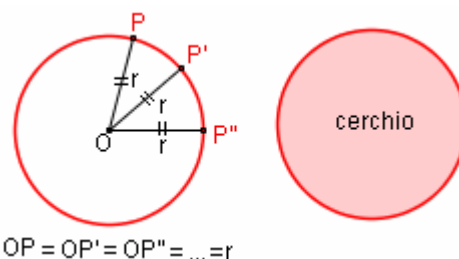


GEOMETRIA Cap. 6: LA CIRCONFERENZA

6.1 - DEFINIZIONI

Siano: O un punto fissato del piano, r un segmento fissato.

- Si dice "**circonferenza**" di centro O e raggio r
il luogo dei punti del piano
la cui distanza da O è uguale a r .
- Si dice "**cerchio**" di centro O e raggio r
il luogo dei punti del piano
la cui distanza da O è minore o uguale a r .



$$OP = OP' = OP'' = \dots = r$$

Con simbologia insiemistica avremo:

$$\text{circonferenza di centro } O \text{ e raggio } r = \{P \in \text{piano} / OP = r\}$$

$$\text{cerchio di centro } O \text{ e raggio } r = \{P \in \text{piano} / OP \leq r\}$$

Quindi il "cerchio" è l'insieme formato dai punti di una circonferenza, più anche tutti i punti interni a questa. E perciò, **mentre la CIRCONFERENZA è una LINEA, il CERCHIO è una SUPERFICIE**.

E' evidente (e, volendo, facilmente dimostrabile, con considerazioni su movimenti rigidi e sovrapposizioni) che se due circonferenze, o due cerchi, hanno ugual raggio allora sono uguali (=congruenti, sovrapponibili esattamente).

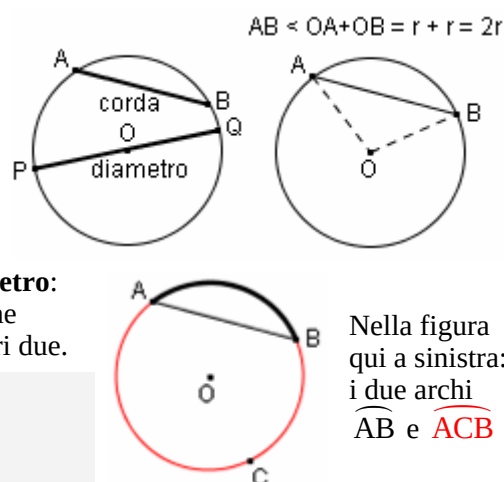
- Un segmento che congiunga due punti di una circonferenza prende il nome di "**corda**".
- Si dice "**diametro**" ogni corda passante per il centro.

Tutti i diametri di una stessa circonferenza sono uguali fra loro, essendo ciascuno il doppio del raggio.

E' facile dimostrare (vedi figura) che

una corda non passante per il centro è sempre minore del diametro: basta congiungere le estremità della corda col centro, e ricordare che in un triangolo ciascun lato è sempre minore della somma degli altri due.

- Si dice "**arco**" una parte di circonferenza compresa fra due punti della circonferenza stessa (detti "gli estremi" dell'arco in questione)

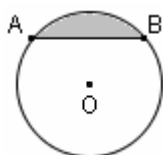


Nella figura qui a sinistra: i due archi $\widehat{AB}$ e $\widehat{ACB}$

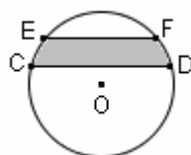
L'arco di estremi A, B si indica col simbolo $\widehat{AB}$. Poiché, tuttavia, esistono non uno solo, ma DUE archi di estremi A e B , in caso di ambiguità si prenderà un altro punto qualsiasi C all'interno dell'arco che si vuole considerare, e si parlerà di arco $\widehat{ACB}$ (= arco che va da A fino a B , passando per C).

Si suol dire che l'arco $\widehat{AB}$ "sottende" la corda AB (e, quindi, si dirà che la corda AB "è sottesa" dall'arco $\widehat{AB}$).

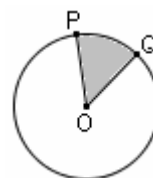
Una corda divide il cerchio in due parti: ciascuna di queste due superfici si dice "**segmento circolare a una base**".



"**Segmento circolare a due basi**" è la parte di cerchio compresa fra due corde parallele (in altre parole, l'intersezione di un cerchio con una striscia).



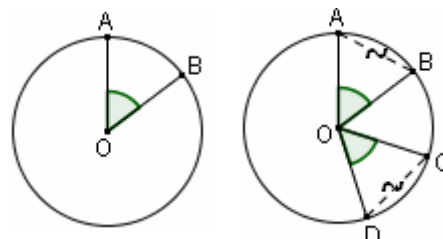
Anche tracciando due raggi il cerchio ne risulta suddiviso in due parti: ciascuna di queste prende il nome di "**settore circolare**".



Si dice "**angolo al centro**" un angolo che abbia il suo vertice nel centro della circonferenza.

E' facile dimostrare (immaginando di sottoporre il cerchio ad un movimento rigido e precisamente a una rotazione intorno al centro O) che **in uno stesso cerchio, ad angoli al centro uguali corrispondono archi uguali, corde uguali e settori uguali;** e che **valgono anche i vari "viceversa" di questo teorema.**

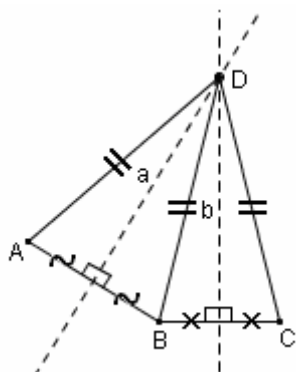
Ovviamente, le stesse affermazioni restano valide anche se, invece di pensare ad un solo cerchio, ci si riferisce a due cerchi uguali.



6.2 - TEOREMI FONDAMENTALI SULLA CIRCONFERENZA

TEOREMA

Per tre punti non allineati (cioè: che non giacciono su di una stessa retta) passa una circonferenza ed una sola.



IPOTESI

A, B, C non allineati

TESI

Esiste
una
e una sola
circonferenza,
che passa per i tre punti A, B, C

Dimostrazione

ESISTENZA

Siano a, b gli assi dei due segmenti AB e BC.

Osserviamo che le due rette a, b devono per forza incontrarsi, perché sono perpendicolari a due rette incidenti.

Più in dettaglio: se, per assurdo, a e b fossero parallele, allora a , oltre ad esser perpendicolare ad AB, cadrebbe perpendicolarmente anche sul prolungamento di BC (in quanto parallela ad una perpendicolare a BC), e si formerebbe un triangolo con due angoli retti, il che è impossibile.

Sia dunque D il punto di incontro dei suddetti due assi a, b .

Ricordiamo che l'asse di un segmento (cioè, la perpendicolare a quel segmento nel suo punto medio) risulta essere il luogo geometrico dei punti del piano aventi la proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento dato.

Perciò, poiché D appartiene all'asse di AB, avremo $DA = DB$;

e poiché D appartiene anche all'asse di BC, sarà pure $DB = DC$.

In definitiva, avremo $DA = DB = DC$ e, di conseguenza, puntando il compasso in D con apertura DA, la circonferenza tracciata passerà anche per B e per C.

L'esistenza di una circonferenza passante per tutti e tre i punti A, B, C è così dimostrata.

UNICITA'

Tale circonferenza è poi unica, perché la posizione del suo centro è univocamente determinata.

Infatti, esclusivamente il punto D della costruzione da noi effettuata

ha la proprietà di essere equidistante da A, B e C:

se un punto O è tale che $OA = OB = OC$, allora O deve stare sia sull'asse di AB (per il fatto che $OA = OB$)

che sull'asse di BC (per il fatto che $OB = OC$),

quindi deve per forza coincidere col punto di intersezione di tali due assi, ovvero con D.

□ OSSERVAZIONE

Il teorema precedente si potrebbe anche enunciare dicendo che

"Tre punti non allineati INDIVIDUANO una circonferenza ed una sola".

Il termine "individuare" in Matematica è adoperato per indicare che

"ad un certa cosa si può associare, in modo unico, una certa altra cosa".

Altri esempi:

- Due punti distinti su di un piano "individuano" una retta.
- Una coppia ordinata di interi, il secondo dei quali $\neq 0$, "individua" un numero razionale

TEOREMA

La perpendicolare ad una corda condotta dal centro della circonferenza dimezza la corda stessa (quindi, ne è asse).

Per la dimostrazione, basta congiungere gli estremi della corda col centro: si forma un triangolo che è isoscele, perciò l'altezza relativa alla base fa anche da mediana.

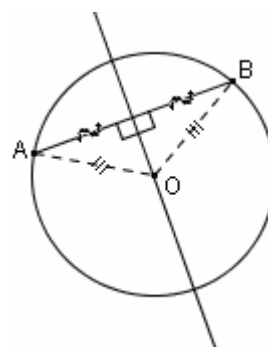
TEOREMA

L'asse di ogni corda passa per il centro.

Conseguenza del teorema precedente.

Oppure, in modo ancora più diretto, si può ragionare così:

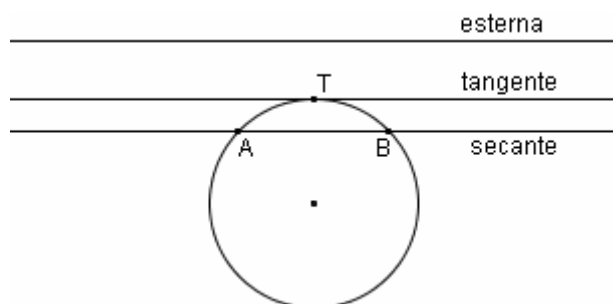
il centro è equidistante dagli estremi della corda, perciò appartiene all'asse di questa.



6.3 - POSIZIONI RECIPROCHE DI UNA RETTA E DI UNA CIRCONFERENZA

DEFINIZIONE

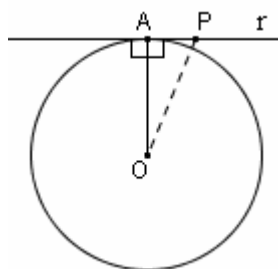
Una retta si dice **ESTERNA**, oppure **TANGENTE**, oppure **SECANTE** rispetto ad una circonferenza a seconda che abbia, rispettivamente:
nessun punto in comune, o **un solo punto** in comune, oppure **due punti** in comune con la circonferenza.



TEOREMA

La perpendicolare ad un raggio nel suo estremo (NOTA) è tangente alla circonferenza.

NOTA. - Parlando di "estremo" di un raggio si sottintende che si tratti dell'estremo non coincidente col centro, vale a dire dell'estremo che sta sulla circonferenza.

