PRIMO INCONTRO COI VETTORI

1. DEFINIZIONE DI VETTORE

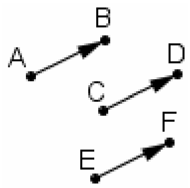
Un **segmento** si dice "**orientato**" quando è specificato quale dei due estremi sia da considerarsi come il "**primo estremo**" e quale come il "**secondo estremo**"; o, il che è lo stesso, quando è specificato quale sia il "**verso di percorrenza**" del segmento stesso.

Ma quand'è che un segmento va pensato "*orientato*" e quando "*non*"?
… Beh, lo si capisce dal contesto; oppure, viene dichiarato in modo esplicito.
In "Chi ha paura della matematica?" l'uso del simbolo $\overline{\mathrm{AB}}$ indica tipicamente un segmento *non* orientato, mentre una scrittura tipo AB può denotare sia un segmento orientato che un segmento non orientato.

Un **SEGMENTO ORIENTATO** è caratterizzato da
1) un "**MODULO**" (in Fisica si dice a volte: "intensità"), che è poi la misura numerica della sua lunghezza
2) una "**DIREZIONE**", che è quella della retta su cui il segmento giace
3) e un "**VERSO**", il suo verso di percorrenza.

Due segmenti orientati si dicono "EQUIPOLLENTI" se hanno:
- **stesso modulo**
- **stessa direzione**
- e **stesso verso**.

Ecco tre segmenti orientati fra loro equipollenti …



L'equipollenza è una relazione di equivalenza (= riflessiva, simmetrica, transitiva) nell'insieme dei segmenti.

Si dice "**VETTORE**" l'**entità astratta** che rappresenta **ciò che hanno in comune tutti i segmenti orientati equipollenti ad uno dato.**

… ed ecco il vettore **v** *ad essi associato*

Si può scrivere
$\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}$

Se due o più segmenti orientati sono equipollenti fra loro, sono dunque "*rappresentanti*" di uno stesso vettore.

Il **MODULO** del vettore **v** si può indicare con v (senza il grassetto), oppure con $|\mathbf{v}|$.

Un "**vettore applicato**" è quell'entità costituita da un punto più un vettore che si immagina "partire" dal punto stesso (figura qui a fianco).

Qui il vettore **v** *è stato APPLICATO nel punto P*

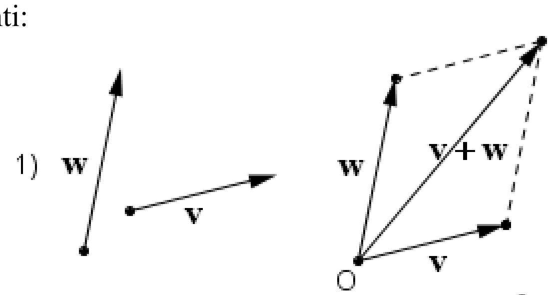
Alcuni testi, **per contrassegnare i vettori**, non utilizzano il grassetto ma il corsivo; altri scrivono una freccia in alto, altri ancora una sottolineatura.
Noi useremo il grassetto, la freccia quando il vettore viene indicato tramite uno dei segmenti orientati che lo definiscono, e per il "vettore nullo" il grassetto con freccia.

Simbologie in uso:
$\mathbf{v}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{v}$, $\underline{\mathbf{v}}$, …

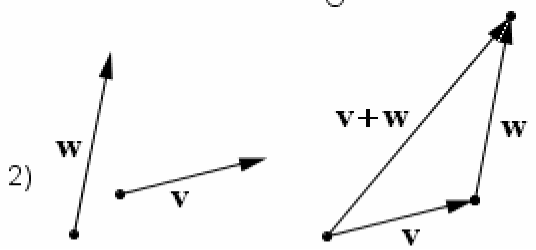
2. SOMMA E DIFFERENZA DI DUE VETTORI; VETTORI COMPONENTI

Si dice "**SOMMA**" di due vettori **v**, **w** il vettore ottenibile in uno qualsiasi dei seguenti due modi alternativi 1) o 2), fra loro equivalenti:

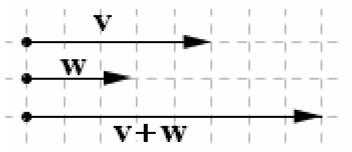
1) ("REGOLA DEL PARALLELOGRAMMO")
applicando **v**, **w** in uno stesso punto O
e prendendo il vettore avente come rappresentante il segmento orientato che parte da O
e termina nel vertice opposto del **parallelogrammo**
che ha come lati consecutivi O**v**, O**w**

