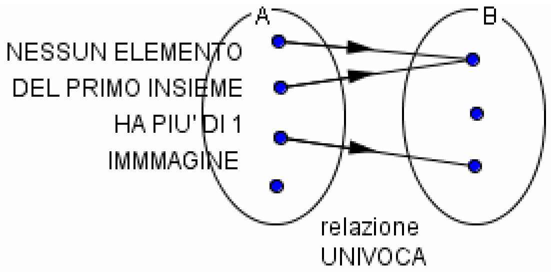
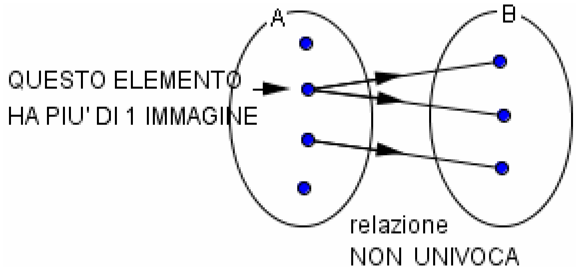
12. TERMINOLOGIA SULLE RELAZIONI E SULLE FUNZIONI

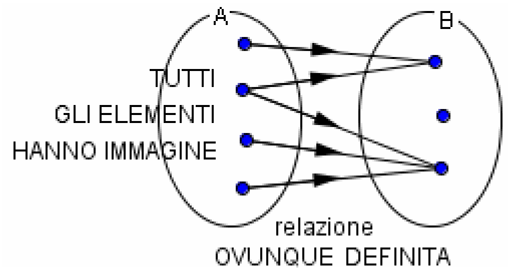
Sinonimo di "relazione" è "**corrispondenza**".

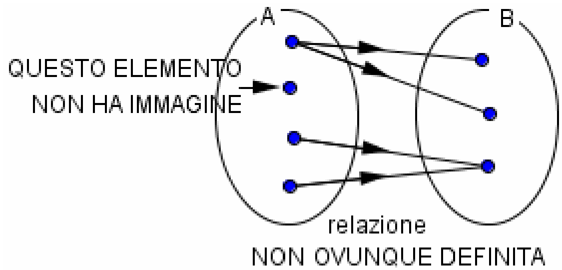
- **Una relazione di A in B si dice "UNIVOCA"** (alcuni testi dicono: "funzionale")
  se ad un elemento di A non corrisponde mai più di un elemento di B; ossia:
  - se da ogni elemento di A parte al massimo una freccia
  - se ogni elemento di A ha al massimo una immagine
  - se non c'è nessun elemento di A da cui parta più di una freccia
  - se non c'è nessun elemento di A che abbia più di una immagine.





- **Una relazione di A in B si dice "OVUNQUE DEFINITA"**
  se ad ogni elemento di A corrisponde almeno un elemento di B; ovvero
  - se da ogni elemento di A parte almeno una freccia
  - se ogni elemento di A ha almeno una immagine
  - se il dominio della relazione coincide con l'insieme di partenza A.





Possiamo perciò riformulare la definizione di "funzione" come segue:
Definizione - Si dice "FUNZIONE" (o "applicazione") una RELAZIONE che sia UNIVOCA e (ma vedi la PRECISAZIONE IMPORTANTE qui sotto) OVUNQUE DEFINITA

PRECISAZIONE IMPORTANTE

C' è da chiarire subito una questione che potrebbe essere fonte di parecchi equivoci.
Consideriamo, ad esempio, la relazione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ seguente:
ad ogni numero reale x facciamo corrispondere il suo reciproco $1/x$.
In base a quanto abbiamo detto, si dovrebbe affermare che questa relazione non è una funzione, perché, sebbene sia univoca, NON è ovunque definita: infatti, lo 0 non ha reciproco.
In casi come questo, invece, di solito si fa così: si *restringe l'insieme di partenza*, fino a farlo coincidere con il dominio, e si dice che si ha una funzione. … La cosa è un po' strana …
… D'altra parte, certe usanze si sono ormai consolidate storicamente, e a questo punto bisogna accettarle.
La corrispondenza che associa al numero x il numero $1/x$
sarà allora considerata una funzione, di dominio $\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$.
In definitiva, riassumendo:

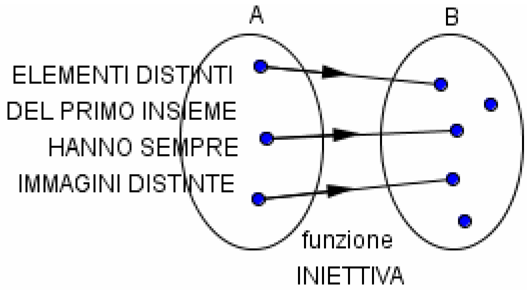
… nella pratica, UNA RELAZIONE UNIVOCA, ANCHE SE NON È OVUNQUE DEFINITA, VIENE UGUALMENTE CONSIDERATA UNA FUNZIONE; infatti, si finisce sempre per RESTRINGERE L'INSIEME DI PARTENZA, FACENDOLO COINCIDERE CON IL DOMINIO.

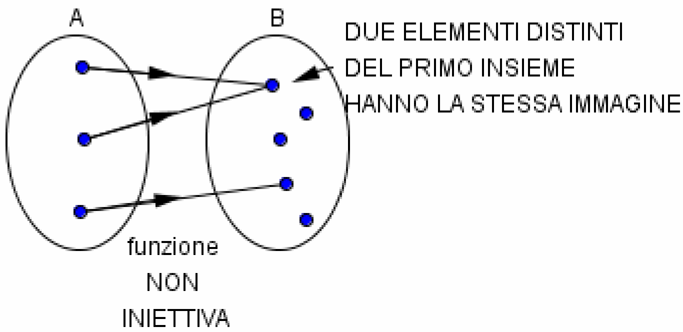
- Altro esempio:
  prendiamo come insieme di partenza $\mathbb{N}$, come insieme di arrivo ancora $\mathbb{N}$.
  La relazione che associa ad un numero naturale n il numero $n-7$
  ha come dominio l'insieme dei numeri naturali maggiori o uguali a 7
  (perché se fosse $n<7$, il numero $n-7$ NON apparterrebbe all'insieme di arrivo $\mathbb{N}$).
  Spontaneamente, restringiamo subito l'insieme di partenza, facendolo coincidere con il dominio.
  Abbiamo dunque una funzione: $f: \mathrm{A} \to \mathbb{N}$, dove $\mathrm{A}=\{n \in \mathbb{N} / n \geq 7\}$

- Un esempio ancora: $y = g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.
  Questa corrispondenza associa uno ed un solo numero reale
  ad ogni numero reale che non sia né $+1$ né -1.
  Diciamo che è una funzione il cui dominio è $\mathbb{R} - \{+1, -1\}$

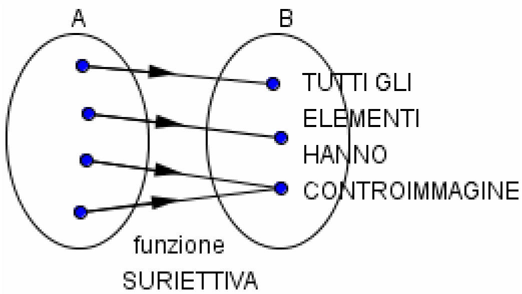
Riguardo ad una funzione ci si può poi domandare se essa è, o non è, "iniettiva" o "suriettiva".
Questi due nuovi termini possono in realtà essere riferiti ad una relazione di natura qualsiasi,
ma sono di solito utilizzati più che altro con le funzioni.

