5. RELAZIONI DI EQUIVALENZA

Una relazione R interna ad un insieme A si dice DI EQUIVALENZA
se gode delle tre proprietà: RIFLESSIVA, SIMMETRICA e TRANSITIVA.

ESEMPI

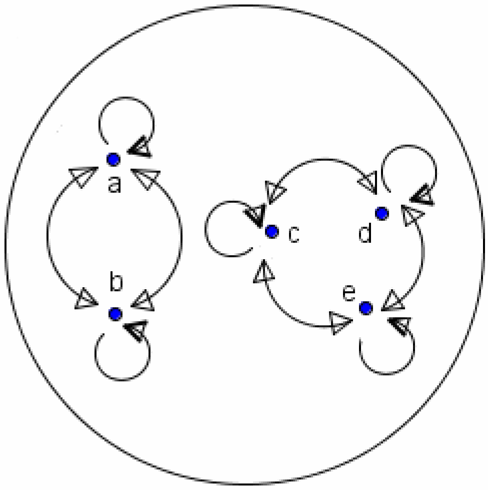
- **... è nato nello stesso anno di ...** (in un dato insieme di persone)
- **... è parallela a ...** nell'insieme delle rette di un piano,
  se intendiamo che ogni retta possa considerarsi parallela a sé stessa,
  ossia se adottiamo la definizione (definizione “estesa” di parallelismo):
  "date due rette complanari *r* ed *s*, *r* si dice parallela ad *s*
  se *r* ed *s* non hanno nessun punto comune, *oppure* ne hanno infiniti"

La relazione rappresentata dal diagramma a frecce qui a destra è:

1) *riflessiva* (ogni elemento ha una “buccola”, è in relazione con sé stesso),
2) *simmetrica* (ogni freccia ha la punta in ambo i versi)
3) e *transitiva* (se c’è una freccia da *x* verso *y*, e un’altra da *y* verso *z*, c’è sempre anche la freccia da *x* verso *z*)

quindi è una *relazione di equivalenza*.

Anticipando quanto vedremo nel prossimo paragrafo, si hanno qui due “*classi di equivalenza*”, che sono:
{a, b} e {c, d, e}



6. CLASSI DI EQUIVALENZA E DEFINIZIONE DI UN CONCETTO MATEMATICO PER ASTRAZIONE

Sia A un insieme in cui sia definita una relazione R di equivalenza:
allora A risulta suddiviso in tanti sottoinsiemi a due a due disgiunti,
ciascuno costituito da elementi tutti equivalenti fra loro.
Tali sottoinsiemi di A si dicono "classi di equivalenza".

Ad esempio, la relazione “... è parallela a ...”
suddivide l'insieme delle rette di un piano in infiniti sottoinsiemi,
ciascuno dei quali è formato da tutte e sole le rette che sono parallele ad una retta assegnata.
In questo esempio, possiamo dire che ogni classe di equivalenza
definisce, individua, rappresenta, una ben determinata "direzione".

Il concetto di "direzione" può anzi essere pensato proprio come
"quell'entità astratta che è comune a tutte e sole le rette di una data classe di equivalenza"
(ossia: **a tutte e sole le rette che sono parallele ad una retta data**).

Si capisce quindi come
il concetto di "ripartizione di un insieme in classi di equivalenza" costituisca, in Matematica,
uno strumento utile per formulare definizioni di concetti "PER ASTRAZIONE".

ESERCIZI (risposte a pag. 484)

1) Considera, nell’insieme dei poligoni in un piano fissato, la relazione
   $x \, \mathrm{R} \, y \Leftrightarrow$ *x ha lo stesso numero di lati di y*
   e verifica che si tratta di una relazione di equivalenza. Quali sono le classi di equivalenza?

