

9. RELAZIONI D'ORDINE

Si dice che una relazione R interna ad un insieme A è una relazione **D'ORDINE** se gode delle proprietà **ANTISIMMETTRICA** e **TRANSITIVA** (come la relazione $<$ o la relazione \leq in un insieme numerico).

Una relazione d'ordine R in un insieme A si dice poi

- ❑ di **ORDINE STRETTO** se è anche **ANTIRIFLESSIVA**
(= *nessun* elemento è in relazione con sé stesso)
- ❑ di **ORDINE LARGO** se è anche **RIFLESSIVA**
(= *ogni* elemento è in relazione con sé stesso)

Un esempio classico di ordine *stretto* è dato dalla relazione $<$, mentre un esempio classico di ordine *largo* è dato da \leq .

Anzi!

- ❑ Per ricordare meglio sotto quali condizioni una relazione viene detta "di ordine stretto", converrà proprio pensare alla relazione $<$, che è il "prototipo" dell'ordine stretto: essa è appunto caratterizzata dalle proprietà antisimmetrica, transitiva e antiriflessiva.
- ❑ E per ricordare meglio sotto quali condizioni una relazione viene detta "di ordine largo", converrà proprio pensare alla relazione \leq , che è il "prototipo" dell'ordine largo: essa è appunto caratterizzata dalle proprietà antisimmetrica, transitiva e riflessiva.

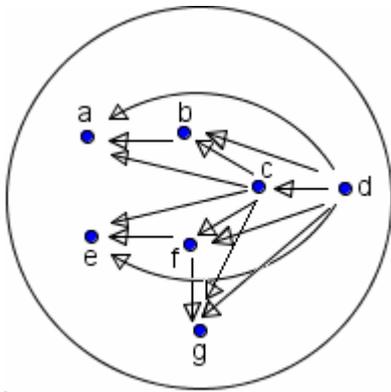
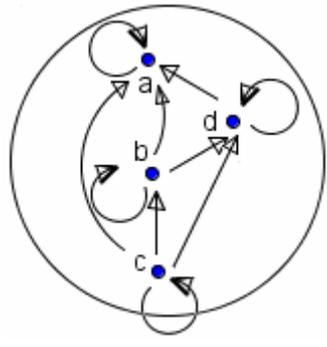
Altri esempi:

- nell'insieme dei cittadini di un dato Comune, la relazione: ... è discendente di ... è di ordine stretto
- nell'insieme delle persone in una "coda", la relazione: ... non sta dietro a ... è di ordine largo.

- ❑ Si dice che una relazione d'ordine (largo o stretto) in un insieme A è un **ORDINE TOTALE** quando, presi due elementi distinti x, y di A , essi sono sempre "confrontabili", sono sempre "in relazione", nel senso che o risulta $x R y$, oppure $y R x$; in questo caso, si dice che A è un insieme "totalmente ordinato" dalla relazione considerata.
- ❑ In caso contrario, cioè se la relazione d'ordine è tale che NON TUTTE le coppie di elementi distinti di A sono "confrontabili", si parla di **ORDINE PARZIALE** e di insieme "parzialmente ordinato".

Esempi:

- Consideriamo l'insieme N^* e in esso la relazione R definita dal predicato: ... è divisore di ... E' facile riconoscere che R è un "ordine largo, parziale".
- Sia dato un insieme E . Consideriamo $P(E)$, ossia: l' "insieme delle parti di E ", l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di E . Ad esempio, se $E = \{ a, b, c \}$, allora $P(E) = \{ \{ \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a, b, c \} \}$. In $P(E)$, la relazione di inclusione \subseteq è di ordine largo, parziale mentre la relazione di "inclusione stretta" \subset è di ordine stretto, parziale.

