10. RIPASSO DEL CONCETTO DI FUNZIONE

Abbiamo già parlato di “funzioni” (alle pagine 430-431, che ti invito a rileggere) stabilendo la seguente

> Definizione - **Si ha una funzione quando si hanno due grandezze variabili, legate fra loro in modo che ad ogni valore di una di esse (variabile indipendente) corrisponde UNO E UN SOLO valore dell’altra (variabile dipendente).**
>
> *Di norma (non sempre!) la variabile indipendente si indica con la lettera x, e la dipendente con y. Inoltre, come avevamo già precisato a pagina 431, alla fin fine non è poi indispensabile che proprio “ad ogni … ” corrisponda un valore; è invece essenziale che quando il valore esiste, esso sia UNICO. Di questo fatto riparleremo anche nelle pagine che seguono.*

Avevamo fatto a proposito diversi esempi, fra i quali quello riguardante il *volume della sfera*:

esso si ottiene applicando la formula $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,

ed evidentemente, siccome ad ogni valore del raggio corrisponde uno e un solo valore del volume, siamo in presenza di una funzione, nella quale il raggio (r) è la var. ind. e il volume (V) è la var. dip.

Se indichiamo la nostra funzione col simbolo f , scriveremo $V=\frac{4}{3}\pi r^3=f(r)$

La scrittura $V=f(r)$ si legge “ V uguale f di r ” e significa: “ho una funzione, che ho indicato col simbolo f , nella quale la var. ind. è stata indicata col simbolo r e la var. dip. col simbolo V ”.

$$\underbrace{V}_{\text{var. dip.}} = \underbrace{f}_{\text{nome della funzione}} (\underbrace{r}_{\text{var. ind.}})$$

E il volume di una sfera di raggio 3 metri è: $f(3)=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 27=36\pi\approx 113{,}1\ m^3$.

11. UNA "FUNZIONE" NON E' ALTRO CHE UN CASO PARTICOLARE DI RELAZIONE (è una relazione fra due insiemi, tale che ad ogni elemento dell'insieme di partenza corrisponde UNO ED UN SOLO elemento dell'insieme di arrivo)

E' giunto ora il momento di GENERALIZZARE il concetto di funzione.

Abbiamo parlato finora di funzione come di legame fra due grandezze variabili, tale che ecc. ecc.,
e poi nel fare gli esempi ci siamo soffermati sulle MISURE di queste grandezze
(misure espresse, ovviamente, da numeri),
cosicché ci siamo abituati a concepire una funzione come una "macchinetta" che,
preso un *numero* (= un elemento dell'insieme $\mathbb{R}$),
fa passare da questo ad un altro *numero* (= ad un altro elemento di $\mathbb{R}$).

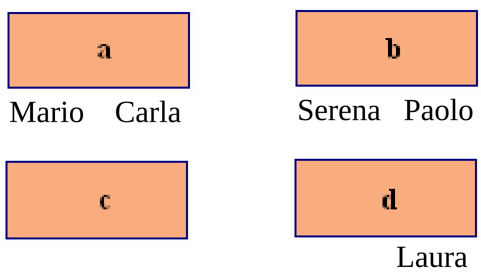
Una funzione, comunque, è una CORRISPONDENZA, una RELAZIONE:
ad ogni numero ne fa corrispondere un altro;
anzi, per la precisione, ad ogni numero fa corrispondere UNO ED UN SOLO altro numero.

Ora, se noi *lasciamo cadere la restrizione* che una funzione possa operare soltanto su numeri,
e invece ammettiamo che nella "macchinetta" possano entrare, e da essa uscire,
oggetti di natura QUALSIASI, perverremo alla seguente definizione più generale di funzione:

> **Definizione** (**definizione GENERALE di** "**funzione**"):
>
> **si dice "FUNZIONE", o "APPLICAZIONE",**
> **una relazione di un insieme A verso un insieme B,**
> **tale che ad ogni elemento di A corrisponde UNO ED UN SOLO elemento di B**
> **(= tale che ogni elemento di A ha una e una sola immagine).**
>
> Con riferimento ai diagrammi a frecce, le funzioni sono quelle relazioni tali che
> da ogni elemento dell'insieme di partenza A parte **una e una sola** freccia.