2) Considera la relazione
   $x \, \mathrm{R} \, y \Leftrightarrow$ *la differenza fra il numero indicato con x e il numero indicato con y è* 0
   nell’insieme di simboli $\left\{0,\overline{3};\ 0,\overline{5};\ 0,5;\ \frac{1}{2};\ \frac{5}{9};\ \frac{1}{3};\ 3^{-1}\right\}$,
   e verifica che si tratta di una relazione di equivalenza.
   Disegna un diagramma di Venn che raffiguri l’insieme universo,
   ed evidenzia le sue classi di equivalenza.

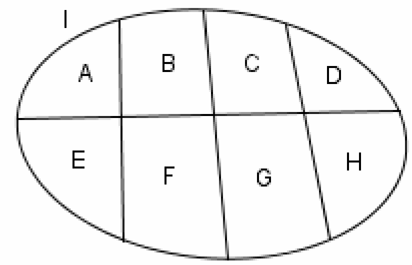
7. INSIEME QUOZIENTE

**Sia R una relazione di equivalenza definita su di un insieme A.
L'insieme delle classi di equivalenza determinate in A da R
viene detto "insieme quoziente" ed indicato col simbolo A/R.**

8. PARTIZIONE DI UN INSIEME

Una famiglia di sottoinsiemi di un dato insieme I viene chiamata una "partizione" di I se:

- **a. nessuno fra gli insiemi della famiglia è vuoto**
- **b. gli insiemi della famiglia sono a due a due disgiunti (= a intersezione vuota)**
- **c. l'unione di tutti gli insiemi della famiglia è l'intero insieme I (= la famiglia "ricopre" I).**



Una partizione
di un insieme I
in 8 sottoinsiemi

Se su di un certo insieme I è **data una relazione di equivalenza**,
prese due qualsiasi classi di equivalenza distinte, esse sono disgiunte:
infatti, se per assurdo avessero un elemento in comune, coinciderebbero!

**Inoltre, nessuna classe di equivalenza è vuota,
e l'unione di tutte le classi di equivalenza dà l'insieme I**.

**Le classi di equivalenza generate da una relazione di equivalenza R costituiscono pertanto
una "partizione" di I** (in altre parole: l'insieme quoziente I/R è una "partizione" di I).

ESEMPIO: la quaterna di insiemi
F_1 = { femmine minorenni della tua città }, M_1 = { maschi minorenni della tua città },
F_2 = { femmine maggiorenni della tua città }, M_2 = { maschi maggiorenni della tua città },
è una partizione dell'insieme C avente per elementi gli abitanti della tua città.

ESERCIZI

3) Considera l'insieme universo costituito dagli studenti della tua classe, e in esso la relazione
$x \text{ R } y \Leftrightarrow x$ *è nato nello stesso mese di* y
Disegna un diagramma di Venn che raffiguri l'insieme universo,
e la sua *partizione* in *classi di equivalenza*.

4) Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, i cui elementi sono le coppie di numeri naturali,
il secondo dei quali non nullo, considera la seguente relazione:
$(a, b) \text{ R } (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.
Dimostra che è di equivalenza. *Correzione* ⇨

NOTA - Confrontiamo le due frasi seguenti:

1) "Si dice DIREZIONE quell'entità astratta, quel *quid*,
che è comune a tutte e sole le rette parallele ad una retta data"

2) "Si dice DIREZIONE l'insieme di tutte e sole le rette parallele ad una retta data"

Quale fra le due definizioni 1), 2) ti sembra più corretta?

Scommetterei che hai optato per la 1), e sono perfettamente d'accordo con la tua scelta.

Contro le aspettative, invece, in Matematica superiore prevale l'uso di esprimere
una definizione "per astrazione" nella forma "brutale" che è esemplificata dalla 2).

Vediamola così:

- dal punto di vista "operativo", la sola definizione che si rivela "efficace" è la 2);
- dal punto di vista "filosofico, concettuale", è evidente che "vince" la 1).

Noi comunque, ogniqualvolta su di un libro di testo troviamo una definizione come la 2),
possiamo benissimo pensare (tanto, nella pratica, non cambierà proprio nulla)
che si tratti di un'abbreviazione della 1).