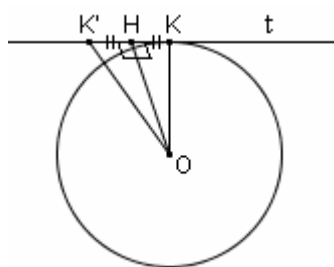


Dimostrazione

In una circonferenza di centro O, sia OA un raggio, e sia r la retta per A, perpendicolare ad OA (ipotesi); vogliamo dimostrare (tesi) che r non ha in comune con la circonferenza nessun punto oltre al punto A. Infatti, preso su r un punto qualsiasi P distinto da A, il segmento OP, essendo l'ipotenusa del triangolo rettangolo OAP, è maggiore del cateto OA. Pertanto P NON può stare sulla circonferenza, perché la sua distanza dal centro è maggiore del raggio.

TEOREMA

Una tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio passante per il (= avente un estremo nel) punto di contatto.



Dimostrazione

Sia t una retta tangente alla circonferenza (ipotesi), cioè una retta che abbia in comune con la circonferenza un solo punto, che abbiamo indicato con K. Vogliamo dimostrare (tesi) che t e OK sono perpendicolari.

Infatti, se per assurdo OK non fosse perpendicolare a t , allora calando da O la perpendicolare a t questa incontrerebbe t in un punto H, distinto da K. Prendiamo dunque sulla tangente t , a partire da H e da parte opposta rispetto a K, un segmento $HK' = KH$. Si dimostra subito ($OKH = OK'H$ per il Primo Criterio) che $OK' = OK$. Pertanto K' sta sulla circonferenza, perché la sua distanza OK' dal centro è uguale a OK che è un raggio. Ma avevamo supposto che t avesse in comune con la circonferenza soltanto il punto K!!! L'assurdo trovato dimostra la tesi.

Dagli ultimi due teoremi si deduce immediatamente il

COROLLARIO

Se una retta ha distanza dal centro uguale al raggio, allora è tangente alla circonferenza, e viceversa.

Qualche semplice considerazione complementare porta anzi al seguente enunciato più completo:

TEOREMA

Una retta è SECANTE, TANGENTE o ESTERNA rispetto ad una circonferenza a seconda che la sua distanza dal centro della circonferenza sia, rispettivamente, MINORE, UGUALE o MAGGIORE del raggio della circonferenza stessa.

TEOREMA

(the “Hat” Theorem = il Teorema “del Cappello”!)

Vedi anche pagina successiva a questo riguardo



Se da un punto esterno si conducono le due tangenti ad una circonferenza, allora:

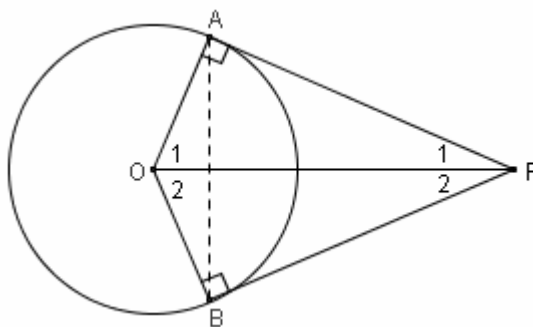
- I) i due segmenti di tangente sono uguali;
- II) la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice
 - sia dell'angolo formato dalle due tangenti,
 - sia dell'angolo formato dai due raggi che vanno ai punti di contatto;
- III) infine, tale congiungente è l'asse della corda avente per estremi i punti di contatto.

IPOTESI

PA, PB tangenti

TESI

- I) $PA = PB$
- II) $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$; $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
- III) PO è l'asse di AB

**DIMOSTRAZIONE**

- I) Basta confrontare i due triangoli POA, POB.
Essi sono entrambi rettangoli
perché una tangente è sempre perpendicolare al raggio che va al punto di contatto,
e sono uguali per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli
(ipotenusa OP in comune, $OA = OB$ perché raggi di una stessa circonferenza).
Segue subito la tesi.
- II) Conseguenza immediata dell'uguaglianza di triangoli dimostrata per la parte I)
- III) Il punto P è equidistante dagli estremi del segmento AB (infatti $PA = PB$ come già dimostrato);
quindi, P appartiene all'asse di AB. Lo stesso dicasi del punto O:
si ha $OA = OB$ perché entrambi raggi, quindi O appartiene all'asse di AB.
Ma allora PO, congiungente due punti dell'asse di AB, è l'asse di AB, c.v.d.

Vedi la pagina a fianco per una trattazione molto sintetica, in Inglese, dell'argomento “rette tangenti”, compreso il precedente “Teorema del Cappello”.

Potrai osservare come in lingua Inglese diversi nomi di teoremi siano particolarmente azzeccati! Nel nome, infatti, sovente abbiamo anche una schematizzazione molto efficace dell'enunciato.

Già avevamo visto a suo tempo come i tre Criteri di Uguaglianza dei Triangoli vengono detti, in Inglese, rispettivamente:

- the **Side-Angle-Side Theorem (SAS)**: 1° Criterio
- the **Angle-Side-Angle Theorem (ASA)**: 2° Criterio
- the **Side-Side-Side Theorem (SSS)**: 3° Criterio

Qui potrai notare altre denominazioni molto “indovinate”, quali:

- the **“Hat” theorem** appunto
- the **Hypotenuse Leg Postulate**,
ossia quello che noi avevamo chiamato
“Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli”:
“Se due triangoli rettangoli hanno rispettivamente uguali
l'ipotenusa (Hypothenuse) e un cateto (Leg),
allora sono uguali”.

L'uso qui del termine “Postulate” anziché “Theorem” ci fa capire che nella loro organizzazione della Geometria, gli autori del sito www.regentsprep.org da cui è tratta la pagina hanno ritenuto di inserire questo enunciato fra gli Assiomi o Postulati anziché fra i Teoremi.

NOTA: lato (di triangolo, o di poligono) = **Side**; cateto, in un triangolo rettangolo = **Leg**

Dal sito www.regentsprep.org:

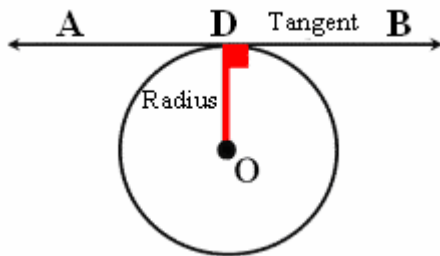
Tangents and Circles

A **tangent to a circle** is a line in the plane of the circle that intersects the circle in exactly one point.



If you spin an object in a circular orbit and release it, it will travel on a path that is tangent to the circular orbit.

Theorem:



If a line is tangent to a circle, it is perpendicular to the radius drawn to the point of tangency.

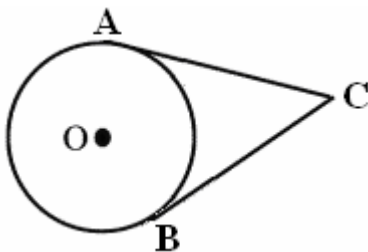
IF: AB is a tangent
D is point of tangency

THEN: $OD \perp AB$

Theorem:

Tangent segments to a circle from the same external point are congruent.

(You may think of this as the "**Hat**" Theorem because the diagram looks like a circle wearing a pointed hat.)

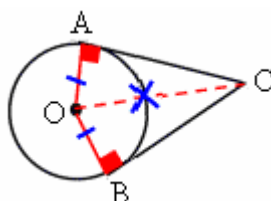


IF: AB is a tangent to circle O at A
CB is a tangent to circle O at C

THEN: $CA = CB$



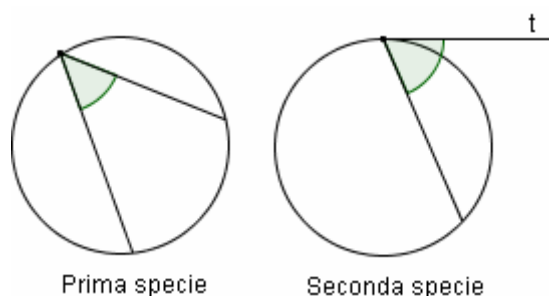
This theorem can be proven using congruent triangles and the previous theorem. The triangles shown below are congruent by the Hypotenuse Leg Postulate for Right Triangles. The radii (legs) are congruent and the hypotenuse is shared by both triangles. By using Corresponding Parts of Congruent Triangles are Congruent, this theorem is proven true.



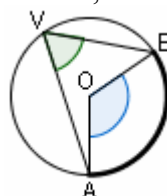
6.4 - ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA E ANGOLI AL CENTRO

Def. Si dice "**angolo alla circonferenza**" un angolo avente il **vertice sulla circonferenza**, e i lati

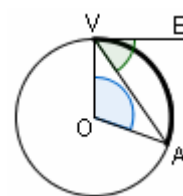
- ENTRAMBI SECANTI** la circonferenza (angolo alla circonferenza "di **prima specie**")
- oppure **UNO SECANTE E L'ALTRO TANGENTE** (angolo alla circ. "di **seconda specie**")



Per un angolo alla circonferenza,
l'angolo al centro "**CORRISPONDENTE**"
è quello che **contiene lo stesso arco**,
o, come si usa dire, che "**insiste sullo stesso arco**".



$\widehat{A\hat{V}B}$ e $\widehat{A\hat{O}B}$
sono
corrispondenti
←



$\widehat{A\hat{V}B}$ e $\widehat{A\hat{O}V}$
sono
corrispondenti
←

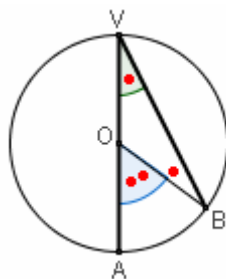
TEOREMA

Ogni angolo alla circonferenza è uguale a metà dell'angolo al centro corrispondente.

Per la **dimostrazione**, occorre **distinguere vari casi** (l'angolo alla circonf. sarà sempre indicato con $\widehat{A\hat{V}B}$).

