

3. PREDICATI

Si dice "predicato" un'affermazione che si fa riguardo a uno, due o più "argomenti", che possono essere oggetti concreti, oggetti astratti, persone.

Esempi:

- ... è femmina (predicato monoargomentale)
- ... è padre di ... (predicato biargomentale)
- ... e ... sono primi fra loro (predicato biargomentale)
- ... * ... = ... + ... (predicato a quattro argomenti)

Un predicato monoargomentale definisce un sottoinsieme

(di un dato "insieme ambiente", o "insieme universo");

un predicato biargomentale definisce una relazione

(fra due dati insiemi, presi in un certo ordine).

4. PROPRIETA' DI UNA RELAZIONE INTERNA AD UN INSIEME

Una relazione R in un insieme A

(importante: **stiamo parlando di una relazione INTERNA ad un insieme; insomma, stiamo supponendo che l'insieme di partenza coincida con l'insieme di arrivo**)
può godere delle proprietà seguenti:

RIFLESSIVA, quando ogni elemento di A è in relazione R con sé stesso: $\boxed{\forall x \in A, x R x}$

Esempi:

- ... è divisore di ... (nell'insieme \mathbb{N}^* dei numeri naturali non nulli)
- $x R y \Leftrightarrow |x| = |y|$ (in \mathbb{Z} , oppure in \mathbb{Q} , oppure in \mathbb{R})

ANTIRIFLESSIVA, quando nessun elemento di A è in relazione R con sé stesso:

$$\boxed{\nexists x \in A / x R x} \quad \text{oppure} \quad \boxed{\forall x \in A, x \not R x}$$

Esempio:

- ... è perpendicolare a ... (nell'insieme delle rette di un piano)

SIMMETRICA, quando, qualunque siano gli elementi x, y dell'insieme A,
ogni volta che $x R y$, è anche $y R x$:

$$\boxed{\forall x, y \in A, x R y \Rightarrow y R x}$$

Esempi:

- ... è perpendicolare a ... (nell'insieme delle rette di un piano)
- ... ha lo stesso padre di ... (in un insieme di persone)

ANTISIMMETRICA, quando, nel caso si abbia $x R y$ e $y R x$, ne consegue che $x = y$:

$$\boxed{\forall x, \forall y, x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y}$$

Osserviamo che una relazione è considerata antisimmetrica pure nel caso in cui l'impossibilità di trovare un controesempio che dimostri la falsità della proposizione nel riquadro, è dovuta al fatto che non risulta mai contemporaneamente $x R y$ e $y R x$; in altre parole, quando $x R y \Rightarrow y \not R x$. In definitiva: le relazioni antisimmetriche sono tutte e sole quelle il cui diagramma a frecce, con l'insieme rappresentato una sola volta, può portare o non portare bucce, ma comunque non porta nessuna "freccia a due punte".

Esempi:

- ... \leq ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato, ad esempio \mathbb{Z})
- ... è figlio di ... (in un insieme di persone)

TRANSITIVA, quando, ogni volta che $x R y$ e $y R z$, si ha pure $x R z$:

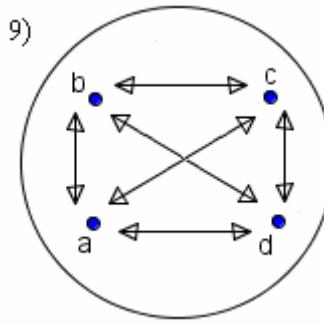
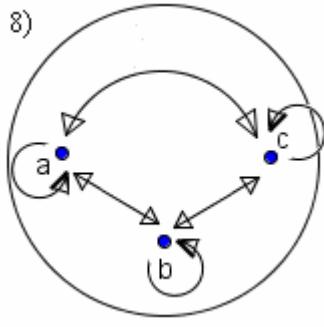
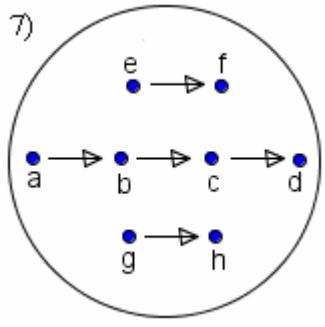
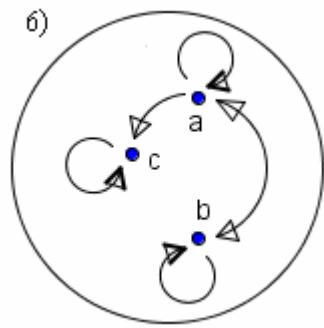
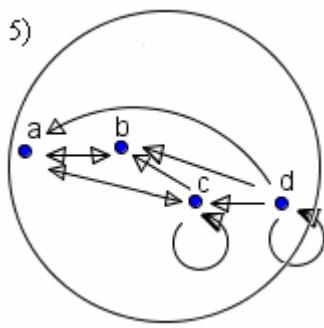
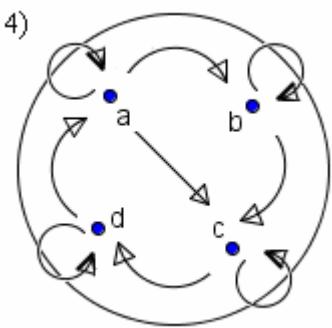
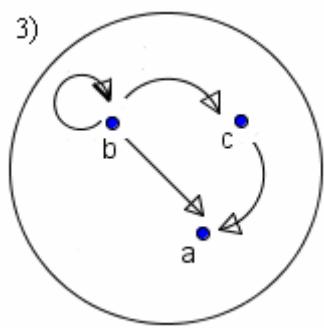
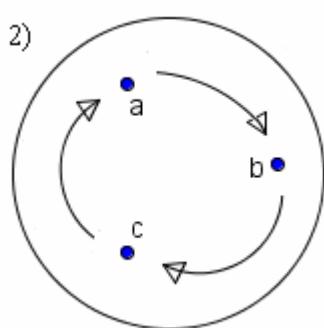
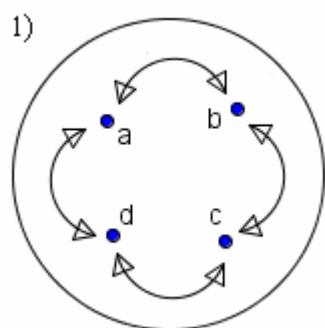
$$\boxed{\forall x, \forall y, \forall z, x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z}$$

Esempio

- ... pesa di più rispetto a ... (in un insieme di persone)

ESERCIZI (risposte alla fine del capitolo, pag. 484)

Considera le relazioni rappresentate in figura ed elenca per ciascuna le proprietà di cui gode.

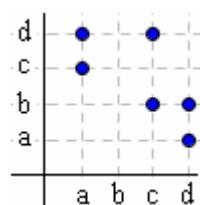
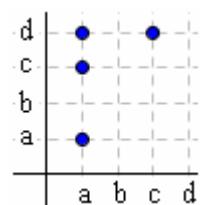
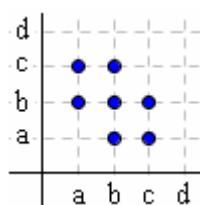
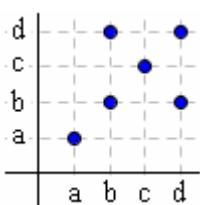


Considera le relazioni seguenti ed elenca per ciascuna le proprietà di cui gode.

- 10) ... è divisore di ... (in $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$)
- 11) ... è primo con ... (in $\mathbb{N} - \{0,1\}$) [Due interi sono detti "primi fra loro" quando il loro M.C.D. è 1].
- 12) ... < ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato)
- 13) ... \leq ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato)
- 14) ... = ... (in un qualsivoglia insieme numerico fissato)
- 15) ... è nato nello stesso anno di ... (in un determinato insieme di persone)
- 16) ... è perpendicolare a ... (nell'insieme delle rette di un piano)
- 17) ... ha almeno un punto in comune con ... (nell'insieme delle rette di un piano)
- 18) $x R y$ se e solo se esiste un numero naturale n tale che $x^n = y$ (in \mathbb{N}^*)
- 19) $x R y$ se e solo se $x + y$ è intero (in \mathbb{Q})
- 20) ... ama ... in $\{a, b, c\}$ qualora: a ami b e viceversa, b ami c non ricambiato, a e c non si amano
- 21) ... confina con ... nell'insieme degli Stati europei.

22)

Le relazioni
I), II), III), IV)
qui raffigurate,
di quali proprietà godono?



I)

II)

III)

IV)