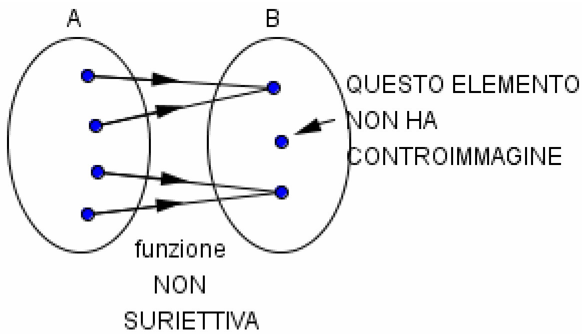
- **Una funzione di A in B si dice "INIETTIVA"**
  se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B; ossia
  - se ogni elemento di B ha al massimo una controimmagine
  - se non c'è nessun elemento di B che abbia più di una controimmagine
  - se non c'è nessun elemento di B a cui arrivi più di una freccia
  - se $\forall a_1, a_2 \in \mathrm{A},\ a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
  - se $\forall a_1, a_2 \in \mathrm{A},\ f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$





- **Una funzione di A in B si dice "SURIETTIVA"**
  se ogni elemento di B ha almeno una controimmagine; ossia,
  - se ad ogni elemento di B arriva almeno una freccia
  - se il codominio della relazione coincide con l'insieme di arrivo B
  - se $\forall b \in \mathrm{B},\ \exists a \in \mathrm{A}\ \textit{tale che}\ b = f(a)$





A VOLTE SI DICE "FUNZIONE" AL POSTO DI DIRE "VARIABILE DIPENDENTE"

Nell'uso comune, capita che la parola "funzione" venga adoperata quando a stretto rigore bisognerebbe invece dire "variabile dipendente". Ad es., può darsi che un testo, di fronte alla funzione $y = f(x) = x^2 + 3$, scriva: "qual è il valore di questa *funzione* per $x = 5$?"
oppure "questa *funzione* tocca il suo valore minimo quando $x = 0$, e tale valore minimo della funzione è 3".

In entrambi questi casi, l'uso della parola "funzione" è un pochettino improprio, perché ci si sta riferendo NON al "*legame*" fra la *x* e la *y*, BENSI' al *valore della y*,
quindi non tanto alla *funzione* quanto alla *variabile dipendente*.

Tuttavia, **è entrata nella prassi comune questa abitudine, di dire sbrigativamente "funzione" anche in casi nei quali per la precisione occorrerebbe in realtà dire "variabile dipendente". Tieni dunque conto di questa questione terminologica.**

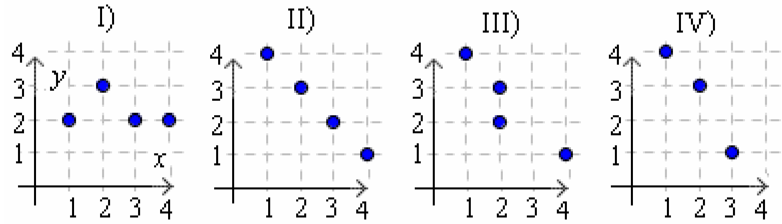
ESERCIZI **(risposte a pag. 484)**

1) Preso $\mathbb{N}^*$ come insieme di partenza, e l'insieme degli allievi di una data classe di Liceo come insieme di arrivo, stabilisci se la relazione che ad un elemento di $\mathbb{N}^*$ fa corrispondere lo studente contraddistinto sul registro da quel numero d'ordine, è una funzione, e in caso affermativo se è iniettiva e se è suriettiva.

2) Preso l'insieme degli allievi di una data classe di Liceo come insieme di partenza, e preso $\mathbb{N}^*$ come insieme di arrivo, stabilisci se la relazione che ad uno studente fa corrispondere il suo numero d'ordine sul registro è una funzione, e in caso affermativo se è iniettiva e se è suriettiva.

3) La relazione che ad ogni regione italiana fa corrispondere l'altezza in metri della montagna più elevata in quella regione, è una funzione?