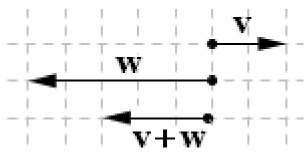


2) **applicando** **v**, **w** "**consecutivamente**",
come illustrato in figura,
e prendendo il vettore avente come rappresentante
il segmento orientato che parte dal primo estremo
del segmento che rappresenta **v**
e termina nel secondo estremo
del segmento che rappresenta **w** .

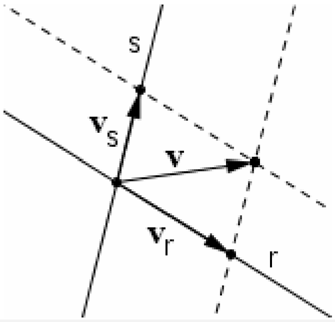


Nelle figure seguenti diamo due esempi di somma fra due vettori che hanno la stessa direzione.
Meglio il metodo 2), in questo caso.
Comunque, in teoria resta valido anche il metodo 1), purché si pensi a un parallelogrammo "degenere".

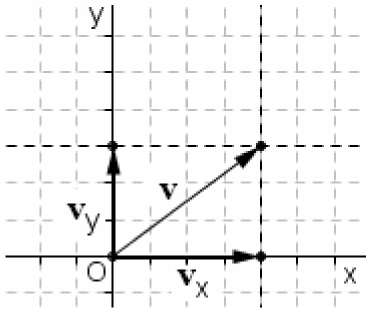




Sovente è richiesto di determinare i "**vettori componenti**" di un vettore dato lungo due certe direzioni.
Si tratta dei due vettori, aventi *quelle* direzioni, la cui somma sia uguale al vettore assegnato.
Essi si possono ricavare tracciando opportune parallele, come negli esempi che seguono:

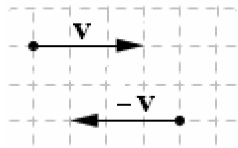


Ecco i due vettori componenti $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{v}_s$ di un vettore $\mathbf{v}$, lungo le direzioni delle due rette r ed s …



… ed ecco i vettori componenti di un vettore lungo le direzioni degli assi di un sistema di riferimento cartesiano.

Due **vettori** si dicono "**OPPOSTI**" se differiscono solo per il verso.
Il vettore opposto di un vettore $\mathbf{v}$ è indicato col simbolo $-\mathbf{v}$.



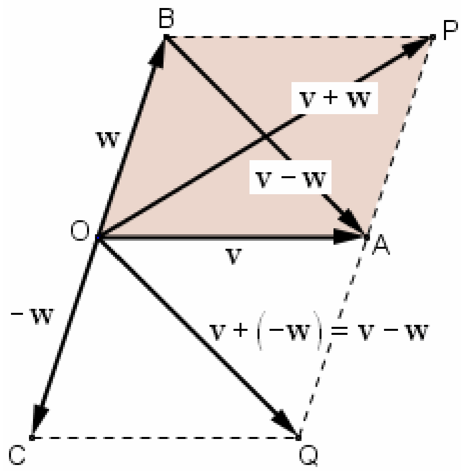
La somma di due vettori opposti è il **VETTORE NULLO** $\vec{\mathbf{0}}$,
(per meglio rimarcarne la natura,
in modo che non si confonda col numero zero,
per indicarlo metteremo sempre la freccia),
che ha
- **modulo nullo**
- **direzione e verso *indeterminati.***

Si dice "**DIFFERENZA**" di due vettori,
la somma del primo con l'opposto del secondo.

$$\mathbf{v}-\mathbf{w}=\mathbf{v}+(-\mathbf{w})$$

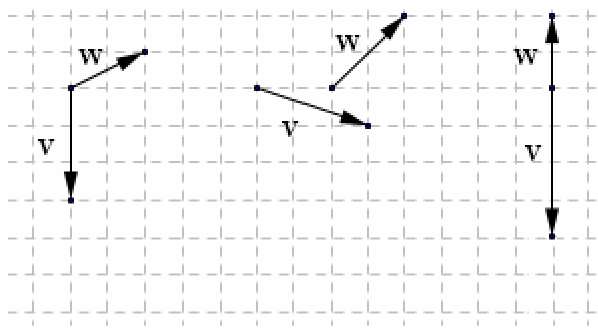
Abbiamo visto che per *sommare* due vettori si può considerare un certo parallelogrammo e una certa sua diagonale;
bene, la *differenza* fra gli stessi vettori
sarà rappresentata dall'*altra* diagonale,
come mostra la figura, nella quale