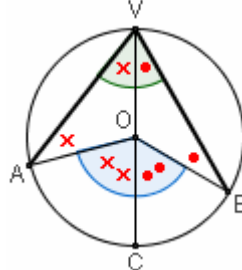
♫ **1° CASO:** $\widehat{A\hat{V}B}$ sia di 1^a SPECIE; si possono avere TRE SOTTOCASI, a seconda che il centro:

1) appartenga a uno dei lati dell'angolo



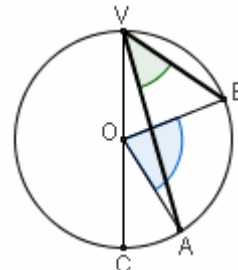
$$\begin{aligned} \widehat{A\hat{O}B} &= \widehat{A\hat{V}B} + \widehat{B\hat{O}V} = 2\widehat{A\hat{V}B} \\ \text{teorema} & \quad \text{angolo} & \quad \text{esterno,} & \quad \text{tr. OBV} & \quad \text{isoscele} & \quad \text{quindi } \widehat{A\hat{V}B} = \widehat{B\hat{O}V} \\ \text{perciò} & & & & & \\ \widehat{A\hat{V}B} &= \frac{1}{2} \widehat{A\hat{O}B} \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

2) sia interno all'angolo



$$\begin{aligned} \widehat{A\hat{V}C} &= \frac{1}{2} \widehat{A\hat{O}C} \text{ (sottocaso prec.)} \\ \widehat{C\hat{V}B} &= \frac{1}{2} \widehat{C\hat{O}B} \text{ (sottocaso prec.)} \\ \hline \widehat{A\hat{V}B} &= \frac{1}{2} (\widehat{A\hat{O}C} + \widehat{C\hat{O}B}) \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

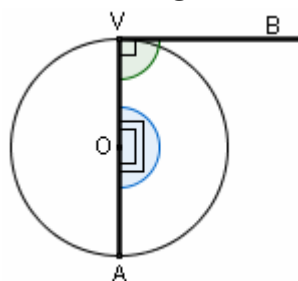
3) sia esterno all'angolo



Lasciata
al bravo lettore.
Per differenza
anziché per somma ...
La TH è
 $\widehat{A\hat{V}B} = \frac{1}{2} \widehat{A\hat{O}B}$

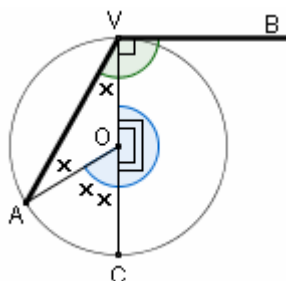
♫ **2° CASO:** $\widehat{A\hat{V}B}$ sia di 2^a SPECIE; si possono avere TRE SOTTOCASI, a seconda che il centro:

1) appartenga a uno dei lati dell'angolo



Semplicissimo: $\widehat{A\hat{V}B} = 90^\circ$
perché una tangente ad una circonf.
è sempre perpendicolare al raggio
che va al punto di contatto;
ma $\widehat{A\hat{O}V} = 180^\circ$;
pertanto $\widehat{A\hat{V}B} = \frac{1}{2} \widehat{A\hat{O}V}$ c.v.d.

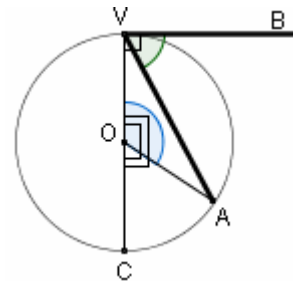
2) sia interno all'angolo



$$\begin{aligned} \widehat{A\hat{V}C} &= \frac{1}{2} \widehat{A\hat{O}C} \text{ (1° caso, 1° sott.)} \\ \widehat{C\hat{V}B} &= \frac{1}{2} \widehat{C\hat{O}V} \text{ (2° caso, 1° sott.)} \\ \hline \widehat{A\hat{V}B} &= \frac{1}{2} (\widehat{A\hat{O}C} + \widehat{C\hat{O}V}) \text{ c.v.d.} \end{aligned}$$

$\widehat{A\hat{O}V}_{\text{concavo}}$

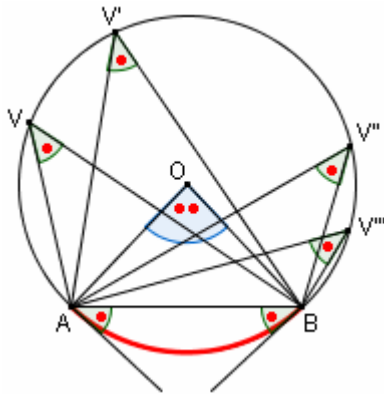
3) sia esterno all'angolo



Lasciata
al diligente lettore.
Per differenza
anziché per somma ...
La tesi è $\widehat{A\hat{V}B} = \frac{1}{2} \widehat{A\hat{O}V}$

COROLLARIO 1

Tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su di uno stesso arco sono uguali.



Infatti sono tutti uguali a metà dello stesso angolo al centro!

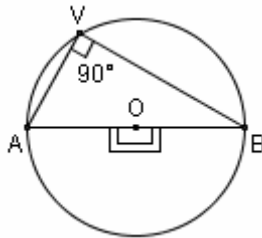
Nella figura:

$$\widehat{V} = \widehat{V}' = \widehat{V}'' = \widehat{V}''' = \dots$$

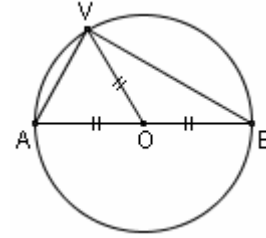
perché sono tutti uguali a $\frac{1}{2} \widehat{AOB}$.

COROLLARIO 2

Un angolo alla circonferenza che insiste su di una semicirconferenza (o, come si preferisce dire, che "è inscritto" in una semicirconferenza; o, come si suole anche dire seppure impropriamente, che "insiste su un diametro"), è RETTO.



Nella figura, l'angolo alla circonferenza $\widehat{AVB}$ "insiste" sulla semicirconferenza che va da A fino a B, e NON passa per V; si può anche dire (e, in effetti, *si preferisce* dire) che "è **inscritto**" nell'**altra** semicirconferenza (quella che va da A fino a B, passando per V). Bene! $\widehat{AVB}$ è retto, perché è metà dell'angolo al centro corrispondente $\widehat{AOB}$ che è piatto.

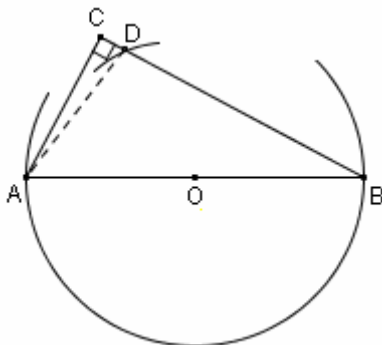


IN ALTERNATIVA, la dimostrazione dello stesso enunciato si potrebbe anche effettuare applicando, al triangolo ABV, il teorema secondo cui "se in un triangolo la mediana relativa ad un lato è metà del lato stesso, allora il triangolo è rettangolo (e, precisamente, l'angolo retto è quello opposto al lato in questione)".

COROLLARIO 3

In un triangolo rettangolo, la circonferenza avente per diametro l'ipotenusa passa per il vertice dell'angolo retto.

Questo teorema, che può essere pensato come l'inverso del precedente corollario 2, si può dimostrare in diversi modi. Ad esempio, è bella la seguente dimostrazione per assurdo.

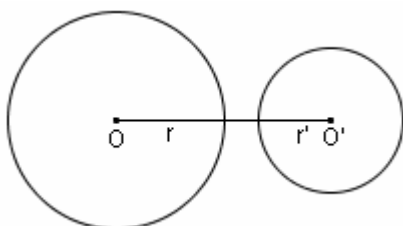


Sia ABC un triangolo rettangolo in C; se la circonferenza di diametro AB non passasse per C, allora interseccherebbe il lato BC (o il suo prolungamento) in un punto D distinto da C. Perciò l'angolo $\widehat{ADB}$ sarebbe retto perché inscritto in una semicirconferenza, ed essendo pure retto (per ipotesi) l'angolo $\widehat{ACB}$, dal punto A si potrebbero condurre alla retta BC due distinte perpendicolari, mentre sappiamo che la perpendicolare per un punto dato a una retta data è unica.

L'assurdo trovato dimostra la tesi.

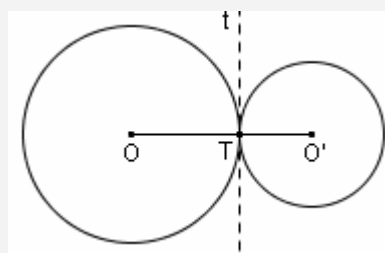
6.5 - POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE CIRCONFERENZE

Due circonferenze (per tutte le figure di questa pagina, s'intende di indicare i due raggi con r ed r') possono essere: **esterne**, **tangenti esternamente**, **secanti**, **tangenti internamente**, **interne**.



Nel caso di due **circonferenze ESTERNE** si ha
 $OO' > r + r'$

(vale a dire, la distanza fra i centri
 è maggiore della somma dei raggi)



Nel caso di due circonferenze TANGENTI ESTERNAMENTE i due centri e il punto di contatto sono allineati

(in altre parole, *la congiungente i due centri
 passa per il punto di contatto; vedi NOTA*).

Ciò è del tutto evidente all'intuizione
 per motivi di simmetria; ma è anche dimostrabile
 (vedi APPROFONDIMENTO 1 alla pagina successiva).

Ne deriva che $OO' = r + r'$

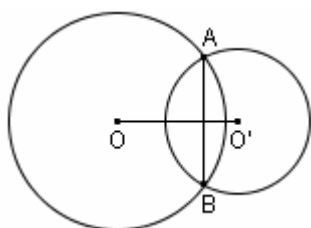
(la distanza fra i centri è uguale alla somma dei raggi)

**Nel punto di contatto, le due circonferenze
 ammettono una retta tangente comune:**

infatti la perpendicolare ad OO'
 passante per il punto di contatto T

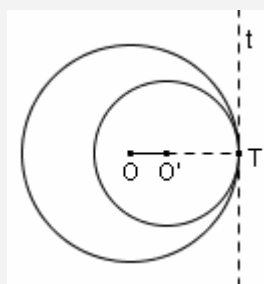
- è tangente alla circonferenza di centro O
 (perché perpendicolare al raggio OT nel suo estremo)
- ed è anche tangente alla circonferenza di centro O'
 (perché perpendicolare al raggio O'T nel suo estremo)

*NOTA - Dire che
 "la congiungente i due centri
 passa per il punto di contatto"
 equivale, evidentemente, a dire che
 "i due raggi tracciati
 da ciascun centro al punto di contatto
 stanno uno sul prolungamento
 dell'altro (=formano angoli di 180°)"*



Nel caso di due **circonferenze SECANTI**, si ha
 $OO' < r + r'$

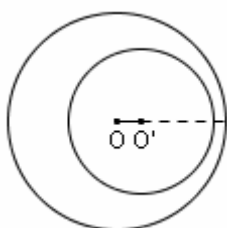
E' inoltre facile dimostrare
 (APPROFONDIMENTO 2 alla pagina successiva)
 che **la congiungente i centri (OO')
 è l'asse della corda comune (AB)**



Anche nel caso di due **circonferenze
 TANGENTI INTERNAMENTE** si può dimostrare
 (come d'altronde si intuisce per evidenti motivi di simmetria)
 che **i due centri e il punto di contatto sono allineati**,
 ossia che *la congiungente i due centri, se prolungata,
 passa per il punto di contatto*, oppure, volendo, che
*i due raggi aventi un estremo nel punto di contatto
 sono parzialmente sovrapposti*.

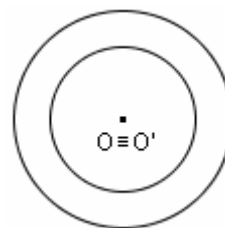
Ne deriva che $OO' = r - r'$ (se r' è il raggio più piccolo):
la distanza fra i centri è uguale alla differenza dei raggi.

La perpendicolare ad OO' nel punto di contatto T,
 essendo simultaneamente perpendicolare ai due raggi OT e O'T
 nel loro estremo, è tangente ad entrambe le circonferenze.



