SISTEMI DI GRADO SUPERIORE AL 1°

1. GRADO DI UN SISTEMA. METODI GENERALI DI RISOLUZIONE

Si dice "grado" di un sistema il prodotto fra i gradi delle sue equazioni.

- $\begin{cases} 4x^3+y^3=3 & (3°\,grado) \\ x^2-2x+y^2=0 & (2°\ grado) \end{cases} \rightarrow\ sistema\ di\ 6°\ grado$
- $\begin{cases} x-y=7 & (1°\ \ grado) \\ 2x+z=11 & (1°\ \ grado) \\ xz=-6 & (2°\ \ grado) \end{cases} \rightarrow\ sistema\ di\ 2°\ grado$

Va detto che a volte un sistema "appare" di grado n, mentre in realtà il "vero" grado è inferiore.

Ad esempio, il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2-y^2=48 \\ x+y=12 \end{cases}$$

appare di 2° grado, ma un semplice passaggio mostra che è invece sostanzialmente di 1° grado.

$$\begin{cases} (x+y)(x-y)=48 \\ x+y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12(x-y)=48 \\ x+y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=12 \end{cases}$$

La problematicità, dato un sistema, di stabilire a priori quale sia il suo grado effettivo, rende ardua l'enunciazione, per i sistemi, di un teorema analogo a quello che è, per le equazioni, il "Teorema Fondamentale dell'Algebra".

E' possibile, comunque, affermare che
un sistema di grado n non può avere più di n soluzioni
(eccettuati i casi in cui il sistema risulti indeterminato).
E' chiaro che questo discorso sul "grado" si può riferire esclusivamente a quei sistemi nei quali le equazioni in gioco sono tutte algebriche (ossia, della forma "polinomio = 0").

♥ Importante tener presente che,
quando si dice "**SOLUZIONE**" con riferimento a un sistema, si intende:

- una **COPPIA ORDINATA** di numeri, **se il sistema ha due incognite**;
- una **TERNA ORDINATA** di numeri, **se il sistema ha tre incognite**;
- ecc.

Il metodo più generale per la risoluzione di un sistema è quello di **sostituzione**;
è possibile comunque applicare anche "**riduzione**",
ossia rimpiazzare un'equazione, quando lo si ritenga conveniente,
con una **combinazione lineare** (NOTA) dell'equazione stessa con una o più fra le altre.

NOTA: "combinazione lineare" di due o più oggetti matematici (equazioni, vettori, …)
è ciò che si ottiene sommandoli algebricamente,
dopo aver eventualmente moltiplicato ciascuno di essi per una costante numerica.

Vedremo ora un paio di ESEMPI.

Comunque, lo vuoi un **CONSIGLIO DA AMICO**? **DAVVERO UTILISSIMO**?
ALLA FINE della risoluzione di un sistema, **FAI SEMPRE LA VERIFICA**,
sostituendo, nel sistema iniziale, al posto delle singole incognite,
i valori rispettivamente trovati, per controllare se TUTTE le uguaglianze sono esatte.
Metodo comodo, rapido, efficace
per essere certi di aver fatto giusto, o per scoprire che c'è l'errore!!!

1) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=3y+1; \quad x=\dfrac{3y+1}{2} \\ \left(\dfrac{3y+1}{2}\right)^2-y^2=3; \quad \dfrac{9y^2+6y+1}{4}-y^2=3; \quad 9y^2+6y+1-4y^2=12 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=\dfrac{3y+1}{2} \\ 5y^2+6y-11=0; \quad y_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+55}}{5}=\dfrac{-3\pm\sqrt{64}}{5}=\dfrac{-3\pm 8}{5}=\left\langle\begin{matrix}-\dfrac{11}{5} \\ 1\end{matrix}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x=\dfrac{3y+1}{2}=\dfrac{3+1}{2}=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-\dfrac{11}{5} \\ x=\dfrac{3\left(-\dfrac{11}{5}\right)+1}{2}=\dfrac{-\dfrac{33}{5}+1}{2}=-\dfrac{28}{5}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{14}{5} \end{cases}$$