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{v} \quad \overrightarrow{OB}=\mathbf{w} \quad \overrightarrow{OC}=-\mathbf{w}$$
$$\overrightarrow{OP}=\mathbf{v}+\mathbf{w} \quad \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OQ}=\mathbf{v}+(-\mathbf{w})=\mathbf{v}-\mathbf{w}$$



ESERCIZI (risposte a pagina 489)

1) Esegui prima la somma $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ e poi la differenza $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ delle coppie di vettori in figura.



2) Il modulo della somma di due vettori è uguale alla somma dei loro moduli?
3) La differenza di due vettori è quel vettore che sommato col secondo permetterebbe di riottenere il primo?
4) La somma di due vettori gode della proprietà commutativa?
5) Si può effettuare la sottrazione $\vec{\mathbf{0}}-\mathbf{v}$?

3. GRANDEZZE SCALARI E GRANDEZZE VETTORIALI

Una **GRANDEZZA** si dice "**VETTORIALE**" quando per rappresentarla occorre un **vettore**.

- ESEMPI:
  una forza, o una velocità, o uno spostamento.

Una **GRANDEZZA** si dice invece "**SCALARE**" se per rappresentarla basta un semplice **numero**, e non serve (o non ha senso) un vettore.

- ESEMPI:
  una temperatura, una massa, una distanza, un intervallo di tempo.

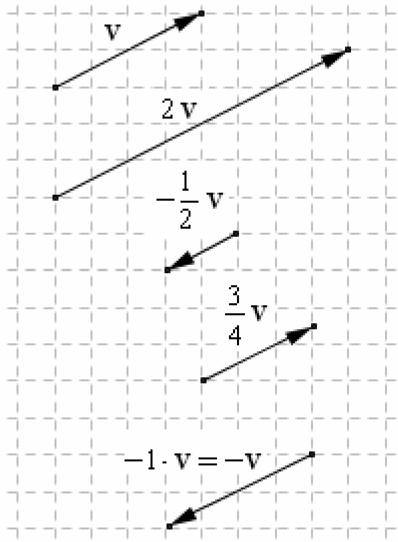
E il *sostantivo* "*scalare*" è impiegato quando si vuole indicare un *numero*, in contrapposizione a "vettore".

4. PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE

Si dice
"**PRODOTTO DI UN VETTORE** $\mathbf{v}$ **PER UNO SCALARE** α"
il vettore che ha:

- modulo uguale al valore assoluto di α per il modulo di $\mathbf{v}$
- stessa direzione di $\mathbf{v}$
- stesso verso di $\mathbf{v}$, se $\alpha > 0$, verso opposto a quello di $\mathbf{v}$ se $\alpha < 0$

Se poi $\alpha = 0$, oppure $\mathbf{v} = \vec{\mathbf{0}}$,
il risultato dell'operazione $\alpha\mathbf{v}$ è il vettore nullo $\vec{\mathbf{0}}$.

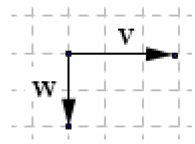


ESERCIZIO (risposte a pagina 489)

6) Considera i due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ in figura, ed esegui le seguenti operazioni:

a) $2\mathbf{v}+3\mathbf{w}$ *b*) $3\mathbf{v}-2\mathbf{w}$ *c*) $\mathbf{v}-\frac{1}{2}\mathbf{w}$ *d*) $\frac{2}{3}(-3\mathbf{v}+\mathbf{w})$

Per questo esercizio, gioverà tener presente che, ad esempio, l'operazione $3\mathbf{v}-2\mathbf{w}$ può essere interpretata come somma $3\mathbf{v}+(-2\mathbf{w})$



PROPRIETA' della somma di vettori e del prodotto di un vettore per uno scalare

Si può osservare, e dimostrare, che qualunque siano i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ e i numeri reali α, β, si ha sempre

$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v}$ (*commutativa*)

$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ (*associativa*)