ESEMPIO

1) In un'aula scolastica, ci sono alcuni banchi, che indicheremo con a, b, c, d. La piantina qui a fianco illustra la disposizione degli alunni su questi banchi, nel corso di una certa ora di lezione (corso di recupero):

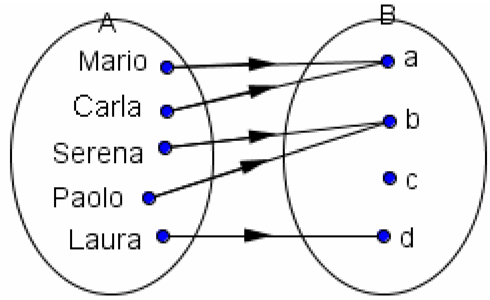


Ad ogni alunno corrisponde un banco (uno e un solo banco).

In questa situazione, possiamo pensare ad una corrispondenza, una relazione, un legame, dall'insieme di partenza A degli alunni A = {Mario, Carla, Serena, Paolo, Laura}

all'insieme di arrivo B dei banchi: B = {a, b, c, d}.

Il diagramma a frecce della relazione mostra che da ogni elemento dell'insieme A parte UNA E UNA SOLA freccia.



Questa relazione di A verso B è, dunque, una FUNZIONE,
per indicare la quale si impiega generalmente, anche se non sempre,
una lettera dell'alfabeto, di norma minuscola: noi qui sceglieremo il simbolo *f*.

Sono in uso le seguenti scritture:

$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ (la funzione *f* ha come insieme di partenza A e come insieme di arrivo B)

$f : \mathit{Mario} \to \mathrm{a}$ (la funzione *f* associa all'alunno Mario il banco a, l'immagine di Mario è a)

$\mathrm{a} = f(\mathit{Mario})$ ("a uguale a *f* di Mario": a è l'immagine, attraverso la funzione *f*, di Mario)

Se decidiamo di usare la lettera *x* per indicare un generico alunno (" l'alunno *x* ")
e la lettera *y* per indicare un generico banco (" il banco *y* "),
la *x* giocherà il ruolo di "variabile indipendente", la *y* sarà invece la "variabile dipendente".
Insomma:
x può valere "Mario", oppure "Carla", ecc.;
per ogni valore di *x*, ci interessa andare a vedere qual è il corrispondente valore di *y*,
e, ad esempio, se x = Serena, allora y = b.
Il valore di *y* DIPENDE dal valore che abbiamo attribuito a *x*.

$f : x \to y$ ("*f* *fa passare da x a y*")

$y = f(x)$ (*leggi* : "*y uguale f di x*", *con lo stesso significato della scrittura precedente*)

$$\boxed{y} = \boxed{f}\left(\boxed{x}\right)$$

$\boxed{y}$	=	$\boxed{f}$	$(\boxed{x})$
nome della var. dip.		nome della funzione	nome della var. ind.

ALTRI ESEMPI

2) Sia $\mathrm{P} = \{$parole della lingua italiana$\}$

Ad ogni parola della lingua italiana, possiamo associare il numero delle lettere di cui è composta.
Abbiamo così una corrispondenza fra l'insieme P e l'insieme $\mathbb{N}*$.
Questa corrispondenza è, ovviamente, una FUNZIONE,
perché ad ogni parola corrisponde uno ed un solo numero naturale non nullo.

Detta *h* questa funzione, avremo:

$h : \mathrm{P} \to \mathbb{N}*$

e, ad esempio,

$h : "\mathit{arancia}" \to 7$

o, con notazione più frequentemente utilizzata,

$h("\mathit{arancia}") = 7$

ecc. ecc.

Detta p una generica parola italiana, e indicato con *n* il numero naturale corrispondente,
potremo scrivere $h : p \to n$ o anche $n = h(p)$

La scrittura $h : p \to n$, o la sua equivalente (più usata) $n = h(p)$, significa dunque:
ho una funzione, che ho chiamato *h*, che opera sulla variabile indipendente *p*
e ad ogni valore di *p* fa corrispondere uno e un solo valore della variabile dipendente *n*.

3) Sia I l'insieme delle circonferenze di un piano, J l'insieme dei punti di quel piano.
La corrispondenza g che ad ogni circonferenza associa il rispettivo centro è, ovviamente, una funzione:

$g : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$