Il sistema assegnato, che era di 2° grado, ammette dunque le 2 soluzioni: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x=-14/5 \\ y=-11/5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=11 \\ xy=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{x} \quad (x\neq 0) \\ 2x^2+\left(-\dfrac{3}{x}\right)^2=11; \quad 2x^2+\dfrac{9}{x^2}=11; \quad 2x^4+9=11x^2; \quad 2x^4-11x^2+9=0; \end{cases}$

Il passaggio in cui si isola y è effettuabile solo supponendo $x\neq 0$; d'altra parte, una coppia (x, y) con $x=0$ non potrebbe verificare la condizione $xy=-3$ quindi non potrebbe essere soluz. del sistema

$$\begin{cases} y=-\dfrac{3}{x} \\ \left(x^2\right)_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-72}}{4}=\dfrac{11\pm\sqrt{49}}{4}=\dfrac{11\pm 7}{4}=\left\langle\begin{matrix}1 \\ \dfrac{9}{2}\end{matrix}\right. \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2=1\to x=\pm 1 \\ x^2=\dfrac{9}{2}\to x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{3}{x}=-\dfrac{3}{1}=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{3}{x}=-\dfrac{3}{-1}=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{3}{x}=-\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{3}{x}=\sqrt{2} \end{cases}$$

ESERCIZI (sistemi di grado superiore al 1°) Vai alle correzioni dei n. 3, 4, 9, 12, 14 ⇨

3) $\begin{cases} 3x-y=8 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ xy+4=0 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x^2+y^2=27 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} y+1=2x \\ x^2-y+3=0 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} y^2+x+y=88 \\ 5x-y=0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{x+y}{5} \\ (x-1)(x+1)=14-xy \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x^2+y^2-6x-2y=0 \\ x^2+y^2-8x-4y+16=0 \end{cases}$ (sottrarre innanzitutto membro a membro) **10)** $\begin{cases} x+2y+x^2+y^2=5 \\ 2x+y-x^2-y^2=1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x^2+2y^2=1 \\ x^2+y^2+2x-y=1 \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy=a(2a-1) \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x^2-y^2=4k \\ x+y=2k \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} bx+ay=2ab \\ x^2+y^2=a^2+b^2 \end{cases}$

SOLUZIONI

3) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{9}{5} \\ y=-\dfrac{13}{5} \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\mp 3 \end{cases}$ **6)** Imp. (in $\mathbb{R}$)

7) $\begin{cases} x=-2 \\ y=-10 \end{cases} \begin{cases} x=44/25 \\ y=44/5 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=3/2 \\ y=1/2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{10} \\ y=-\dfrac{7}{10} \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x=a \\ y=a-1 \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{1-2a}{2} \\ y=-\dfrac{1+2a}{2} \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x=k+1 \\ y=k-1 \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{a\left(3b^2-a^2\right)}{a^2+b^2} \\ y=\dfrac{b\left(3a^2-b^2\right)}{a^2+b^2} \end{cases}$

2. SISTEMI SIMMETRICI

Un sistema della forma

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x+y=s} \\ \boldsymbol{xy=p} \end{cases}}$$

vien detto SISTEMA SIMMETRICO FONDAMENTALE.

Eccone un esempio:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-1 \end{cases}$$

Si potrebbe tranquillamente risolvere per sostituzione;
tuttavia, si osserva che
il sistema richiede di trovare due numeri conoscendone la somma e il prodotto ($s=2,\ \ p=-1$),
per cui, volendo, si può anche scegliere di determinare i due numeri in gioco impostando (vedi pag. 61)
l'equazione ausiliaria

$$\boxed{\boldsymbol{t^2-st+p=0}} \qquad \text{(nella fattispecie, } t^2-2t-1=0\text{)}$$

e risolvendola.
Le due soluzioni che si troveranno saranno, appunto, i due numeri cercati.

Nel nostro caso avremo

$$t^2-2t-1=0$$
$$t_{1,2}=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}$$

quindi le soluzioni del sistema saranno

$$\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{(con scrittura compatta: } \begin{cases} x=1\pm\sqrt{2} \\ y=1\mp\sqrt{2} \end{cases}\text{)}$$

Osservazione: il sistema è "simmetrico", nel senso che in esso x e y sono "intercambiabili".

