QUADRATICHE: PARABOLE

Parliamo ora delle funzioni “di 2° grado”, o “quadratiche”, la cui equazione è della forma $y = ax^2 + bx + c$

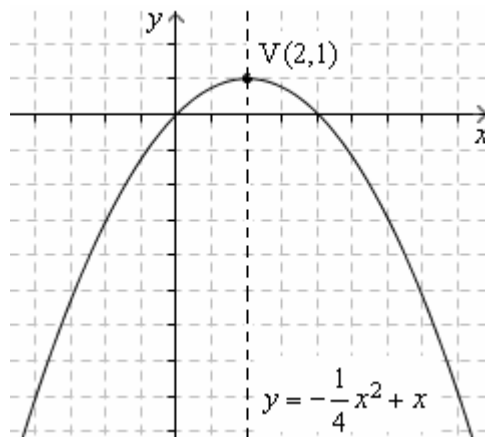
x	$y = x^2 - 2x - 3$
-3	12
-2	5
-1	0
0	-3
$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{4} = -4 + \frac{1}{4}$
1	-4
$\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{4} = -4 + \frac{1}{4}$
2	-3
3	0
4	5
5	12



Disegnando questa curva per punti, ci si rende conto che essa presenta una simmetria “assiale”, cioè una simmetria rispetto a una retta (tratteggiata nella figura). La presenza di un asse di simmetria consente di tracciare il grafico con più facilità: calcolate le coordinate di un punto, dopo averlo disegnato possiamo immediatamente disegnare anche un altro punto, quello che è simmetrico del primo rispetto all’asse.

Abbiamo indicato con V (“V” di “vertice”) il punto di ordinata minima del grafico.

x	$y = -\frac{1}{4}x^2 + x$
-2	-3
-1	-1,25
0	0
1	0,75
2	1
3	0,75
4	0
5	-1,25
6	-3



Questa seconda curva è “capovolta” rispetto alla precedente; inoltre la sua “curvatura” è meno accentuata. Entrambe le circostanze sono legate al coefficiente del termine di 2° grado nelle rispettive equazioni, come è spiegato più avanti.

Il vertice in questo caso è il punto di ordinata massima.

Una funzione di 2° grado $y = ax^2 + bx + c$ ha come grafico una “parabola”.

- ♥ Il **segno del coefficiente a** determina l’orientamento della “**concavità**” ovvero della “parte cava”:
 - $a > 0$: **concavità rivolta verso l’alto** \cup
 - $a < 0$: **concavità rivolta verso il basso** \cap
- ♥ Il **valore assoluto di a** si dice “**apertura**” perché è in relazione col fatto che la **curvatura** della parabola
 - sia più “dolce” (valori di $|a|$ piccoli)
 - o sia più accentuata (valori di $|a|$ grandi)

Si dimostra che l’**ascissa del “vertice”** (che possiamo provvisoriamente descrivere come il punto della parabola avente ordinata minima oppure massima, o anche come l’intersezione della parabola col proprio asse di simmetria) è calcolabile tramite la formula

$$♥ \quad x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Trovata con questo calcolo l’ascissa del vertice, la rispettiva ordinata si potrà determinare facilmente: basterà semplicemente sostituire, nell’equazione della parabola, al posto di x il valore trovato.

Ad esempio, nel caso della parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$,

il calcolo fornisce: $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$ da cui successivamente $y_v = x_v^2 - 2x_v - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

- ♥ L’**individuazione del vertice** è la **prima cosa** che conviene fare, quando si vuole disegnare una parabola, come d’altronde il tracciamento dell’**asse di simmetria**, che è poi la retta verticale passante per il vertice, ossia la retta formata dai punti di ascissa $x = -\frac{b}{2a}$ (brevemente: la retta di equazione $x = -\frac{b}{2a}$).

Un ultimo esempio.

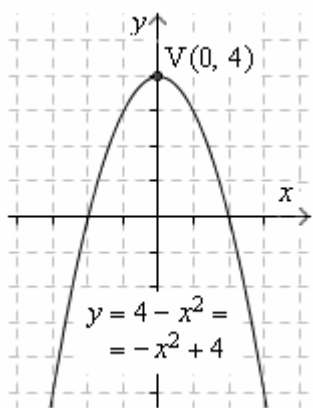
$y = 4 - x^2$ si può riscrivere come $y = -x^2 + 4$.

E' dunque $b = 0$, quindi anche $x_V = -\frac{b}{2a} = 0$.

Ma se il vertice ha ascissa 0, esso si troverà sull'asse delle y , che sarà perciò l'asse di simmetria per la curva.

