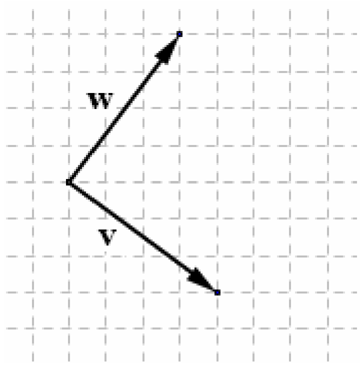
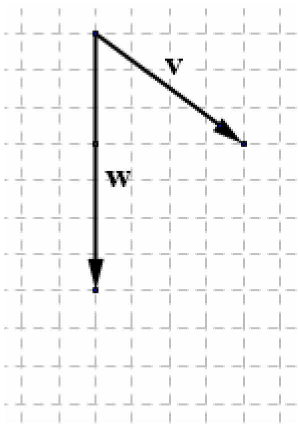
10. ESERCIZI

1) Con riferimento alle figure seguenti, disegna $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ e calcola $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ e il modulo di $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$.
Il lato di ciascun quadretto misura 1.

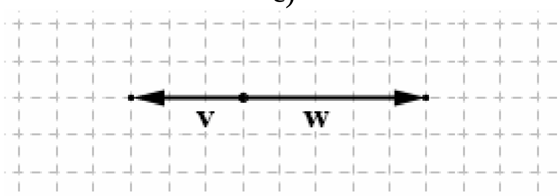
a)



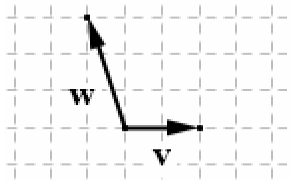
b)



c)



d)



2) Su di un piano cartesiano, $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono i versori dell'asse x e dell'asse y rispettivamente.
Sono dati i vettori $\mathbf{a}=-3\mathbf{i}+2\mathbf{j};\ \mathbf{b}=\mathbf{i}-4\mathbf{j}$. Determina il valore

a) di $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ b) di $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ c) di $-\mathbf{a}$ d) di $2\mathbf{a}$ e) di $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ f) del modulo di $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ g) di $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$

3) Stessi quesiti dell'esercizio 2) per $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j};\ \mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$

4) Stessi quesiti dell'esercizio 2) per $\mathbf{a}=12\mathbf{i}-5\mathbf{j};\ \mathbf{b}=-\mathbf{i}$

5) Da www.mathsisfun.com:

You can add two vectors by simply joining them head-to-tail:
… And it doesn't matter which order you add them, you get the same result.

Se si considera un triangolo ABC e i tre vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$, sommandoli si otterrà sempre …

6) I vettori $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j};\ \mathbf{b}=10\mathbf{i}-6\mathbf{j}$ sono fra loro ortogonali (= perpendicolari).
Come lo si può dimostrare?

7) Se $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j};\ \mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}$,
a che condizione devono soddisfare i 4 coefficienti affinché $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ siano paralleli?

8) Il modulo del vettore $\mathbf{v}=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}$ si può calcolare facendo $v=\sqrt{a^2+b^2}$. Dimostra questa formula.

9) E' vero che, qualunque sia il vettore $\mathbf{v}$, si ha sempre $|\mathbf{v}|=\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$?

10) Scrivi l'espressione che fornisce il versore avente la stessa direzione e verso del vettore $\mathbf{a}=7\mathbf{i}-24\mathbf{j}$

11) Dimostra che i tre vettori $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k},\ \mathbf{c}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ sono complanari.

12) Riconosci quali fra le seguenti sono terne di vettori complanari:
a) $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j},\ \mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{k},\ \mathbf{c}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$ b) $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j},\ \mathbf{b}=\mathbf{j}-\mathbf{k},\ \mathbf{c}=-2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ c) $\mathbf{a}=-\mathbf{k},\ \mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j},\ \mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

13) Quanto misura il volume del tetraedro individuato dai tre vettori seguenti?
a) $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j},\ \mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{k},\ \mathbf{c}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$ b) $\mathbf{a}=6\mathbf{i},\ \mathbf{b}=\mathbf{j}+3\mathbf{k},\ \mathbf{c}=\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

14) Se $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ è una terna ortonormale levogira, allora
a) $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\ldots$ b) $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=\ldots$ c) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=\ldots$ d) $(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\cdot\mathbf{k}=\ldots$

15) Se A, B sono due punti di un piano, qual è il luogo dei punti P del piano per i quali $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$?

16) Verifica con ragionamenti ed esempi la validità delle proprietà illustrate nello specchietto che segue.

PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI DI PRODOTTO SCALARE, ESTERNO, MISTO

Prodotto SCALARE

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (*commutativa*)

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ (*distributiva*)

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$ (*distr. gen.*)

$(\alpha\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

Prodotto ESTERNO

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ (*anticommutativa*)

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (*distributiva*)

$(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\alpha\mathbf{b})=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

mentre NON vale la proprietà associativa

Prodotto MISTO: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$; $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$; $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}$

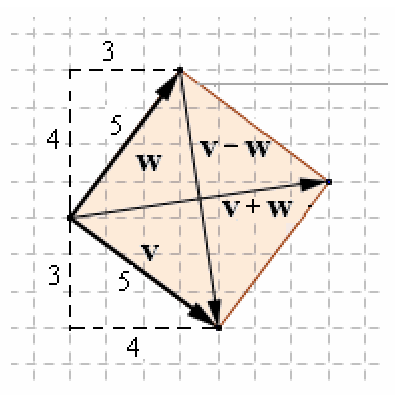
Le proprietà del prodotto scalare ci consentono di dimostrare che, se $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}$ sono i versori di un riferimento cartesiano ortogonale, allora vale una formula notevole ed elegante.

Essendo $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1$ *e* (*poiché* $\mathbf{i}\perp\mathbf{j}$) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0,\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0$, *si avrà* $\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j})\cdot(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j})=$

$=a_xb_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+a_yb_x\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+a_yb_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=a_xb_x\cdot1+a_xb_y\cdot0+a_yb_x\cdot0+a_yb_y\cdot1=\boxed{a_xb_x+a_yb_y}$

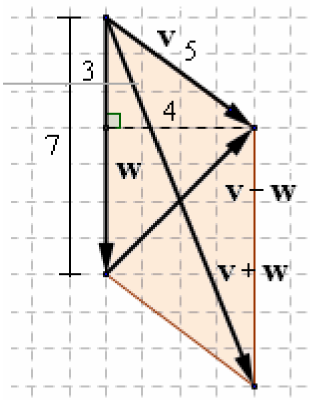
RISPOSTE

1a)



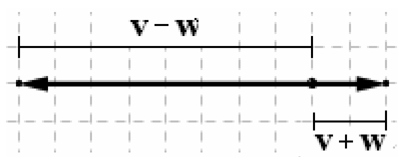
$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0;\ |\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=25$

1b)



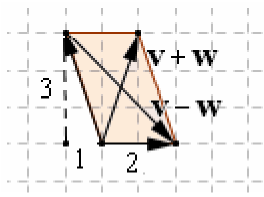
$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}=21;\ |\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=28$

1c)



$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=-15;\ |\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=0$

1d)



$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=-2;$
$|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=6$

2) a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ b) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=-4\mathbf{i}+6\mathbf{j}$ c) $-\mathbf{a}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ d) $2\mathbf{a}=-6\mathbf{i}+4\mathbf{i}$ e) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-11$
f) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=10$ (basterà fare un disegno coi vettori applicati nell'origine …) g) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=13$

3) a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=2\mathbf{i}$ b) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=2\mathbf{j}$ c) $-\mathbf{a}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}$ d) $2\mathbf{a}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ e) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ f) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=2$ g) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=2$

4) a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=11\mathbf{i}-5\mathbf{j}$ b) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=13\mathbf{i}-5\mathbf{j}$ c) $-\mathbf{a}=-12\mathbf{i}+5\mathbf{j}$ d) $2\mathbf{a}=24\mathbf{i}-10\mathbf{j}$ e) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-12$
f) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=5$ g) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=169$

5) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{\mathbf{0}}$

6) Ad esempio, calcolandone il prodotto scalare e verificando che è nullo: $3\cdot10+5\cdot(-6)=0$; oppure disegnando, e verificando che i coefficienti angolari delle due direzioni sono fra loro antireciproci.

7) Le due coppie (a_x, a_y) e (b_x, b_y) devono essere proporzionali:
una di esse deve potersi ottenere moltiplicando l'altra per un opportuno fattore.

8) Basta applicare il vettore nell'origine O. La punta della freccia sarà il punto P di coordinate (a, b).
Ma calcolando la distanza OP si trova proprio l'espressione in questione.

9) Sì 10) Il modulo del vettore $\mathbf{a}$ è 25. Allora il vettore $\frac{1}{25}(7\mathbf{i}-24\mathbf{j})$ è il versore richiesto.

11) Basta calcolare il valore del prodotto misto attraverso un opportuno determinante del 3° ordine:
lo si troverà uguale a 0. Anche: si può notare che risulta $\mathbf{c}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, da cui la complanarità.

12) a) No b) Sì c) Sì 13) a) $1/3$ b) 1 14) a) $\mathbf{i}$ b) $-\mathbf{i}$ c) 0 d) 1

15) E' la retta di quel piano perpendicolare ad AB e passante per A.