Nel caso
 delle
**circonferenze
 INTERNE**,
 si avrà
 $OO' < r - r'$

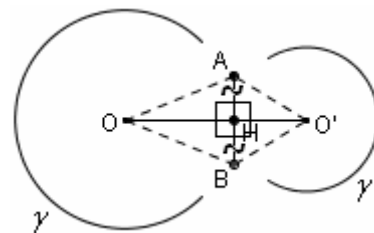
Un caso particolare
 di **circonferenze interne**
 è rappresentato da due
**circonferenze
 CONCENTRICHE**
 (= aventi lo stesso centro).



APPROFONDIMENTO 1

Nel caso di due circonferenze tangenti esternamente i due centri e il punto di contatto sono allineati

(in altre parole, la congiungente i due centri passa per il punto di contatto).



L'enunciato è evidente all'intuizione per simmetria; tuttavia, dimostriamolo.

Siano γ, γ' due circonferenze tangenti esternamente;

indichiamo con O e O' i loro centri, con A il loro punto di contatto.

Se, per assurdo, A NON stesse sulla congiungente OO' ,

allora potremmo andare a considerare il punto B ,

simmetrico di A rispetto alla congiungente OO' (ossia, il punto B ottenibile tracciando da A il segmento AH perpendicolare ad OO' , poi prolungandolo di un segmento $HB = AH$).

Avremmo subito le uguaglianze $AHO = BHO$ e $AHO' = BHO'$ (1° Criterio)

da cui si trarrebbe $OB = OA$ e $O'B = O'A$.

Ma $OB = OA$ significa che anche OB , al pari di OA , è un raggio della circonferenza γ , e ciò implica $B \in \gamma$.

Analogamente, $O'B = O'A$ significa che anche $O'B$, al pari di $O'A$, è un raggio di γ' , e ciò implica $B \in \gamma'$.

Avendosi ora $B \in \gamma$ e $B \in \gamma'$ ne deriva che le due circonferenze hanno in comune *anche* il punto B ,

e *non soltanto* il punto A : non sono quindi tangenti, come avevamo supposto.

L'assurdo trovato dimostra la tesi.

APPROFONDIMENTO 2

Nel caso di due circonferenze secanti, la congiungente i centri (OO') è l'asse della corda comune (AB).

Questo enunciato si può dimostrare in più modi diversi, ad esempio ragionando nel modo seguente.

Poiché $OA = OB$,

il punto O è equidistante dagli estremi del segmento AB

per cui appartiene al suo asse;

d'altra parte, essendo $O'A = O'B$, anche il punto O' è equidistante dagli estremi del segmento AB e quindi appartiene al suo asse.

Ma allora, sia O che O' appartengono all'asse del segmento AB ;

in altre parole, l'asse di AB passa sia per O che per O' :

l'asse di AB si identifica con la retta OO' .

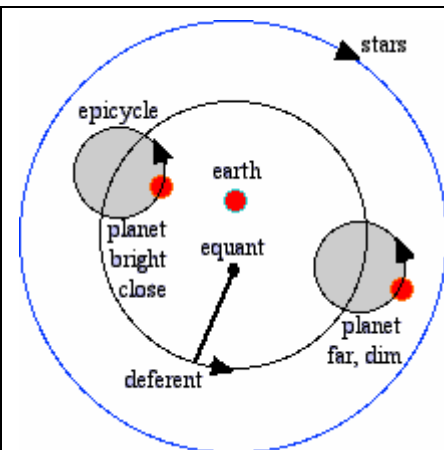
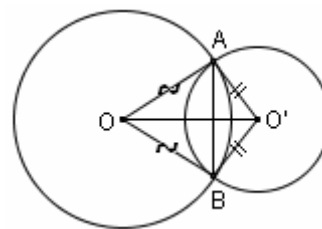


Immagine tratta dal sito <http://web.me.com/dtrapp/> di Dave Trapp



Apollonio (III secolo A.C.), Ipparco (II secolo A.C.) e Tolomeo (II secolo D.C.) erano così convinti che i movimenti dei corpi celesti non potessero avere altra forma se non quella "perfetta" della circonferenza, che per conciliare questo assioma con le concrete osservazioni del cielo elaborarono complicati sistemi di "epicicli", "deferenti", "eccentrici" ed "equanti" con cui, a loro parere, le apparenti irregolarità osservabili nel moto dei pianeti erano interpretabili come l'effetto di una combinazione di moti, ciascuno dei quali, per conto suo, era esattamente circolare.

Quest'altra immagine rappresenta invece la visione del sistema solare di Thomas Digges, un astronomo inglese del XVI secolo che abbracciò la teoria eliocentrica di Copernico, ma che comunque rappresentava ancora le orbite dei pianeti come delle perfette circonferenze concentriche.

Fu il tedesco Johannes Kepler (1571-1630), noto in Italia come "Keplero", a sostenere per primo che i pianeti non descrivono traiettorie circolari bensì ellittiche.

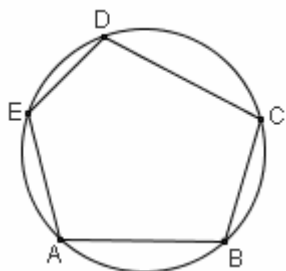
Il paragrafo sulle *coniche* (pag. 98) dice qualcosa in più sulle orbite dei corpi celesti.

6.6 - POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI AD UNA CIRCONFERENZA

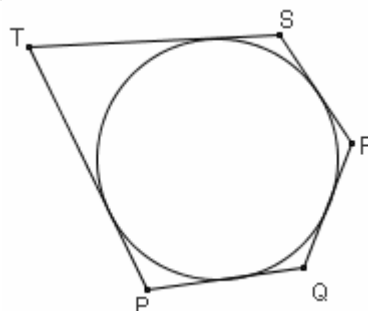
Definizione

Un poligono si dice:

"**inscritto** in una circonferenza" se tutti i suoi vertici stanno sulla circonferenza



"**circoscritto** ad una circonferenza" se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza



Se un poligono è **inscritto** in una circonferenza, si dice che questa circonferenza è "**circoscritta**" al poligono; e se un poligono è **circoscritto** ad una circonferenza, questa si dirà "**inscritta**" nel poligono.

PROPRIETA' DEI QUADRILATERI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI

TEOREMA

In un quadrilatero inscritto, o inscrivibile, in una circonferenza, gli angoli opposti sono supplementari.

IPOTESI ABCD inscritto (o inscrivibile) in una circonferenza

TESI $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$, $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

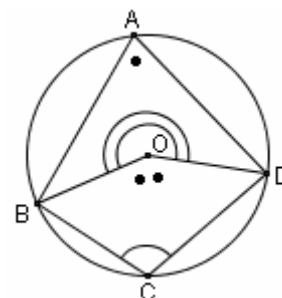
Dimostrazione

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \widehat{BOD}_{\text{convesso}} \text{ (angolo alla circ., angolo al centro corrispondente)}$$

$$\hat{C} = \frac{1}{2} \widehat{BOD}_{\text{concavo}} \text{ (" ")}$$

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{C} &= \frac{1}{2} \widehat{BOD}_{\text{convesso}} + \frac{1}{2} \widehat{BOD}_{\text{concavo}} = \\ &= \frac{1}{2} (\widehat{BOD}_{\text{convesso}} + \widehat{BOD}_{\text{concavo}}) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ \end{aligned}$$

... e analogamente, tracciando OA e OC, per la somma $\hat{B} + \hat{D}$.



TEOREMA (inverso del precedente)

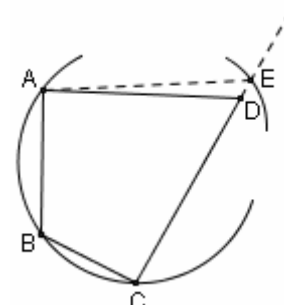
Un quadrilatero con gli angoli opposti supplementari è inscrivibile in una circonferenza.

IPOTESI ABCD ha gli angoli opposti supplementari: $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$; $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

TESI ABCD è inscrivibile in una circonferenza
(= esiste una circonferenza, che passi per tutti e quattro i punti A, B, C, D)

Dimostrazione

Consideriamo la circonferenza (certamente esistente, per un teorema noto) che passa per i tre punti A, B, C: vogliamo dimostrare che essa contiene anche D. Infatti, se, per assurdo, tale circonferenza NON passasse per D, allora intersecherebbe la retta CD in un punto E, distinto da D (NOTA).



Il quadrilatero ABCE sarebbe dunque inscritto in una circonferenza, e di conseguenza, per il teorema diretto, avrebbe gli angoli opposti supplementari; in particolare, $\hat{AEC}$ sarebbe supplementare di $\hat{B}$.

Ma anche $\hat{ADC}$ è, per ipotesi, supplementare di $\hat{B}$, quindi si avrebbe $\hat{AEC} = \hat{ADC}$: entreremmo così in contraddizione col Teorema dell'Angolo Esterno (applicato al triangolo AED).

NOTA:

il punto E potrebbe trovarsi all'interno del segmento CD, oppure su uno dei suoi prolungamenti; comunque il ragionamento da farsi è, in entrambi i casi, il medesimo.

TEOREMA. In un quadrilatero circoscritto, o circoscrivibile, ad una circonferenza, la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

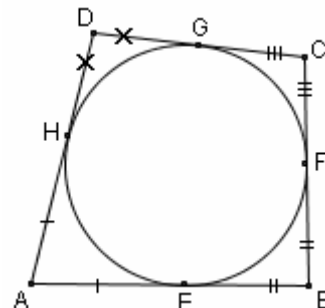
IPOTESI ABCD circoscritto (o circoscrivibile) ad una circonferenza

TESI $AB+DC = AD+BC$

Dimostrazione

Molto semplice, basata sul “teorema del Cappello”, quello secondo il quale i due segmenti di tangente condotti a una circonferenza da un punto esterno sono uguali.

$$\begin{array}{l} AE = AH \\ BE = BF \\ CG = CF \\ DG = DH \\ \hline \underbrace{AE + BE + CG + DG}_{AB+DC} = \underbrace{AH + BF + CF + DH}_{AD+BC} \end{array}$$



TEOREMA (inverso del precedente)

Un quadrilatero in cui la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due, è circoscrivibile ad una circonferenza.

IPOTESI $AB+DC = AD+BC$

TESI ABCD è circoscrivibile ad una circonferenza

(= esiste una circonf., che sia tangente a tutti e quattro i lati di ABCD)

Dimostrazione

Consideriamo la circonferenza tangente a TRE dei quattro lati,

ad esempio ai lati AD, AB e BC (NOTA);

vogliamo dimostrare che tale circonferenza è tangente anche al lato rimanente DC.

Infatti, se, per assurdo, la circonferenza in questione *non* fosse tangente a DC,

allora, conducendo da D l'altra tangente (oltre a DA) alla circonferenza,

tale tangente sarebbe una retta distinta da DC,

e, quindi, andrebbe a intersecare la retta BC in un punto E, distinto da C.