Un sistema di 2 equazioni in 2 incognite si dice "simmetrico"
ogniqualvolta si constati che il sistema resta invariato, se si scambia formalmente la *x* con la *y*
(= se si rimpiazza ovunque *x* con *y* e *y* a sua volta con *x*).

Facciamo un altro esempio di sistema simmetrico. Prendiamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} 3x^2-7xy+3y^2=\frac{1}{4} \\ 2x+2y=3 \end{cases}$$

Se andiamo a scambiare formalmente x con y $(x \rightleftarrows y)$
il sistema si muta in

$$\begin{cases} 3y^2-7yx+3x^2=\frac{1}{4} \\ 2y+2x=3 \end{cases}$$

che coincide ancora col sistema di partenza!

E' evidente che, se un sistema simmetrico ammette una data soluzione
$x=\alpha,\ \ y=\beta$
allora necessariamente ammetterà anche la soluzione "gemella"
$x=\beta,\ \ y=\alpha$.

Altre tipologie di sistemi simmetrici "notevoli" sono illustrate dagli esempi seguenti.
Per ciascuna tipologia, viene presentata una tecnica di risoluzione specifica,
che risulta più rapida rispetto al (pur sempre applicabile) metodo di sostituzione.

1) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=17 \end{cases}$ *(trovare due numeri conoscendo la loro somma, e la somma dei loro quadrati)*

$\begin{cases} x+y=5 \\ (x+y)^2-2xy=17 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5 \\ 5^2-2xy=17 \end{cases}$ $\begin{cases} \boxed{x+y=5} \\ 25-2xy=17;\ \ -2xy=-8;\ \ \boxed{xy=4} \end{cases}$

Dunque, applicando la più semplice fra le cosiddette "formule di Waring" (pag. 65), ci siamo ricondotti al sistema simmetrico fondamentale

$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$

che possiamo risolvere ad esempio con la tecnica appresa dell'equazione ausiliaria, oppure, data la semplicità dei numeri in gioco, anche "a mente":

$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy=60 \\ x^2+y^2=169 \end{cases}$ *(trovare due numeri conoscendo il loro prodotto, e la somma dei loro quadrati)*

$\begin{cases} xy=60 \\ (x+y)^2-2xy=169 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=60 \\ (x+y)^2-120=169;\ \ (x+y)^2=289;\ \ x+y=\pm 17 \end{cases}$

Ci siamo ricondotti dunque alla coppia di sistemi simmetrici fondamentali

$\begin{cases} xy=60 \\ x+y=17 \end{cases};\ \begin{cases} xy=60 \\ x+y=-17 \end{cases}$

che possiamo risolvere con la tecnica specifica, o anche "a mente", ottenendo

$\begin{cases} x=5 \\ y=12 \end{cases},\ \begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases};\ \begin{cases} x=-5 \\ y=-12 \end{cases},\ \begin{cases} x=-12 \\ y=-5 \end{cases}$

ESERCIZI (sistemi simmetrici) Vai alle correzioni dei n. 5, 9, 11, 13, 15, 16 ⇨

3) $\begin{cases} x+y=15 \\ x^2+y^2=153 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x^2+y^2=80 \\ x+y=-4 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x+y=\frac{1}{6} \\ x^2+y^2=\frac{13}{36} \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x+y=2(2\sqrt{2}-1) \\ x^2+y^2=4(6-\sqrt{2}) \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy=48 \\ x^2+y^2=580 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} xy=16 \\ x^2+y^2=32 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} 4xy+1=0 \\ 2x^2+2y^2=1 \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} xy=3 \\ x^2+y^2=14 \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{17}{64} \\ xy+\frac{1}{16}=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x+y=2a \\ x^2+y^2=2(a^2+b^2) \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} xy=a-1 \\ x^2+y^2=a^2-2a+2 \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x^3+y^3=14 \\ x+y=2 \end{cases}$ (formule di Waring, pag. 65 …) **16)** $\begin{cases} x^3+y^3=\frac{1}{4} \\ x+y=1 \end{cases}$