$(\alpha\beta)\mathbf{v}=\alpha(\beta\mathbf{v})$

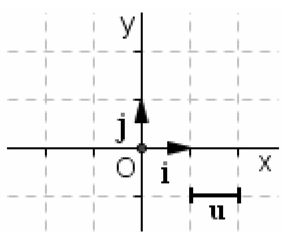
$(\alpha+\beta)\mathbf{v}=\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{v}$ (*distributiva rispetto alla somma di scalari*)

$\alpha(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\alpha\mathbf{v}+\alpha\mathbf{w}$ (*distributiva rispetto alla somma di vettori*)

5. VERSORI; VERSORI DEGLI ASSI CARTESIANI; COMPONENTI CARTESIANE

Si dice **VERSORE** un **vettore che abbia MODULO UGUALE A 1.**

In un riferimento cartesiano ortogonale sul piano, i "versori degli assi" sono i due vettori **i, j** rappresentati nella figura qui a fianco.

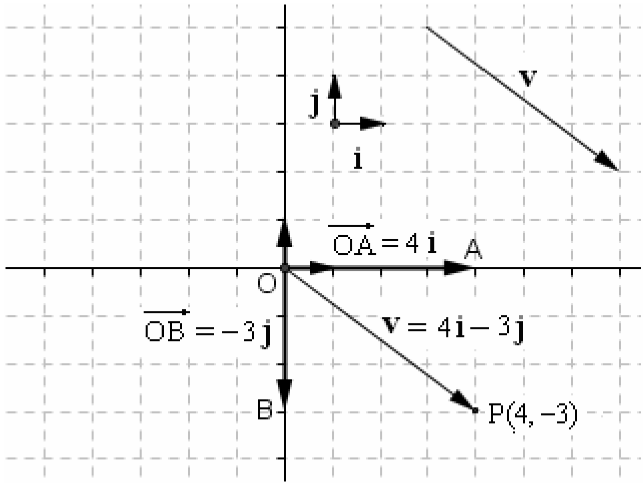


Quando un vettore $\mathbf{v}$
è rappresentato come *combinazione lineare*
dei **VERSORI DEGLI ASSI CARTESIANI**

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$$

i due numeri reali relativi v_x e v_y sono chiamati
"le **COMPONENTI CARTESIANE**" di $\mathbf{v}$.

Si vede facilmente che
le componenti cartesiane di un vettore v coincidono con le coordinate cartesiane del punto che sta all'estremità del vettore stesso, qualora questo venga applicato nell'origine.

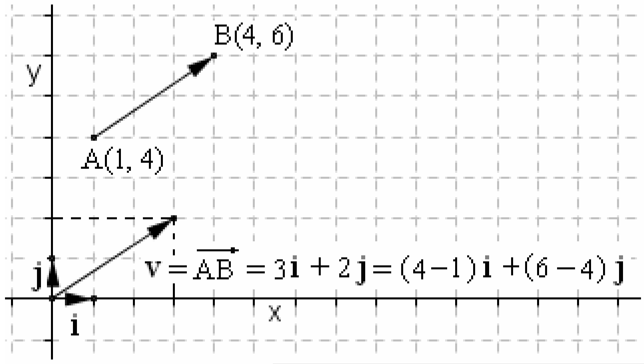


Supponiamo poi di avere un vettore,
rappresentato da un segmento orientato AB
i cui estremi abbiano coordinate

$$A(x_1, y_1) \text{ e } B(x_2, y_2).$$

Allora il vettore $\overrightarrow{AB}$
potrà essere scritto come

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$



Il bello è che le operazioni di somma fra vettori
e di prodotto di un vettore per uno scalare
potranno essere facilmente ricondotte ad *operazioni sulle componenti*.

Infatti, se $\mathbf{v} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = c\,\mathbf{i} + d\,\mathbf{j}$, e se α è uno scalare, avremo:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a + c)\mathbf{i} + (b + d)\mathbf{j} \qquad \alpha\mathbf{v} = \alpha a\,\mathbf{i} + \alpha b\,\mathbf{j}$$