Il quadrilatero ABED risulterebbe, dunque, circoscrivibile ad una circonf., e di conseguenza, per il teor. diretto, la somma di due suoi lati opposti sarebbe uguale alla somma degli altri due: $AB + DE = AD + BE$.

Tuttavia si ha anche, per ipotesi, $AB + DC = AD + BC$...

... quindi da quanto scritto seguirebbe, sottraendo membro a membro, che $DC - DE = BC - BE$.

Ma $BC - BE = CE$, e allora nel triangolo CDE un lato sarebbe uguale alla differenza degli altri due: assurdo.

NOTA Occorre però, se si vuol esser rigorosi, dimostrare l'ESISTENZA di detta circonferenza.

A tale scopo, consideriamo la bisettrice a dell'angolo $\hat{A}$ e la bisettrice b dell'angolo $\hat{B}$.

Ciascuno dei due angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ è minore di un angolo piatto;

quindi la somma delle loro metà è minore della somma di due retti, ossia minore di un piatto.

Insomma, $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 < 180^\circ$ e quindi le due rette a e b, non formando angoli coniugati interni supplementari, non sono parallele: si devono incontrare. Indichiamo con W il loro punto di intersezione, e proiettiamo W su AD, AB, BC.

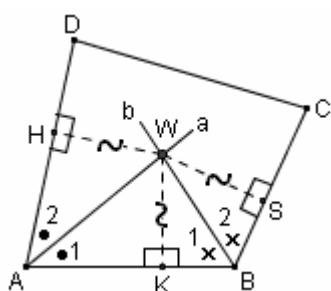
Poiché W appartiene alla bisettrice di $\hat{A}$, avremo $WH = WK$, e poiché W appartiene anche alla bisettrice dell'angolo $\hat{B}$, avremo pure $WK = WS$.

In definitiva, è $WH = WK = WS$. Se noi ora puntiamo il compasso in W con apertura uguale a $WH = WK = WS$, la circonferenza che tratteremo:

I) passerà per H, K, S;

II) e sarà tangente, in questi punti, alle tre rette AD, AB e BC, per il fatto che ciascuna di queste tre rette è perpendicolare ad un raggio nel suo estremo.

La nostra tesi (l'esistenza di una circonf., tangente a tutte e tre le rette AD, AB, BC) resta così provata.

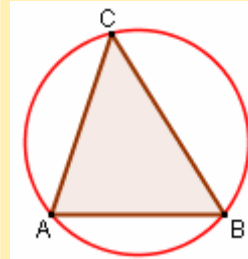
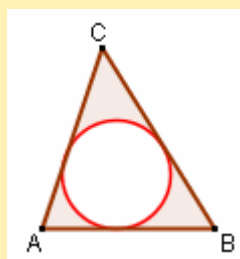


TEOREMA

Per ogni TRIANGOLO, esistono sempre sia la circonf. inscritta che la circonf. circoscritta.

♪ Il centro della circonferenza INSCRITTA coincide col punto di incontro delle BISETTRICI, ossia con l' INCENTRO;

♪ il centro della circonferenza CIRCOSCRITTA coincide col punto di incontro degli ASSI, ossia col CIRCOCENTRO.



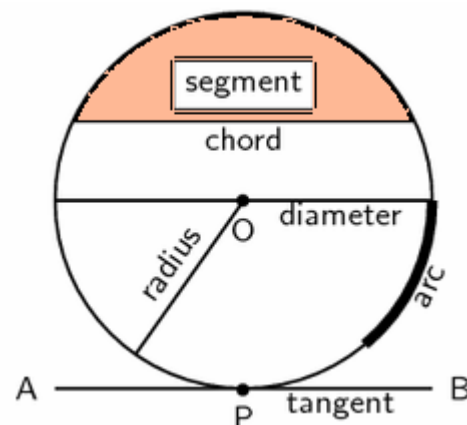
La dim. è basata su enunciati già acquisiti ... comunque, puoi vederla a pag. 185.

RIPASSO della circonferenza

tramite il sito <http://m.everythingmaths.co.za>

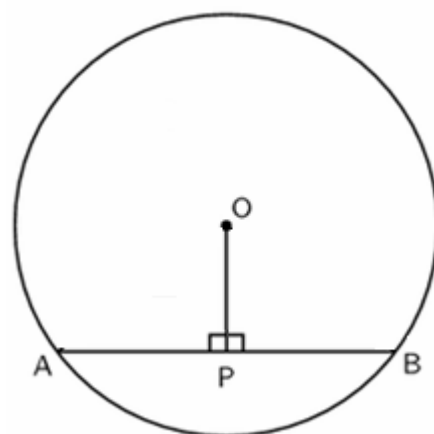
- ❑ **arc:** an arc is a part of the circumference of a circle.
[*Circumference* si pronuncia sə'kʌmfərəns, con accento dopo l'apostrofo ossia sulla 2^a sillaba]
- ❑ **chord:** a straight line joining the ends of an arc.
- ❑ **radius:** a radius, r , is any straight line from the centre of the circle to a point on the circumference.
- ❑ **diameter:** a diameter, $\varnothing$, is a special chord that passes through the centre of the circle.
[Pronuncia dai 'ləmitə, accento dopo l'apostrofo]
- ❑ **segment:** a segment is the part of the circle that is cut off by a chord.
A chord divides a circle into two segments.
- ❑ **tangent:** a tangent is a line that makes contact with a circle at one point on the circumference (AB is a tangent to the circle at point P)

Quali sono i termini corrispondenti in Italiano?



The line drawn from the centre of a circle,
perpendicular to a chord,
bisects the chord.

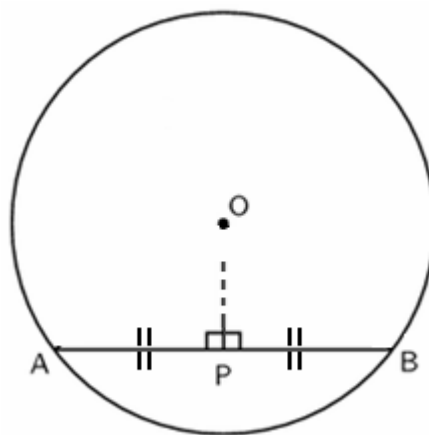
Come si dimostra? Si tracciano ...



The perpendicular bisector of a chord
passes through the centre of the circle.

*Che parola italiana usiamo di norma al posto
dell'espressione inglese "perpendicular bisector"?*

Come si dimostra l'enunciato?



RIPASSO della circonferenza

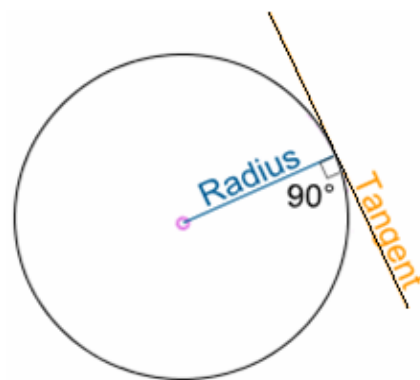
tramite il sito www.mathsisfun.com

Tangent Angle

A tangent is a line that just touches a circle at one point.

It always forms a **right angle** with the circle's radius as shown here.

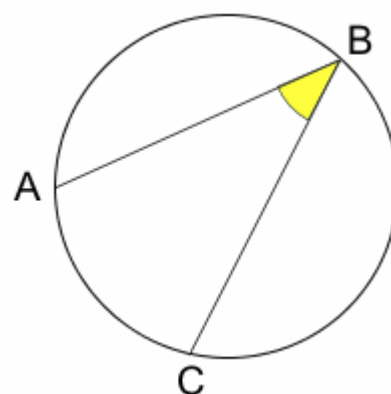
Ti ricordi la dimostrazione (per assurdo)?



Inscribed Angle:

an angle made from points sitting on the circle's circumference

A and C are "end points"; B is the "apex point"



Inscribed Angle Theorems

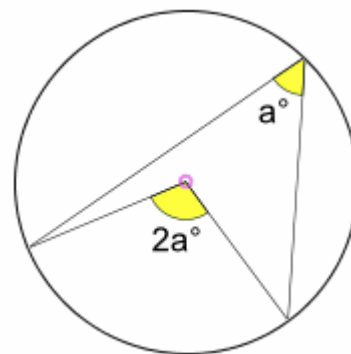
An inscribed angle a° is half of the central angle $2a^\circ$

(called the **Angle at the Center Theorem**)

Sapresti fare la dimostrazione con riferimento alla figura qui a fianco?

Ti ricordi quali sono gli angoli alla circonferenza "di seconda specie"?

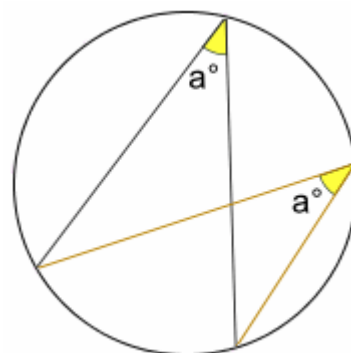
Vale anche per essi il teorema?



And (keeping the endpoints fixed) the angle a° is always the same, no matter where it is on the circumference

(**Angles Subtended by Same Arc Theorem**)

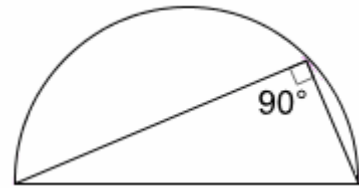
Perché questo teorema è un corollario del precedente?



Angle in a Semicircle

An angle **inscribed** in a **semicircle**
is always a right angle
(the end points are either end of a circle's diameter,
the apex point can be anywhere on the circumference)

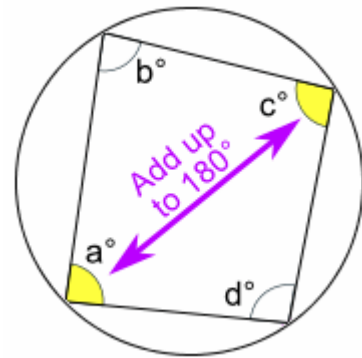
Ti ricordi come si dimostra?



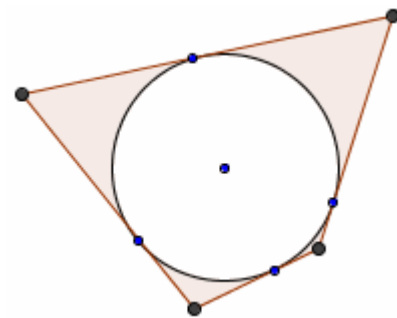
Cyclic Quadrilateral

A "Cyclic" Quadrilateral
has every vertex on a circle's circumference
A Cyclic Quadrilateral's opposite angles add to 180° :
 $a^\circ + c^\circ = 180^\circ$; $b^\circ + d^\circ = 180^\circ$ [gradi = degrees]

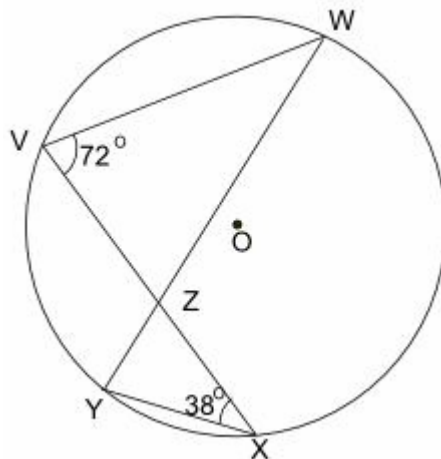
Ti ricordi come si dimostra?