4) Fra le relazioni qui accanto rappresentate stabilisci quali sono funzioni. Se si tratta di una funzione, stabilisci anche se è iniettiva o suriettiva, se si prende come insieme sia di partenza che di arrivo $I = \{1, 2, 3, 4\}$



5) Se ti chiedono quante sono le possibili funzioni di A in B (= aventi per dominio tutto A e per codominio B) nel caso particolare in cui A abbia 3 elementi e B ne abbia 5, tu cosa rispondi? (*Indicazione: pensa di ordinare gli elementi di* A: 1° *elemento*, 2°, 3°. *Scelgo quale elemento di B far corrispondere al* 1°: *ho … possibilità; per ciascuna di queste possibilità, mi si apre un ventaglio di … possibilità per la scelta dell'elemento di B da abbinare al* 2° *elemento di A; dopodiché …*)

6) Nel caso A contenga 3 elementi e B ne contenga 5, quante sono
I) le funzioni *iniettive* di A in B? II) le funzioni *suriettive* di A in B?

13. RELAZIONE INVERSA DI UNA RELAZIONE DATA; CORRISPONDENZE BIUNIVOCHE

Se R è una relazione di A in B, si dice "**relazione inversa**" della R
quella che inverte il verso di tutte le frecce, e scambia fra loro i due insiemi di partenza e di arrivo: insomma, la relazione R^{-1} di B in A definita nel modo seguente:

$b\,R^{-1}a \overset{def.}{\Leftrightarrow} a\,R\,b \quad (a \in A,\ b \in B)$ NOTA: $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ si legge: "se e solo se, per definizione"

L'inversa di una funzione, in generale, non è una funzione, ma soltanto una relazione. Se invece, data una funzione *f*, l'inversa di *f* è anch'essa una funzione, allora si dice che *f* è "invertibile".

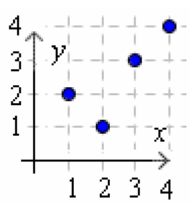
E' chiaro che una funzione, per essere invertibile, deve imprescindibilmente essere **iniettiva**.
Infatti, se *f* non è iniettiva, la relazione inversa di *f* non è univoca e quindi non è una funzione.
Si potrebbe a questo punto ritenere che *f*, per essere invertibile, debba anche essere suriettiva, perché in caso contrario, la relazione inversa non sarebbe "ovunque definita"; tuttavia, sappiamo che pure una relazione che non sia ovunque definita può, nel caso sia univoca, essere considerata una funzione, perché a tale scopo basta restringere opportunamente l'insieme di partenza della relazione stessa (vedi "PRECISAZIONE IMPORTANTE" a pagina 480).

Quindi **il requisito indispensabile affinché una funzione $f: A \to B$ sia invertibile, è che essa sia iniettiva.**

Se **una funzione** $f: A \to B$ (supponiamo qui che l'insieme di partenza A sia il vero e proprio dominio) è **sia iniettiva che suriettiva**, allora diremo che è una
CORRISPONDENZA BIUNIVOCA, o BIIEZIONE, fra i due insiemi A e B.
Perciò

una relazione è una corrispondenza biunivoca (o biiezione) quando ad OGNI elemento dell'insieme di partenza A corrisponde UNO E UN SOLO elemento dell'insieme di arrivo B, E VICEVERSA, come accade con l'insieme A delle asole e l'insieme B dei bottoni di una stessa camicia.

7) La funzione qui a fianco rappresentata, dell'insieme $I = \{1, 2, 3, 4\}$ in sé, è invertibile?



8) Stabilisci quali fra le seguenti funzioni di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sono corrispondenze biunivoche:
a) $n \to n^2$ b) $n \to 2n$ c) $n \to n+2$

9) Stabilisci quali fra le seguenti funzioni di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ sono corrispondenze biunivoche:
a) $x \to x^2$ b) $x \to 2x$ c) $x \to x+2$