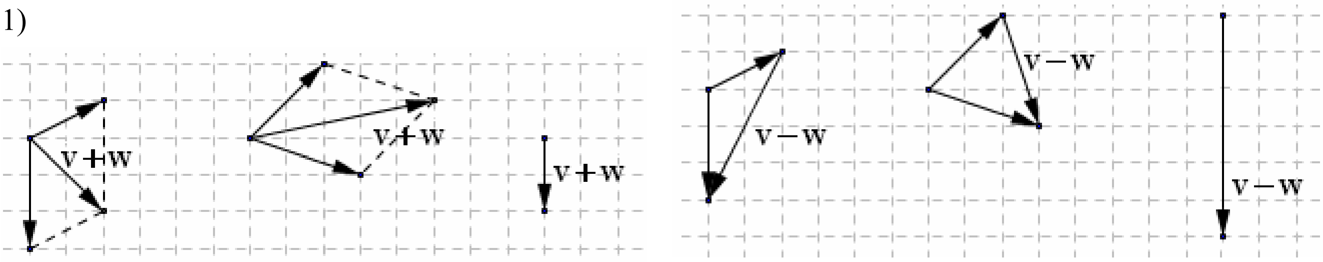
Il **modulo** del vettore $\mathbf{v} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ è poi dato dalla formula

$$\boxed{v = |\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Ad esempio, se
$\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j};\ \mathbf{w} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j}$
sarà:
$\mathbf{v} + \mathbf{w} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
$3\mathbf{v} = -12\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$
$|\mathbf{v}| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

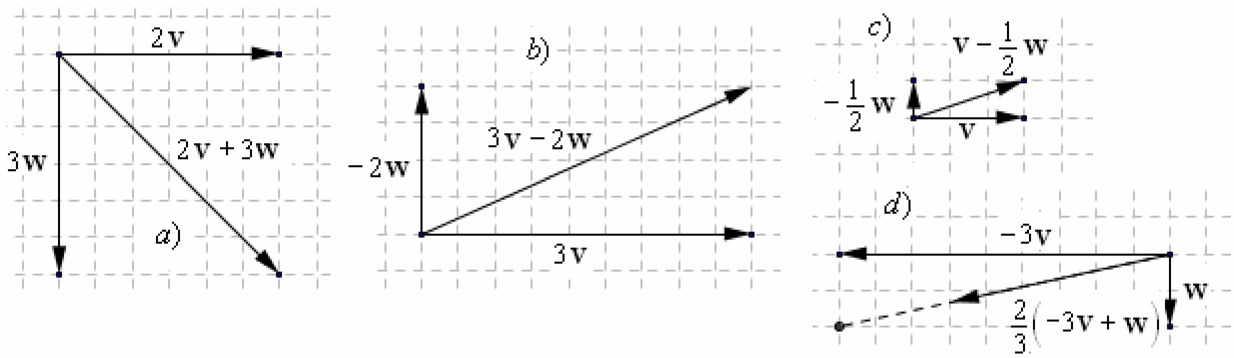
RISPOSTE agli esercizi delle pagg. 487, 488

1)



2) In generale, no! Ciò avviene soltanto nel caso i due vettori abbiano ugual direzione e ugual verso
3) Sì: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}$ se e solo se $\mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$ 4) Sì 5) Sì, e il risultato è il vettore $-\mathbf{v}$

6)



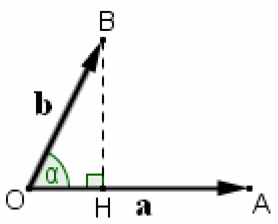
6. PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI

NON deve essere confuso col prodotto di un vettore per uno scalare sopra presentato, che è tutt'altra cosa.

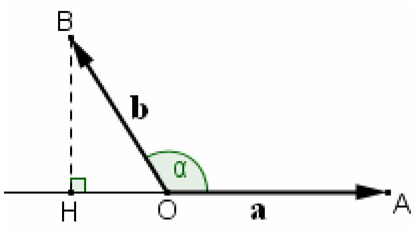
Il prodotto scalare di due vettori è un'operazione che ha per *termini due vettori*, e per *risultato uno scalare*.

Dati due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, si dice "prodotto scalare" fra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e si indica col simbolo $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ (leggi: $\mathbf{a}$ scalare $\mathbf{b}$) lo scalare (= il numero) ottenibile nel modo seguente:
si moltiplica il modulo di $\mathbf{a}$ per la misura con segno del segmento
che si ottiene applicando $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ nello stesso punto e proiettando $\mathbf{b}$ su $\mathbf{a}$;
misura "con segno" nel senso che si prende

- segno positivo (+) se tale proiezione è parzialmente sovrapposta ad $\mathbf{a}$,
- segno negativo (–) se tale proiezione sta sul prolungamento di $\mathbf{a}$ dalla parte del punto di applicazione.