SOLUZIONI

3) $\begin{cases} x=12 \\ y=3 \end{cases} \begin{cases} x=3 \\ y=12 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x=-8 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=-8 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$ **6)** imp. (in $\mathbb{R}$) **7)** $\begin{cases} x=3\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2}-2 \end{cases} \begin{cases} x=\sqrt{2}-2 \\ y=3\sqrt{2} \end{cases}$

8) $\begin{cases} x=2 \\ y=24 \end{cases} \begin{cases} x=24 \\ y=2 \end{cases} \begin{cases} x=-2 \\ y=-24 \end{cases} \begin{cases} x=-24 \\ y=-2 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=-4 \\ y=-4 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

11) $\begin{cases} x=\sqrt{5}+\sqrt{2} \\ y=\sqrt{5}-\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=\sqrt{5}-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{5}+\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\sqrt{5}-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{5}+\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\sqrt{5}+\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{5}-\sqrt{2} \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x=-\frac{1}{8} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{8} \end{cases} \begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{8} \end{cases}$

13) $\begin{cases} x=a\pm b \\ y=a\mp b \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} x=1 \\ y=a-1 \end{cases} \begin{cases} x=a-1 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=1-a \\ y=-1 \end{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=1-a \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \end{cases}$ **16)** $\begin{cases} x=1/2 \\ y=1/2 \end{cases}$

3. SISTEMI DI GRADO SUPERIORE AL 1° CON TRE O PIU' INCOGNITE

1)

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x-y-z=0 \\ xy+xz+yz=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+z & \textit{isolo un'incognita dall'equazione più semplice,} \\ y+z+2y+z=5 & \textit{e vado poi a sostituire nelle altre due equazioni...} \\ (y+z)y+(y+z)z+yz=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+z \\ 3y+2z=5 & \textit{... le quali formeranno un "sotto-sistema"} \\ y^2+yz+yz+z^2+yz=5 \quad y^2+3yz+z^2=5 & \textit{con un'incognita in meno} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+z \\ z=\dfrac{5-3y}{2} & \textit{dopodiché risolvo, per sostituzione, il sotto-sistema} \\ y^2+3y\cdot\dfrac{5-3y}{2}+\left(\dfrac{5-3y}{2}\right)^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+z \\ z=\dfrac{5-3y}{2} \\ y^2+\dfrac{15y-9y^2}{2}+\dfrac{25-30y+9y^2}{4}=5; \;\; 4y^2\cancel{+30y}-18y^2+25\cancel{-30y}+9y^2=20; \;\; -5y^2=-5; \;\; y^2=1; \;\; y=\pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ z=\dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{5-3}{2}=1 \\ x=y+z=1+1=2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y=-1 \\ z=\dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{5+3}{2}=4 \\ x=y+z=-1+4=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}$$

Ma ecco una **variante più efficace** del procedimento risolutivo:

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x-y-z=0 \\ xy+xz+yz=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+z & \textit{isolo un'incognita da una delle equazioni più semplici} \\ y+z+2y+z=5 & \textit{e sostituisco nell'altra equazione semplice} \\ xy+xz+yz=5 & \textit{non toccando, per ora, l'equazione più complicata} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+z & \textit{... lavoro sempre sulle prime due equazioni, con l'obiettivo} \\ 3y+2z=5 & \textit{di esprimere due delle incognite in funzione dell'incognita rimanente...} \\ xy+xz+yz=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+z \\ z=\dfrac{5-3y}{2} \\ xy+xz+yz=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{5-3y}{2} \\ x=y+z=y+\dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{2y+5-3y}{2}=\dfrac{5-y}{2} \\ xy+xz+yz=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{5-3y}{2} \\ x=\dfrac{5-y}{2} \\ \dfrac{5-y}{2}\cdot y+\dfrac{5-y}{2}\cdot\dfrac{5-3y}{2}+y\cdot\dfrac{5-3y}{2}=5;\quad \dfrac{5y-y^2}{2}+\dfrac{25-15y-5y+3y^2}{4}+\dfrac{5y-3y^2}{2}=5;\ \ldots\ y=\pm 1\end{cases}$$