*E qual è, invece, la proprietà caratteristica
dei quadrilateri CIRCOscritti?*
Dimostrala, utilizzando la figura qui a destra →



V, W, X and Y →
are points on the
circumference.
Chords VX and WY
intersect
at the point Z.
 $\angle XVW = 72^\circ$
and $\angle VXY = 38^\circ$.
What is the size
of $\angle VZW$?

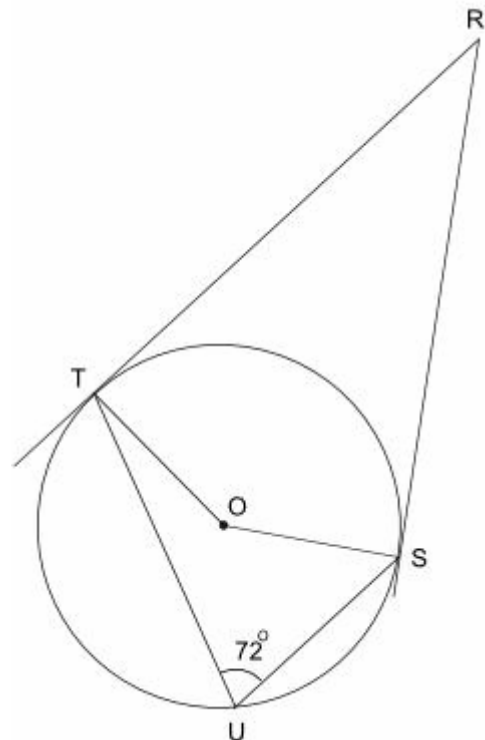


*Le RISPOSTE
sono le soluzioni
delle seguenti equazioni:*

$$(x+12)^2 = x^2 + 4(5x+106) \quad \uparrow$$

$$3(x+1) + 64 = 5(x-1) \quad \rightarrow$$

→
RS and RT are tangents
to the circle center O.
 $\angle SUT = 72^\circ$
What is the size
of $\angle SRT$?



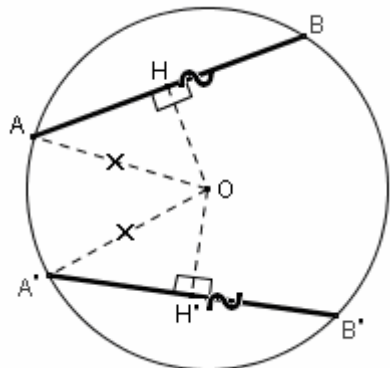
GEOMETRIA: ESERCIZI SUL CAPITOLO 6

1) ESERCIZIO SVOLTO

In una stessa circonferenza,

a) due corde uguali hanno ugual distanza dal centro;

b) e viceversa, se due corde hanno ugual distanza dal centro, allora sono uguali.



a)

HP $AB = A'B'$, $OH \perp AB$, $OH' \perp A'B'$
TH $OH = OH'$

DIM.

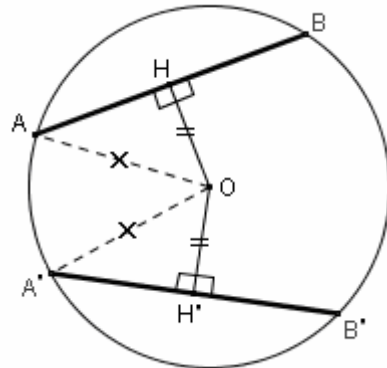
Traccio i due raggi OA e OA'
 e confronto i due triangoli OAH , $OA'H'$:

- sono entrambi rettangoli
- $OA = OA'$ (raggi di una stessa circonferenza)
- $AH = \frac{1}{2}AB$ per HP, $A'H' = \frac{1}{2}A'B'$ per HP, $AB = A'B'$

** è noto che la perpendicolare a una corda condotta dal centro dimezza la corda stessa*

quindi $OAH = OA'H'$ per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli (hanno rispettivamente uguali l'ipotenusa e un cateto).

Segue la tesi.



b)

HP $OH \perp AB$, $OH' \perp A'B'$, $OH = OH'$
TH $AB = A'B'$

DIM.

Traccio i due raggi OA e OA'
 e confronto i due triangoli OAH , $OA'H'$:

- sono entrambi rettangoli
- $OA = OA'$ (raggi di una stessa circonferenza)
- $OH = OH'$ (ipotesi)

quindi $OAH = OA'H'$ per il Criterio Particolare di Uguaglianza dei Triangoli Rettangoli.

Segue $AH = A'H'$;

allora è pure $AB = 2AH = 2A'H' = A'B'$ c.v.d.

** AB e $A'B'$ sono i doppi di AH e $A'H'$ rispettivamente, perché è noto che la perpendicolare a una corda condotta dal centro dimezza la corda stessa.*

2) ☀ (dimostrazione guidata a pagina 186)

Dimostra che in una circonferenza, due punti di una corda, che abbiano ugual distanza dagli estremi di questa, sono equidistanti dal centro (*Indicazione: dal centro, traccia la perpendicolare alla corda*)

- 3) ➡ Dato un angolo convesso di vertice O e di lati a , b , se con centro in O si traccia una circonferenza di raggio r , che intersechi la semiretta a in A e la b in B , poi con centri A e B rispettivamente si tracciano altre due circonferenze sempre con lo stesso raggio r della precedente, allora, detto C il 2° punto di intersezione (oltre a O) di tali due ultime circonferenze, la semiretta OC è bisettrice di $\widehat{aOb}$.
- 4) Se si traccia una circonferenza con centro nel vertice A di un triangolo isoscele ABC di base BC , e si indicano con D , E i punti in cui tale circonferenza taglia i lati obliqui (o i loro prolungamenti dalla parte della base), allora la congiungente DE è parallela a BC .
- 5) In una circonferenza, si tracciano un diametro AB e una corda CD ad esso parallela. Si indicano poi con C' e D' rispettivamente, le proiezioni dei punti C e D su AB . Dimostrare che $AC' = BD'$.
- 6) Se in una circonferenza due corde uguali AB e CD vengono prolungate di due segmenti uguali $BP = DQ$, allora l'asse del segmento PQ passa per il centro (*basta dimostrare che il centro è equidistante da P e da Q ...*)
- 7) ➡ Se in una circonferenza, dai due estremi di un diametro, si tracciano due corde parallele fra loro, allora: I) queste corde sono uguali II) la congiungente gli altri due estremi passa per il centro

8) ESERCIZIO SVOLTO

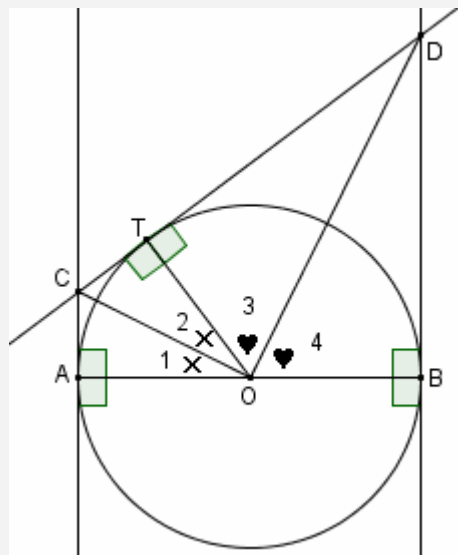
In una circonferenza di centro O , sia AB un diametro.
 Condotte le tangenti alla circonferenza in A e in B ,
 e una terza tangente
 che incontri le altre due in C e in D ,
 dimostrare che $\widehat{C\hat{O}D}$ è retto.

HP AB diametro, T punto della circonferenza
 AC , BD , CD (per T) tangenti

TH $\widehat{C\hat{O}D} = 90^\circ$

NOTA

♥ In generale, quando si traccia
 una tangente ad una circonferenza,
 è sempre consigliabile
 evidenziare con un quadratino
 gli angoli retti che essa forma
 con il raggio che va ai punti di contatto.



DIMOSTRAZIONE

E' noto che quando da un punto esterno partono due tangenti a una circonferenza,
 la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice
 sia dell'angolo formato dalle due tangenti,
 sia dell'angolo formato dai due raggi che vanno ai punti di contatto.

Ora, pensando alle due tangenti che si tagliano in C , ne consegue

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$$

e pensando alle due tangenti che si tagliano in D , ne deriva

$$\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$$

Allora, poiché $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^\circ$, si avrà

$$\widehat{O_2} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_3} = 180^\circ$$

$$2\widehat{O_2} + 2\widehat{O_3} = 180^\circ$$

$$2(\widehat{O_2} + \widehat{O_3}) = 180^\circ$$

$$\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ$$

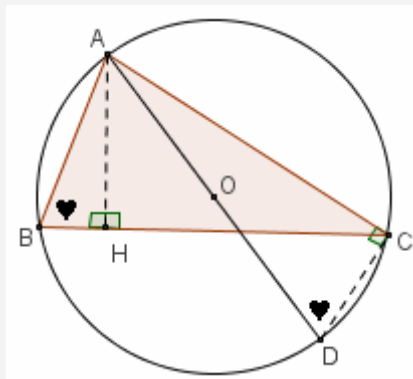
ossia

$$\widehat{C\hat{O}D} = 90^\circ, \text{ c.v.d.}$$

- 9) Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono le due tangenti,
 l'angolo da queste formato e l'angolo formato dai due raggi che vanno ai punti di contatto
 sono fra loro supplementari.
- 10) ➡ Siano PA e PB le due tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno P .
 Sia C un punto arbitrario, preso sul più piccolo dei due archi di estremi A e B .
 Si tracci la tangente in C e si indichino con D , E i punti in cui questa tangente interseca PA e PB .
 Dimostrare che il perimetro del triangolo PDE rimane costante, al variare del punto C .
- 11) ☀ (dimostrazione guidata a pagina 186)
 Prese due circonferenze concentriche (sia O il centro comune),
 e un punto A esterno ad entrambe,
 si tracciano le due tangenti AB , AC alla circonferenza maggiore,
 e le due tangenti AD , AE alla minore (con B , D situati dalla stessa parte rispetto ad AO).
 E' richiesto di dimostrare che:
- I. $\widehat{B\hat{A}D} = \widehat{C\hat{A}E}$
 - II. $BCED$ è un trapezio isoscele
 - III. il punto di incontro delle diagonali di $BCED$ sta su AO .