D'altronde, che la curva fosse simmetrica rispetto all'asse y lo si poteva capire pure dal fatto che, non essendoci il termine contenente x ma solo il termine con x^2 e il termine noto, dando a x due valori opposti si ottiene sempre lo stesso valore di y !

x	$y = 4 - x^2$
-3	-5
-2	0
-1	3
$-\frac{1}{2}$	$4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$
0	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
1	3
2	0
3	-5



9. FUNZIONI DELLA PROPORZIONALITA' INVERSA: IPERBOLI

Una funzione della forma $y = k/x$, con k costante, è detta "funzione della proporzionalità inversa", perché le due variabili in gioco, x e y , sono inversamente proporzionali:

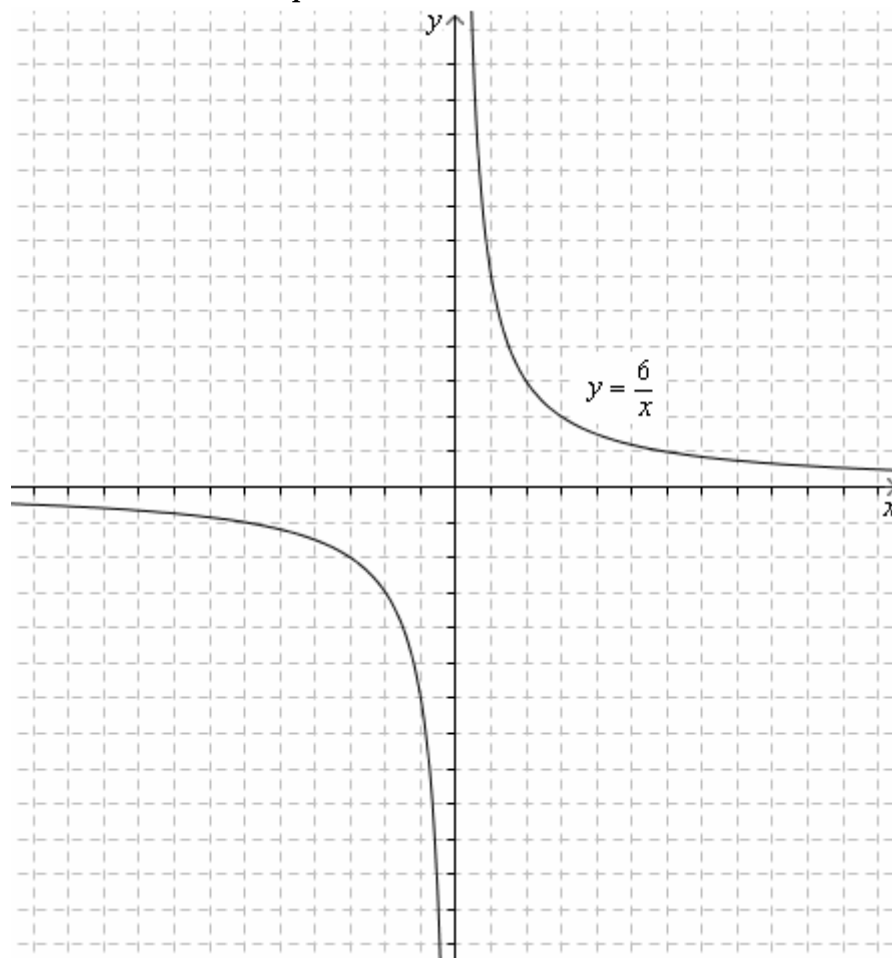
se x raddoppia, y si dimezza; se x triplica, y si riduce alla terza parte; ecc. ecc.

Tracciamo ad esempio il grafico della funzione $y = 6/x$.

Otterremo un'armoniosa curva in due rami, della quale una caratteristica che balza subito in evidenza è la simmetria "centrale", dove il centro di simmetria è l'origine del riferimento cartesiano.

Si potrebbe dimostrare che si tratta di una "iperbole".

x	$y = \frac{6}{x}$
-1000	-0,006
-12	-0,5
-6	-1
-5	-1,2
-4	-1,5
-3	-2
-2	-3
-1	-6
-0,5	-12
-0,1	-60
-0,001	-6000
0,001	6000
0,1	60
0,5	12
1	6
2	3
3	2
4	1,5
5	1,2
6	1
12	0,5
1000	0,006
1000000	0,000006



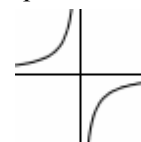
In questo esempio è $k > 0$ e la curva sta nel 1° e 3° quadrante; se invece fosse $k < 0$, come nei casi

$$y = -\frac{2}{x} = \frac{-2}{x}$$

oppure

$$y = -\frac{7}{4x} = \frac{-7}{4x}$$

la curva andrebbe ad occupare il 2° e 4° quadrante:



- Quando x diventa grande grande ($x = 1000, x = 1000000, \dots$), y diventa piccola piccola, "si schiaccia a zero"
- Quando x si avvicina a 0 da destra, ossia "per valori positivi", la y corrispondente tende a $+\infty$
- Quando x si avvicina a 0 da sinistra, ossia "per valori negativi", la y corrispondente tende a $-\infty$
- Quando x tende a $-\infty$, la y corrispondente tende a 0 dal basso, per valori negativi

Le definizioni rigorose di "parabola" e "iperbole" sono riportate in un bellissimo capitolo del Volume 2.

ESERCIZI Traccia i grafici di: a) $y = x^2 + 4x$ b) $y = x^2 - x - 6$ c) $y = -x^2$ d) $y = 3x^2 - 9$ e) $y = \frac{1}{10}x^2$ f) $y = \frac{4}{x}$ g) $y = -\frac{2}{x}$ h) $y = \frac{1}{x}$