e solo dopo aver raggiunto questo obiettivo, sostituisco nella terza equazione ottenendo direttamente un'equazione con una sola incognita

$$\begin{cases} y=1 \\ z=\dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{5-3}{2}=1 \\ x=\dfrac{5-y}{2}=\dfrac{5-1}{2}=2\end{cases} \vee \begin{cases} y=-1 \\ z=\dfrac{5-3y}{2}=\dfrac{5+3}{2}=4 \\ x=\dfrac{5-y}{2}=\dfrac{5+1}{2}=3\end{cases}$$

cioè $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1\end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=4\end{cases}$

Vuoi un **CONSIGLIO DA AMICO**?
DAVVERO UTILISSIMO?
Alla fine della risoluzione di un sistema,
FAI SEMPRE LA VERIFICA,
sostituendo, nel sistema iniziale,
al posto delle singole incognite,
i valori rispettivamente trovati.
TUTTE le equazioni dovranno trasformarsi in uguaglianze vere, altrimenti c'è qualcosa che non va.

ESERCIZI Vai alle correzioni degli esercizi "dispari" fino al 13) ⇨

2) $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-y-z+1=0 \\ xy+z^2=2\end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x+y+t=2 \\ x-t=2 \\ x^2+t^2=y^2+6\end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x+y+z=7 \\ z-x-y=3 \\ x^2+yz=16\end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x-2y=0 \\ y-2z=0 \\ xyz=8\end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x-z=2y \\ x+z=1+y \\ x^2+z^2=3-y^2\end{cases}$ **7)** $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 0,3y-0,2z=\dfrac{2}{5} \\ xy+z^2=9\end{cases}$ **8)** $\begin{cases} 2(z-1)=x \\ 2y-z=1 \\ (x-1)^2+(y+1)^2+z^2=27\end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x+y+z+t=5 \\ x-y-z+t=1 \\ x-y+z-t=-1 \\ xy+zt=3\end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y+z=7 \\ \dfrac{yz-xy}{6}=1\end{cases}$ **11)** $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}-\dfrac{4}{3}=0 \\ 2x+y+6z=13 \\ x^2+yz=2\end{cases}$ **12)** $\begin{cases} 2x=1+y \\ \dfrac{3x-2y-t}{2}-1=0 \\ 2xt^2-y^3=1\end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{25}{9} \\ 5z-x-y=5/3 \\ xy=\dfrac{5}{3}z\end{cases}$

14) $\begin{cases} x-y+z=6 \\ x+y+z=2 \\ x^2+yz+5=0\end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x^2+y^2+2x=9 \\ z^2-4=z(z+1) \\ 2x^2+2y^2+y=11\end{cases}$ **16)** $\begin{cases} 2a-b=1 \\ a-2c+5=0 \\ a^2+b^2+c^2=11\end{cases}$ **17)** $\begin{cases} 3x-y-t=1 \\ x+yz+t=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x+y+t=4\end{cases}$ **18)** $\begin{cases} ab+cd+10=0 \\ a+b-c=0 \\ a-b+c=2 \\ a-b-d=3\end{cases}$

SOLUZIONI

2) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1\end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-2\end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ t=1\end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \\ z=5\end{cases} \vee \begin{cases} x=6 \\ y=-4 \\ z=5\end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=1\end{cases}$

6) $\begin{cases} x=-11/13 \\ y=-19/13 \\ z=5/13\end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1\end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x=40/7 \\ y=-10/7 \\ z=-29/7\end{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=1\end{cases}$ **8)** $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=3\end{cases} \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \\ z=-1\end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ t=2\end{cases} \begin{cases} x=3/2 \\ y=3/2 \\ z=1/2 \\ t=3/2\end{cases}$

10) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=4\end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=\dfrac{19}{4}\end{cases}$ **11)** $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2\end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=1 \\ z=\dfrac{17}{9}\end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ t=0\end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ t=-1\end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{5}{3} \\ z=0\end{cases} \begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ y=0 \\ z=0\end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{4}{3} \\ z=\dfrac{4}{5}\end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=1 \\ z=\dfrac{4}{5}\end{cases}$

14) $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3\end{cases} \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \\ z=7\end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-4\end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{20}{17} \\ y=-\dfrac{39}{17} \\ z=-4\end{cases}$ **16)** $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=3\end{cases} \begin{cases} a=-\dfrac{5}{7} \\ b=-\dfrac{17}{7} \\ c=\dfrac{15}{7}\end{cases}$ **17)** $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=-2 \\ t=1\end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \\ z=2 \\ t=5\end{cases}$ **18)** $\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=-3 \\ d=2\end{cases} \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \\ d=-4\end{cases}$

4. SISTEMI RISOLUBILI CON ARTIFICI VARI O FATTORIZZAZIONI

1) $\begin{cases} x^3y^3+x^2y^2-16xy=16 \\ y-x+2=0 \end{cases}$ *La prima equazione è caratterizzata dal "blocco" xy. Poniamo dunque $xy=z$ e determineremo i valori di xy.*

$x^3y^3+x^2y^2-16xy=16$ $\boxed{xy=z}$ $z^3+z^2-16z=16$ $(z+1)(z^2-16)=0$ $\boxed{z=-1;\ z=\pm 4}$

$\begin{cases} xy=-1 \\ y-x+2=0 \end{cases}$ ... $\begin{cases} y=x-2 \\ (x-1)^2=0;\quad x=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1-2=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} xy=4 \\ y-x+2=0 \end{cases}$ ... $\begin{cases} y=x-2 \\ x=1\pm\sqrt{1+4}=1\pm\sqrt{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-\sqrt{5} \\ y=1-\sqrt{5}-2=-1-\sqrt{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=1+\sqrt{5} \\ y=1+\sqrt{5}-2=-1+\sqrt{5} \end{cases}$

$\begin{cases} xy=-4 \\ y-x+2=0 \end{cases}$ ... $\begin{cases} y=x-2 \\ x=1\pm\sqrt{1-4}\ \ \textit{imp. in } \mathbb{R} \end{cases}$

Le soluzioni reali del sistema dato sono dunque le tre coppie:

$\boxed{(1,-1)\ \ \textit{soluzione "doppia"}}$; $\boxed{\left(1-\sqrt{5},\ -1-\sqrt{5}\right)}$; $\boxed{\left(1+\sqrt{5},\ -1+\sqrt{5}\right)}$

2) $\begin{cases} 3x^2+3y^2+xy=17 \\ x+y-2xy=-1 \end{cases}$ *Questo è un sistema nel quale è possibile far comparire esclusivamente i due blocchi $x+y$, xy*

$\begin{cases} 3(x^2+y^2)+xy=17 \\ (x+y)-2xy=-1 \end{cases} \to \begin{cases} 3\left[(x+y)^2-2xy\right]+xy=17 \\ (x+y)-2xy=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3(x+y)^2-6xy+xy=17 \\ (x+y)-2xy=-1 \end{cases} \to \begin{cases} 3(x+y)^2-5xy=17 \\ (x+y)-2xy=-1 \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} x+y=s \\ xy=p \end{matrix}}$ $\begin{cases} 3s^2-5p=17 \\ s-2p=-1 \end{cases} \to \begin{cases} s=2p-1 \\ 3(2p-1)^2-5p=17 \end{cases}$

$3(4p^2-4p+1)-5p=17;\ \dots\ \ p_{1,2}=\left\langle\begin{matrix} -7/12 \\ 2 \end{matrix}\right.$

$\begin{cases} p=2 \\ s=2p-1=4-1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}}$ $\boxed{\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}}$

$\begin{cases} p=-7/12 \\ s=2p-1=-7/6-1=-13/6 \end{cases}$ $\begin{cases} xy=-7/12 \\ x+y=-13/6 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{-13\pm\sqrt{253}}{12} \\ y=\dfrac{-13\mp\sqrt{253}}{12} \end{cases}}$