$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathrm{a}\cdot(+\mathrm{OH}) = +\mathrm{a}\cdot\mathrm{OH}$



$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathrm{a}\cdot(-\mathrm{OH}) = -\mathrm{a}\cdot\mathrm{OH}$

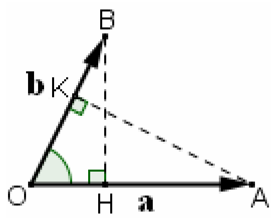
In Fisica, il "lavoro" è definito come il prodotto di uno spostamento per la proiezione (con segno) della forza lungo la direzione dello spostamento. Quindi il "lavoro" W si presta ottimamente a essere definito tramite l'operazione di prodotto scalare:
$W = \mathbf{s}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$
(più sotto metteremo in rilievo che il prodotto scalare è *commutativo*)

Il prodotto scalare di due vettori è quindi

- >0 se l'*angolo* α che i due vettori formano è *acuto*,
- <0 se l'*angolo* α che i due vettori formano è *ottuso*
- $=0$ se i due vettori sono *perpendicolari* $(\alpha = 90°)$

Si potrebbe dimostrare che il valore del prodotto scalare non cambia se scambiamo il ruolo dei due vettori; ossia, se anziché moltiplicare il modulo di $\mathbf{a}$ per la proiezione con segno di $\mathbf{b}$ su $\mathbf{a}$ noi moltiplichiamo invece il modulo di $\mathbf{b}$ per la proiezione con segno di $\mathbf{a}$ su $\mathbf{b}$.

Perciò il prodotto scalare è un'operazione *commutativa*: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$



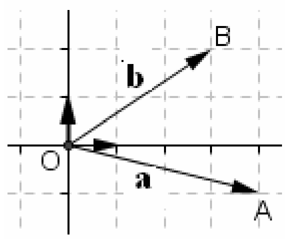
$\mathrm{a}\cdot\mathrm{OH} = \mathrm{b}\cdot\mathrm{OK}$
come si può facilmente dimostrare pensando che i due triangoli OAK e OBH sono simili, quindi vale la proporzione
$\mathrm{OA:OB} = \mathrm{OK:OH}$
da cui appunto
$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OH} = \mathrm{OB}\cdot\mathrm{OK}$

Si potrebbe pure dimostrare (vedi pag. 495, secondo riquadro) che se in un rif. cartesiano ortogonale si ha

$$\mathbf{a} = \mathrm{a}_x\mathbf{i} + \mathrm{a}_y\mathbf{j}$$
$$\mathbf{b} = \mathrm{b}_x\mathbf{i} + \mathrm{b}_y\mathbf{j}$$

allora sarà

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{a}_x\mathrm{b}_x + \mathrm{a}_y\mathrm{b}_y}$$



La figura mostra i due vettori
$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$
$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
Bene, il loro prodotto scalare è
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 4\cdot 3 + (-1)\cdot 2 = 12 - 2 = 10$

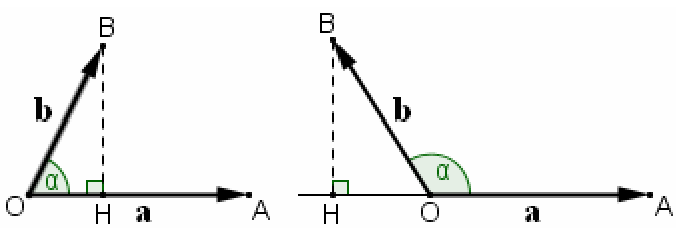
Infine (figura a fianco) la Goniometria insegna che, detto α l'angolo formato dai due vettori, risulta (segno compreso!)

$$\mathrm{OH} = \mathrm{b}\cdot\cos\alpha$$

per cui si ha

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathrm{ab}\,\cos\alpha$$

(il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli, moltiplicato per il "*coseno*" (*cos*) dell'angolo che i due vettori formano).