<p>La relazione in figura, essendo antisimmetrica e transitiva, è di ordine.</p> <p>Essendo pure antiriflessiva, è di ordine stretto.</p>  <p>Non tutti gli elementi sono "confrontabili" (ad esempio e, g non lo sono), quindi l'ordine è parziale.</p> <p>E' come se la relazione stabilisse delle "gerarchie" fra gli elementi dell'insieme.</p>	<p>La relazione rappresentata qui a destra, essendo antisimmetrica e transitiva, è di ordine.</p> <p>Essendo pure riflessiva, è di ordine largo.</p>  <p>Tutti gli elementi sono "confrontabili", quindi l'ordine è totale.</p> <p>Viene stabilita una "lista di precedenze", una "coda": c-b-d-a.</p>
--	---

Se valgono perlomeno le proprietà **riflessiva** e **transitiva** si parla di relazione di **PREORDINE**.

Un preordine può essere

- “totale” se, presi due qualsivoglia elementi, essi risultano sempre “confrontabili”;
- “parziale” se ciò non avviene.

ESERCIZI SULLE RELAZIONI DI EQUIVALENZA E DI ORDINE (risposte a pag. 484)

Fra le seguenti relazioni, alcune sono di equivalenza, altre di ordine, altre né di equivalenza né di ordine.

Stabilisci, per ciascuna relazione, se è di equivalenza o di ordine

(specificando, in quest’ultimo caso, se *stretto* o *largo*, *parziale* o *totale*).

Riconosci anche le eventuali relazioni di “preordine”.

- 1) ... è divisore di ... (in \mathbb{N}^*)
- 2) ... è congruente a ... (nell’insieme dei segmenti nello spazio) [NOTA]
NOTA: due figure si dicono “congruenti” quando è possibile, con un movimento “rigido” (= non deformante) sovrapporre una di esse all’altra, in modo che combacino perfettamente. Anziché dire “congruenti” si può anche dire semplicemente “uguali”: noi, nel presente testo, abbiamo fatto quasi sempre questa scelta.
- 3) ... ha almeno un punto in comune con ... (nell’insieme delle rette di un piano)
- 4) ... $x R y$ se e solo se esiste un numero naturale n tale che $x^n = y$ (in \mathbb{N}^*)
- 5) ... può ricevere ordini da ... (nell’insieme dei militari di una caserma)
- 6) ... sa dove abita ... (nell’insieme degli studenti di una data scuola superiore)
- 7) ... ha vinto più campionati del mondo di calcio di ... (nell’insieme delle nazioni)
- 8) ... ha vinto almeno tanti campionati del mondo di calcio quanto ...
- 9) ... gioca attualmente nella stessa squadra di ... (nell’insieme dei giocatori di un campionato nazionale)
- 10) ... ha giocato almeno una volta nella stessa squadra di ...
- 11) a è in relazione R con b se e solo se la cifra delle unità di a è minore rispetto alla cifra delle unità di b (nell’insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
- 12) La somma delle cifre di x è maggiore della somma delle cifre di y (nell’insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
- 13) La somma delle cifre di x non è inferiore alla somma delle cifre di y (nell’insieme nei numeri naturali con 2 cifre)
- 14) $a R b$ se e solo se a è parallela a b , o in alternativa a è perpendicolare a b (nell’insieme delle rette di un piano fissato)
- 15) $a R b$ se e solo se la differenza fra a e b (s’intende: presa in valore assoluto) è divisibile per 5 (in \mathbb{N})
- 16) “ $x R y$ se e solo se i nomi di battesimo di x e di y non hanno nessuna lettera in comune” (in un insieme fissato di persone)
- 17) “ $x R y$ se e solo se il giudizio di x al termine delle scuole medie è stato più alto del giudizio di y ” (nell’insieme degli alunni di una scuola superiore)
- 18) “ $x R y$ se e solo se l’area di x è inferiore all’area di y ” (nell’insieme delle superfici su di un piano).
- 19) “ $x R y$ se e solo se esiste un numero naturale n tale che $y = x+n$ ” (nell’insieme dei numeri reali positivi)

Dal sito
www.perma-bound.com



*Louisiana State Standards
for Mathematics: Grade 5*

...
In problem-solving
investigations,
students
demonstrate
an understanding of
patterns (= *modelli*),
relations,
and functions
...