3) $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ x^2+x+2y=24 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+2y)(x-2y)=0 \\ x^2+x+2y=24 \end{cases}$ *Se fattorizziamo il primo membro della prima equazione, potremo spezzare il sistema dato in una coppia di sistemi più semplici.*

$\begin{cases} x+2y=0 \\ x^2+x+2y=24 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2y \\ 4y^2\cancel{-2y}\cancel{+2y}=24;\ y^2=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2y \\ y=\pm\sqrt{6} \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} x=-2y=-2\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}}$ $\boxed{\begin{cases} x=-2y=2\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}}$

$\begin{cases} x-2y=0 \\ x^2+x+2y=24 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y \\ 4y^2+2y+2y=24 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y \\ y=2 \vee y=-3 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} x=2y=4 \\ y=2 \end{cases}}$ $\boxed{\begin{cases} x=2y=-6 \\ y=-3 \end{cases}}$

ESERCIZI Correzioni ⇨

4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=11 \\ xy+xz+yz=-1 \\ x-y+z=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-y+z=a \\ x-3y+2z+1=0 \\ x^2+z^2=2(y^2+1) \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2y+xy^2=0 \\ x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+y-6z=0 \\ x^2+y^2+36z^2=56 \\ xyz=8 \end{cases}$

SOLUZIONI

4) $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=a+1 \\ y=a \\ z=a-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=(a-3)/3 \\ y=(5a+6)/3 \\ z=(7a+9)/3 \end{cases}$

6) $\left(0,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right)$

7) $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-6 \\ y=2 \\ z=-2/3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=-6 \\ z=-2/3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-6 \\ y=4 \\ z=-1/3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=-6 \\ z=-1/3 \end{cases}$

5. ESERCIZI SUI SISTEMI DI GRADO SUP. AL 1° Correzioni (numeri dispari) ⇨

8) $\begin{cases} 3x-2(y+4)=0 \\ x^2+y^2=xy+7 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3} \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x-y+1=0 \\ (x+y)^2=(x-y)^2+24 \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} a+b=0 \\ a^2+2ab+3b^2=8 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{y} \\ 3(x-1)=2y \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} u(v+1)+1=v^2 \\ 2v-u=3 \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} \dfrac{a}{b}=2 \\ a+a^2+b+b^2=14 \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x=y+1 \\ x^2=y^3+1 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x+y=13/12 \\ xy=1/4 \end{cases}$ **17)** $\begin{cases} x+y=2\sqrt{5} \\ xy=2 \end{cases}$ **18)** $\begin{cases} 2x+2y=1 \\ 16xy=1 \end{cases}$ **19)** $\begin{cases} x+y=xy-56 \\ xy=72 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=14 \end{cases}$ **21)** $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=4\sqrt{2} \end{cases}$ **22)** $\begin{cases} xy=2 \\ x^2+y^2=65/4 \end{cases}$ **23)** $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=1 \end{cases}$

24) $\begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=19 \end{cases}$ **25)** $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a-c=1 \\ ab+ac+bc=2 \end{cases}$ **26)** $\begin{cases} 2x-y=3 \\ y-2z=1 \\ xy+z^2=0 \end{cases}$ **27)** $\begin{cases} ab+1=0 \\ ac+2=0 \\ bc=a+b+c \end{cases}$

28) $\begin{cases} x^2y^2=xy \\ x+y=2 \end{cases}$ **29)** $\begin{cases} (x+y)^2=6xy-x-y \\ 2x+2y=3xy \end{cases}$ **30)** $\begin{cases} x^4y^4+x^2y^2=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ **31)** $\begin{cases} 1/x+1/y=6 \\ 1/x^2+1/y^2=18 \end{cases}$

32) $\begin{cases} x^2+y^2=65 \\ x^2-y^2=33 \end{cases}$ **33)** $\begin{cases} xy+x=35 \\ xy+y=36 \end{cases}$ **34)** $\begin{cases} 2x-y=9 \\ 9x^2-y^2=143 \end{cases}$ **35)** $\begin{cases} 3x-y=13 \\ 9x^2-y^2=143 \end{cases}$ **36)** $\begin{cases} t^2=z \\ t=z^2 \end{cases}$