In entrambi i casi, si ha, compreso il segno,
$\mathrm{OH} = \mathrm{b}\cdot\cos\alpha$.
Per il "*coseno*" di un angolo, vedi Trigonometria sul Vol. 2

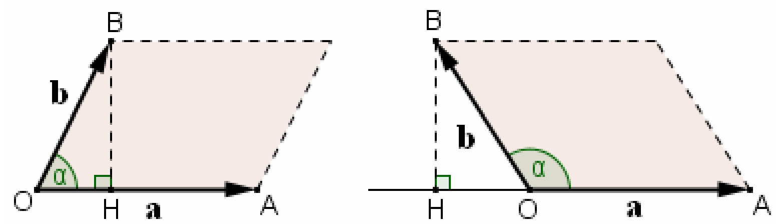
7. PRODOTTO VETTORIALE (O PRODOTTO “ESTERNO”)

Il prodotto “scalare” coinvolgeva la proiezione (con segno) di uno dei due vettori nella direzione dell’altro; il prodotto “vettoriale”, o “esterno”, chiama invece in causa la proiezione di uno dei due vettori nella direzione *perpendicolare* all’altro vettore.

A differenza del prodotto scalare, che dava come risultato uno scalare, il prodotto vettoriale (o “esterno”) di due vettori dà come *risultato ancora un vettore*.
Vediamo.

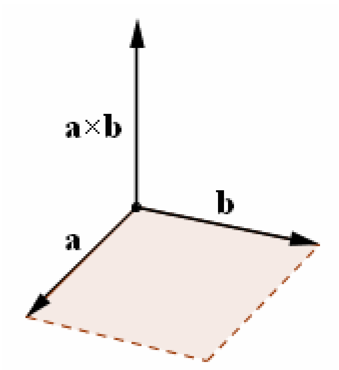
Dati due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, si dice “prodotto vettoriale” fra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$,
e si indica col simbolo $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (si legge: “$\mathbf{a}$ vettoriale $\mathbf{b}$” o “$\mathbf{a}$ vettore $\mathbf{b}$”; alcuni lo scrivono come $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$), il vettore seguente:

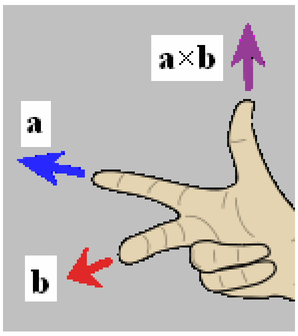
- ha come **modulo** il prodotto del modulo di $\mathbf{a}$
  per la proiezione BH (senza segno) del vettore $\mathbf{b}$ nella direzione perpendicolare ad $\mathbf{a}$;
  si osserva che tale prodotto equivale all’area del parallelogramma individuato dai due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$,
  e che il prodotto vettoriale è *nullo* qualora i due vettori abbiano la *stessa direzione*



$a\cdot \mathrm{BH} = \mathit{area\ \ parallelogrammo}$

- ha **direzione** perpendicolare a quella del *piano* individuato da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$;
- ha un **verso** ottenibile con la cosiddetta “**regola della mano destra**”, illustrata dalla figura qui sotto.





Al prodotto vettoriale è stata assegnata per definizione direzione perpendicolare al piano individuato da $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in maniera che, procedendo a ritroso, dalla direzione di $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ sia possibile risalire al piano che contiene i due vettori; il verso convenzionale dato dalla “right hand rule”, infine, permette, a partire dalla conoscenza di $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, di ricostruire la posizione spaziale di $\mathbf{a}$ rispetto a $\mathbf{b}$.

In Fisica, incontriamo ad esempio il prodotto vettoriale nella definizione di “momento di una forza”.

E’ facile rendersi conto che scambiando l’ordine dei due vettori, il modulo del loro prodotto vettoriale rimane invariato mentre cambia il suo verso.

Perciò il prodotto vettoriale è un’operazione *anticommutativa*: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

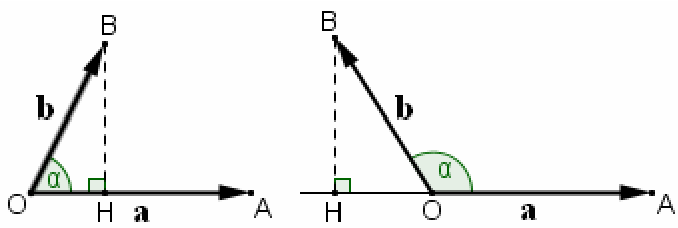
Dalla Goniometria si sa che
(figura a fianco)
detto α l’angolo formato dai due vettori,
risulta (segno compreso!)

$$\mathrm{BH} = b\cdot sen\,\alpha$$

per cui si ha

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\,sen\,\alpha$$

(il *modulo* del prodotto vettoriale di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli, moltiplicato per il “*seno*” (*sen*) dell’angolo che i due vettori formano).