12) ESERCIZIO SVOLTO

In una circonferenza di centro O
 è inscritto un triangolo ABC (vedi figura).
 Si tracciano l'altezza AH e il diametro AD .
 E' richiesto di dimostrare che
 i due angoli $\widehat{BAH}$ e $\widehat{DAC}$ sono uguali



HP ABC triangolo inscritto
 $AH \perp BC$

TH $\widehat{BAH} = \widehat{DAC}$

DIMOSTRAZIONE

Congiungiamo C con D .

L'angolo $\widehat{ACD}$ è retto perché inscritto in una semicirconferenza.

Gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono su di uno stesso arco.

Allora i due triangoli ABH e ADC ,

poiché hanno due angoli rispettivamente uguali,

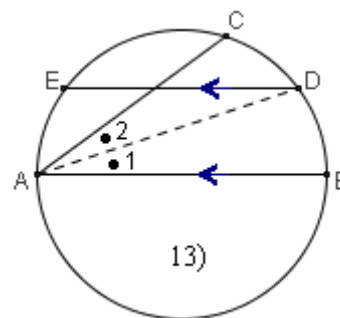
avranno uguale anche l'angolo rimanente:

$$\widehat{BAH} = 180^\circ - \widehat{AHB} - \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{ACD} - \widehat{D} = \widehat{DAC}$$

13) ☀ (vedi figura; **dimostrazione guidata a pagina 187**)

Considera un angolo alla circonferenza $\widehat{BAC}$,
 con B e C sulla circonferenza,
 tracciane la bisettrice, fino ad incontrare la circonferenza in D ,
 poi per D traccia la parallela al lato AB dell'angolo,
 che incontri la circonferenza in E .

Dimostra a questo punto che $DE = AC$.

14) ➡ Se i punti $V, V', V'', V''', \dots$

“vedono un segmento dato AB sotto lo stesso angolo”,
 vale a dire:

$$\widehat{AVB} = \widehat{AV'B} = \widehat{AV''B} = \widehat{AV'''B} = \dots,$$

allora i punti $A, B, V, V', V'', V''', \dots$ stanno su di una stessa circonferenza

(*dimostra, per assurdo,*

*che la circonferenza passante per i 3 punti A, B, V
 deve necessariamente passare anche per V'*)

15) Dimostra che la circonferenza, avente per diametro uno dei lati di un triangolo, interseca gli altri due lati nei piedi delle altezze ad essi relative.

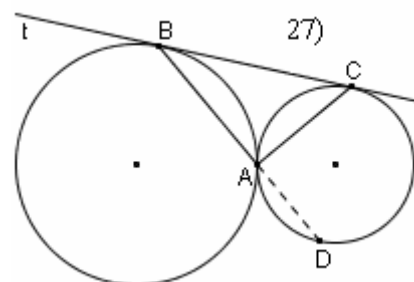
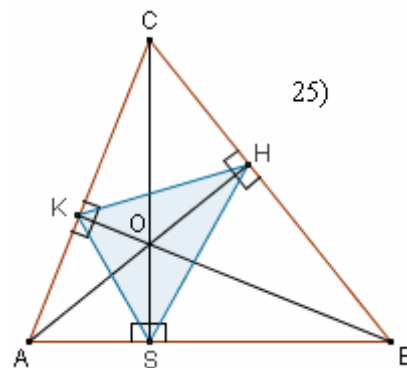
16) Siano PA e PB le due tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno P . Sia F un punto arbitrario, preso sul maggiore dei due archi di estremi A e B . La somma $\widehat{PAF} + \widehat{PBF}$ rimane costante, al variare del punto F : dimostrallo.

17) ➡ La tangente nel punto medio di un arco è parallela alla corda sottesa dall'arco stesso; e viceversa,

se in una circonferenza una tangente è parallela a una corda, allora il punto di contatto è il punto medio dell'arco che sottende la corda.

NOTA - Ricorda che in una circonferenza ad angoli al centro uguali corrispondono archi uguali e corde uguali, e viceversa.

- 18) Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente in T .
Tracciata per T una retta r , che intersechi la circonferenza di centro O in A ,
e quella di centro O' in A' , dimostrare che il raggio OA è parallelo al raggio $O'A'$.
- 19) Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente in T .
Tracciata per T una retta r ,
che intersechi la circonferenza di centro O in A , e quella di centro O' in A' ,
e tracciate le tangenti in A e in A' , dimostrare che tali due rette tangenti sono parallele.
- 20) ☼ **(dimostrazione guidata a pagina 187)**
Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente in T . Si traccino per T :
 - una retta r , che intersechi le due circonferenze rispettivamente in A e in A' ,
 - e una seconda retta s , che le intersechi rispettivamente in B e in B' .
 Dimostrare che le due corde AB e $A'B'$ sono parallele fra loro.
- 21) Due circonferenze sono tangenti internamente in B .
Dall'estremo A del diametro AB della circonferenza maggiore, si conduca una tangente alla minore,
che la tocchi in C e vada poi a intersecare la circonferenza maggiore in D .
Dimostrare che:
 I) indicato con O il centro della circonferenza minore, è $CO \parallel DB$
 II) BC taglia in due parti uguali (= "biseca") l'angolo $\widehat{ABD}$
- 22) Su di una circonferenza di centro O , si prende un punto qualunque P ,
dopodiché, detto AB un diametro, si tracciano le due rette tangenti in P e in B ,
indicando con Q il loro punto di incontro.
Dimostrare che la congiungente QO è parallela alla corda PA .
- 23) Se una circonferenza è inscritta in un triangolo isoscele, il punto di contatto
della base del triangolo con la circonferenza è il punto medio della base stessa.
- 24) ☼ **(dimostrazione guidata a pagina 187)**
In un triangolo isoscele il vertice, il centro della circonferenza inscritta e il punto medio della base
sono allineati.
- 25) ➡ *(L'ultima parte è molto impegnativa)*
In un triangolo ABC ,
le tre altezze sono AH , BK , CS , l'ortocentro è O .
 a) Dimostra che il quadrilatero $OHCK$ è inscrittibile in una circonf.
 b) Dimostra che il quadrilatero $ABHK$ è inscrittibile in una circonf.
 c) I centri di tali due circonferenze stanno in posizioni molto particolari: sapresti specificarle? E giustificare la risposta?
 d) Quali altri quadrilateri della figura sono inscrittibili in una circonferenza?
 e) Dimostra che le tre altezze AH , BK , CS sono bisettrici degli angoli del triangolo HKS avente per vertici i piedi delle altezze stesse.
- 26) Due circonferenze, di centri O e O' , sono secanti;
 A e B ne sono i punti di intersezione.
Per B si conduce una retta che taglia le due circonferenze in C e in C' rispettivamente.
Dimostrare che gli angoli $\widehat{CAC'}$ e $\widehat{OAO'}$ sono uguali fra loro.
- 27) ➡ Due circonferenze sono tangenti esternamente in A ,
e una retta tangente comune t tocca
la prima circonferenza in B e la seconda in C .
 a) Dimostra che l'angolo $\widehat{BAC}$ è retto
 b) Dimostra che, se si prolunga la corda BA fino ad incontrare la seconda circonferenza in D , la congiungente CD è un diametro della seconda circonferenza.



28) (importante; ESERCIZIO SVOLTO)

Per ogni TRIANGOLO, esiste sempre la circonferenza INSCRITTA.**Il suo centro coincide col punto di incontro delle BISETTRICI, ossia con l' INCENTRO.**

Sia ABC un triangolo qualsiasi.

Tracciamo le bisettrici dei tre angoli interni:

esse, come sappiamo, si incontreranno in uno stesso punto

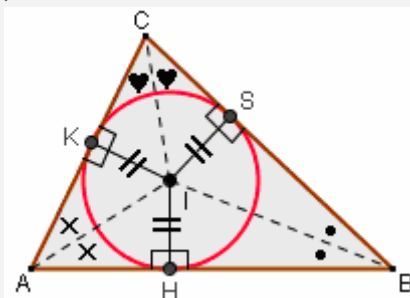
(l'*incentro*, indicato in figura con I).

E' noto che ogni punto della bisettrice di un angolo è equidistante

dai lati dell'angolo stesso: quindi si avrà $IH = IK = IS$.Perciò, se si punta il compasso in I con raggio $IH = IK = IS$,

la circonferenza tracciata passerà per i 3 punti H, K, S,

che appartengono ai lati del triangolo e in corrispondenza dei quali tali lati, formando angoli retti col raggio, risulteranno tangenti alla circonferenza stessa. Il triangolo ABC sarà perciò circoscritto alla circonferenza tracciata, e questa sarà a sua volta inscritta nel triangolo dato.



29) (importante; ESERCIZIO SVOLTO)

Per ogni TRIANGOLO, esiste sempre la circonferenza CIRCOSCRITTA.**Il suo centro coincide col punto di incontro degli ASSI dei lati, ossia col CIRCOCENTRO.**

Che per tre punti distinti e non allineati passi una (e una sola)

circonferenza ci è già noto. Qui è però anche richiesto di dimostrare che il centro di tale circonferenza coincide col circocentro del triangolo.

Sia ABC un triangolo qualsiasi. Tracciamo gli assi dei tre lati:

essi, come sappiamo, si incontreranno in uno stesso punto

(il *circocentro*, indicato in figura con J).

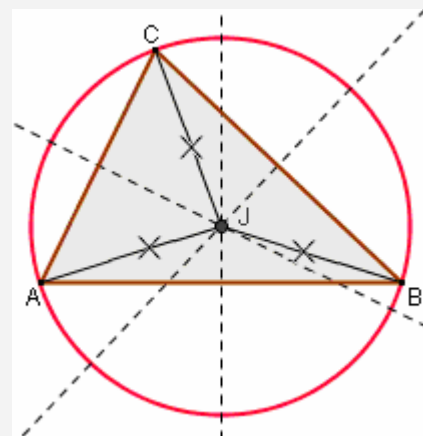
E' noto che ogni punto dell'asse di un segmento è equidistante

dagli estremi del segmento stesso: quindi si avrà $JA = JB = JC$.Perciò, se si punta il compasso in J con raggio $JA = JB = JC$,

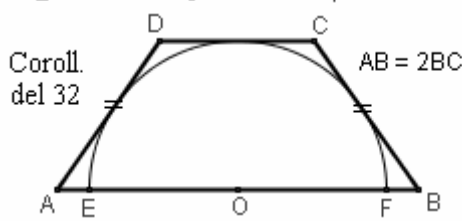
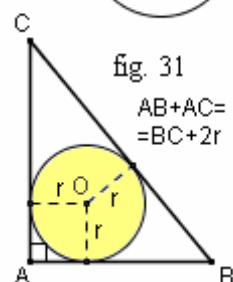
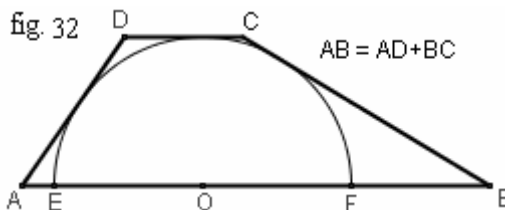
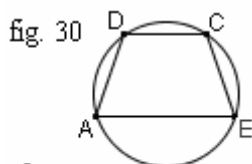
la circonferenza tracciata passerà per i 3 punti A, B, C

e sarà dunque la circonferenza circoscritta in questione.