37) $\begin{cases} x^2+x^2y=2 \\ x^2-xy^2=2 \end{cases}$ **38)** $\begin{cases} x^2+y^2+4x+7y=4 \\ x^2+y^2+2x+3y=4 \end{cases}$ **39)** $\begin{cases} x^2+2y^2+3z^2=9 \\ 3y^2-2z^2=1 \\ 3x^2+4y^2=16 \end{cases}$ **40)** $\begin{cases} (x-y)(x-2y)=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

41) Una radice quadrata del numero complesso $a+bi$ è un altro numero complesso $c+di$, tale che $(c+di)^2=a+bi$. Ma l'uguaglianza $(c+di)^2=a+bi$ equivale a $c^2-d^2+2cdi=a+bi$ e sarà dunque verificata qualora i due coefficienti REALI c, d soddisfino il sistema $\begin{cases} c^2-d^2=a \\ 2cd=b \end{cases}$.
Ciò premesso, determina le radici quadrate di: I) $28-96i$ II) $4+2i$ (*troverai valori "brutti"!* ☺)

SOLUZIONI

8) $(2,-1)$ $\left(\dfrac{18}{7},-\dfrac{1}{7}\right)$ **9)** $(4,3)$ $(-4,-3)$ **10)** $(-3,-2)$ $(2,3)$ **11)** $(2,-2)$ $(-2,2)$

12) $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{4}\right)$ ~~(1,0)~~ ~~NON ACC.~~ **13)** $(1,2)$ $(-5,-1)$ **14)** $(-4,-2)$ $\left(\dfrac{14}{5},\dfrac{7}{5}\right)$ **15)** $(1,0)$ $(3,2)$ $(0,-1)$

16) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{4}\right)$ $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{3}\right)$ **17)** $\begin{cases} x=\sqrt{5}\pm\sqrt{3} \\ y=\sqrt{5}\mp\sqrt{3} \end{cases}$ **18)** $\begin{cases} x=1/4 \\ y=1/4 \end{cases}$ **19)** impossibile (in $\mathbb{R}$)

20) $\begin{cases} x=2\pm\sqrt{3} \\ y=2\mp\sqrt{3} \end{cases}$ **21)** $(\sqrt{2},3\sqrt{2})$ $(3\sqrt{2},\sqrt{2})$ **22)** $(1/2,4)$ $(4,1/2)$ $(-1/2,-4)$ $(-4,-1/2)$ **23)** $(0,1)$ $(1,0)$

24) $(1,3,3)$ $(3,3,1)$ **25)** $(1,2,0)$ $(2,0,1)$ **26)** $(1,-1,-1)$ $\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ **27)** $(-1,1,2)$ $\left(2,-\dfrac{1}{2},-1\right)$

28) $(0,2)$ $(2,0)$ $(1,1)$ **29)** $(0,0)$ $(1,2)$ $(2,1)$ **30)** $\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2},\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right)$ **31)** $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

32) $(7,4)$ $(-7,4)$ $(7,-4)$ $(-7,-4)$ **33)** $(5,6)$ $(-7,-6)$ **34)** $(4,-1)$ $\left(-\dfrac{56}{5},-\dfrac{157}{5}\right)$ **35)** $(4,-1)$

36) $(0,0)$ $(1,1)$ **37)** $(\sqrt{2},0)$ $(-\sqrt{2},0)$ $(-1,1)$ **38)** $(-2,1)$ $\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$ **39)** $x=\pm2$ $y=\pm1$ $z=\pm1$ *da cui* 8 *soluzioni* **40)** $\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$ $(\pm2,\pm1)$

41) I) $8-6i,\ -8+6i$
II) $\sqrt{\sqrt{5}+2}+i\sqrt{\sqrt{5}-2}$
$-\sqrt{\sqrt{5}+2}-i\sqrt{\sqrt{5}-2}$

Problemi geometrici da risolvere con un sistema di grado superiore al primo: pagine 256 e 257