In entrambi i casi, si ha, compreso il segno,
$\mathrm{BH} = b\cdot sen\,\alpha$.
Per il “*seno*” di un angolo, vedi Trigonometria sul Vol. 2

8. PRODOTTO "MISTO"

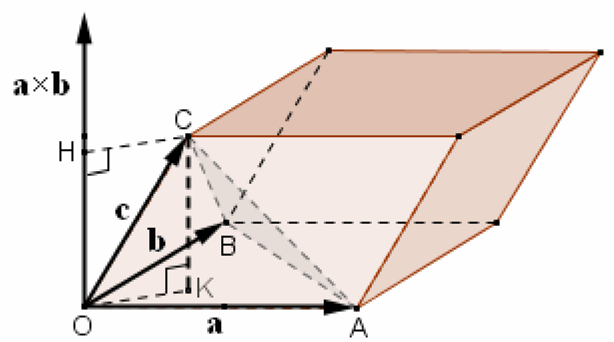
Dati tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, il loro "prodotto misto" è il risultato dell'operazione

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\,.$$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ dà come risultato un vettore, perpendicolare al piano individuato da $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$;
tale vettore, moltiplicato scalarmente per $\mathbf{c}$, dà infine come risultato uno *scalare*.

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ è dunque uno *scalare*, positivo, negativo o nullo.

La figura qui sotto mostra che il *valore assoluto* di tale scalare equivale
al volume del *parallelepipedo* individuato dai tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$,
oppure, il che è lo stesso, a 6 volte il volume del *tetraedro* individuato dagli stessi vettori.



$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=$$
$$=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot OH=$$
$$=\textit{area base}\cdot KC=$$
$$=\textit{volume parallelepipedo}$$

In quanto al *segno* di $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$, esso sarà *positivo* se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ formano, nell'ordine, una *terna* tale che i tre vettori possano essere immaginati rispettivamente come l'indice $(\mathbf{a})$, il medio $(\mathbf{b})$ e il pollice $(\mathbf{c})$ di una mano destra; *negativo in caso contrario.*

Ritornando al *valore assoluto* di un prodotto misto, questo non dipende

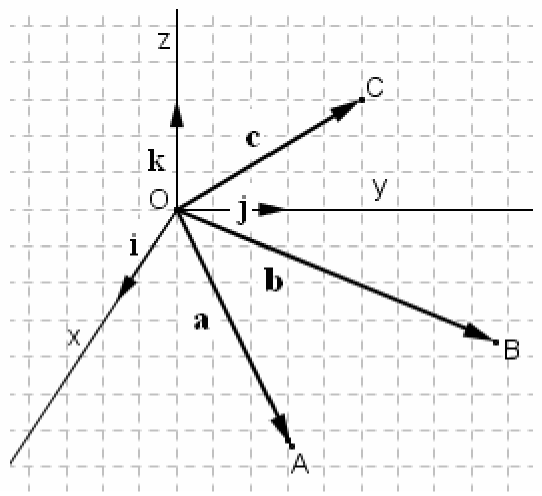
- né dall'ordine con cui vengono presi i 3 vettori,
- e nemmeno dall'ordine in cui vengono effettuate le operazioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale.

Il prodotto misto di tre vettori è uguale a 0
se e solo se
i tre vettori sono *complanari*.
Proprio per questo, nella geometria in tre dimensioni,
il prodotto misto viene utilizzato per fare il
"*test di complanarità*",
approfittando anche del fatto che,
come si potrebbe dimostrare, dette

$$a_x,\ a_y,\ a_z$$

le componenti di $\mathbf{a}$ rispetto alla terna dei versori degli assi
di un riferimento cartesiano ortogonale nello spazio
(approfondimenti al paragrafo successivo),
e analogamente per $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$,
si ha la comoda espressione seguente,
che fa uso di un *determinante* del 3° ordine:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$



$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}\qquad (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$
$$\mathbf{c}=c_x\mathbf{i}+c_y\mathbf{j}+c_z\mathbf{k}$$

Ad esempio, se $\begin{array}{l}\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}\\ \mathbf{b}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}\\ \mathbf{c}=\mathbf{j}+5\mathbf{k}\end{array}$, è $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=\ldots=+13$