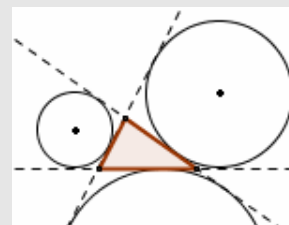
Le parole "INcentro" e "CIRCOcentro", usate per indicare risp. il punto di incontro delle bisettrici e degli assi dei lati in un triangolo, sono dovute proprio al fatto che tali punti notevoli coincidono col centro della circonferenza INscritta e CIRCOscritta.

**Altri esercizi (TEOREMI MOLTO IMPORTANTI, DA TENERE A MEMORIA!)**

- 30) ☀ **Un trapezio inscritto in una circonferenza è sempre isoscele** (figura; dim. guidata a pag. 188)
- 31) ☀ **In un triangolo rettangolo, la somma dei cateti supera l'ipotenusa di un segmento uguale al diametro della circonferenza inscritta nel triangolo** (figura; dim. guidata a pag. 188)
- 32) ☀ **Se un trapezio è circoscritto ad una SEMIcirconferenza** (cioè, se la sua base maggiore sta sulla retta del diametro, e lati obliqui e base minore sono tangenti alla semicirconferenza), allora la base maggiore è uguale alla somma dei due lati obliqui (figura; dim. guidata a pag. 188)

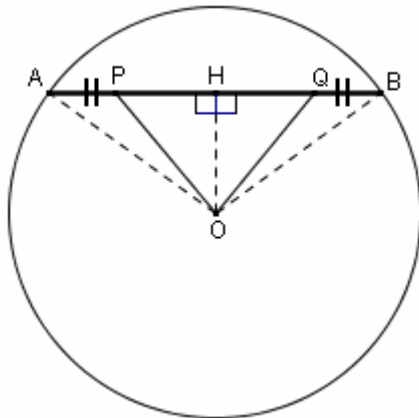
COROLLARIO: In un trapezio ISOSCELE circoscritto ad una SEMIcirconferenza**la base maggiore è il doppio del lato obliquo****(= il lato obliquo è metà della base maggiore). Vedi figura.**

- 33) In ogni triangolo, oltre alle circonf. inscritta e circoscritta, esistono anche le tre circonferenze "ex-inscritte", ciascuna tangente a un lato e ai prolungamenti degli altri due lati. Dove stanno i loro centri? ➡



 DIMOSTRAZIONI GUIDATE di alcuni fra gli esercizi (freccia = link alla dimostrazione completa)

2)

HP: $PA = QB$ TH: $PO = QO$

DIM.

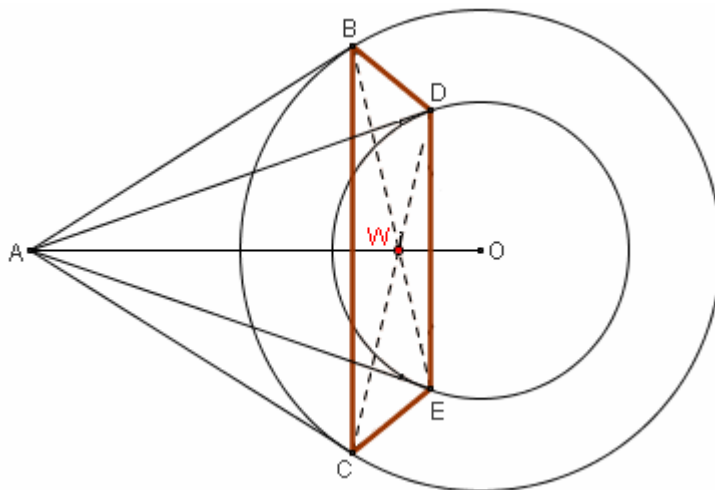
Dal centro O, tracciamo la perpendicolare OH alla corda AB.

Un teorema noto ci assicura che H è il punto medio di AB: $HA = HB$.Dunque, per differenza di segmenti uguali, è $HP = HQ$:

$$HP = \dots - \dots = \dots - \dots = HQ \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{r} HA = HB \\ \dots = \dots \\ \hline \underbrace{HA - \dots}_{HP} = \underbrace{HB - \dots}_{HQ} \end{array}$$

Ora, confrontando i due triangoli OHP e OHQ, li si dimostra subito uguali per il ... da cui la tesi.

11)

HP: AB, AC, AD, AE
tangenti a due
circonferenze
concentriche

TH

I) $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ II) $DE \parallel BC$, $BD = CE$ III) il punto di incontro
delle diagonali di BCED
sta su AO

DIM.

I) E' noto che quando da un punto esterno si conducono le due tangenti ad una circonferenza, la congiungente il punto esterno col centro fa da ... per l'angolo formato dalle due tangenti. Perciò

$$\begin{array}{r} \widehat{OAB} = \dots \\ \widehat{OAD} = \dots \\ \hline \dots - \dots = \dots - \dots \\ \widehat{BAD} = \widehat{CAE} \end{array}$$

II) Lo stesso teorema sulle due tangenti condotte a una circonferenza da un punto esterno afferma pure che la congiungente il punto esterno col centro è ... della corda che ha per estremi i punti di contatto.

Quindi $AO \perp BC$, $AO \perp DE$

e di conseguenza BC e DE, essendo entrambe perpendicolari ad AO, sono ... fra loro.

Con ciò resta provato che BCED è un trapezio.

Per far vedere che si tratta di un trapezio isoscele, occorre dimostrare che $BD = \dots$;

a tale scopo basta rilevare che i due triangoli ABD e ACE sono uguali per il ... avendo:

 $AB = AC$ perché ... ; $AD = AE$ per lo stesso motivo; $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ come già dimostrato.III) Come sappiamo, in un trapezio isoscele le diagonali si tagliano in parti ... Detto perciò W il punto di intersezione delle diagonali del nostro trapezio isoscele BCED, si ha $WB = \dots$, $WD = \dots$.

La prima uguaglianza ci dice che W è equidistante dalle estremità del segmento BC, quindi appartiene all' ... di BC. Ma l'asse di BC, come abbiamo visto al punto II), è la congiungente AO! Quindi W appartiene ad AO, c.v.d.

13) DIM.



Tracciamo le due congiungenti AE e DC
e confrontiamo i due triangoli EAD, CDA.
Essi hanno:

AD in comune

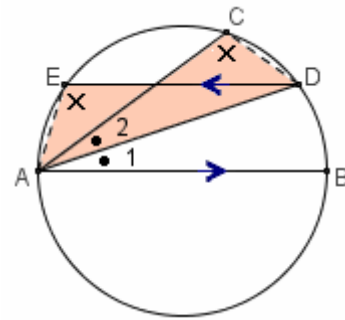
$$\widehat{EDA} = \widehat{A_2} \text{ perché } \widehat{EDA} \underset{\text{in quanto}}{=} \widehat{A_1} \underset{\text{HP}}{=} \widehat{A_2}$$

$$\widehat{AED} = \widehat{ACD} \text{ perché } \dots$$

Quindi si ha $EAD = CDA$ per il ...
e in particolare $DE = AC$, c.v.d.

$$\text{HP: } \widehat{A_1} = \widehat{A_2}, \quad DE \parallel AB$$

$$\text{TH: } DE = AC$$



20) DIM.



*Si può procedere in più modi diversi, ma
comunque sempre trafficando con gli angoli,
dopo aver tracciato opportuni raggi.
Probabilmente la dimostrazione più rapida
è la seguente.*

Osserviamo gli angoli indicati col pallino:
la loro uguaglianza è ovvia (...).

Ma allora saranno pure uguali fra loro
(per ...)

i due angoli indicati col doppio archetto:

$$\widehat{BOT} = \widehat{B'O'T}$$

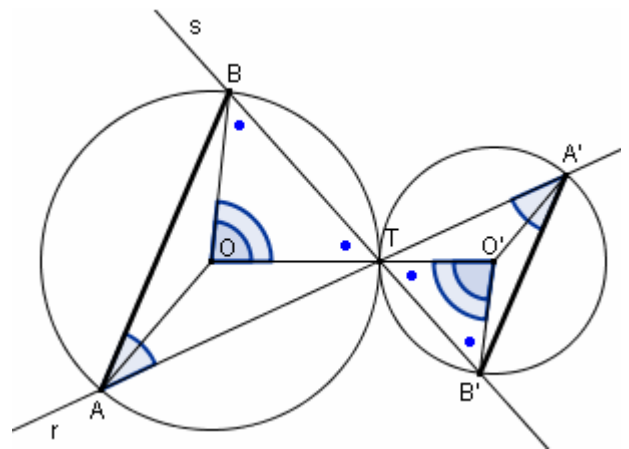
E di conseguenza avremo anche

$$\widehat{BAT} = \widehat{B'A'T}$$

perché ...

Si può trarre, a questo punto, la conclusione:
 $AB \parallel A'B'$ perché ... , c.v.d.

$$\text{TH: } AB \parallel A'B'$$



24) DIM.



1° metodo di ragionamento

E' noto che, quando da un punto esterno si conducono
le due tangenti ad una circonferenza,
la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice
dell'angolo formato dalle

Se dunque si traccia la semiretta AO,
questa, nel triangolo isoscele ABC,
farà da bisettrice per l'angolo al vertice e quindi,
in virtù di un altro teorema noto,
andrà a tagliare la base BC nel suo punto medio M.

A, O, M sono dunque allineati, c.v.d.

HP:

$$AB = AC$$

γ circonferenza inscritta

$$BM = MC$$

TH:

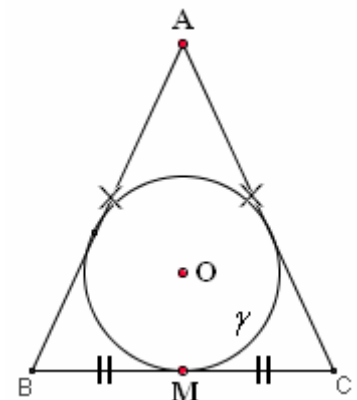
A, O, M sono allineati

2° metodo

Se si traccia il segmento AM, questo sarà mediana
relativa alla base nel triangolo isoscele ABC
e di conseguenza sarà pure ...
dell'angolo al vertice $\widehat{BAC}$.

Ora, è noto che, quando da un punto esterno
si conducono le due tangenti ad una circonferenza,
la congiungente il punto esterno col centro
è la bisettrice dell'angolo formato dalle due tangenti,
il che è come dire che la bisettrice dell'angolo formato
dalle due tangenti passa per il centro.

Dunque AM, essendo la bisettrice di $\widehat{BAC}$, passa per O:
A, O, M sono allineati, c.v.d.



30) DIM.

⇒ Tracciamo, per il centro O della circonferenza, la perpendicolare alle due rette, parallele fra loro, su cui giacciono le basi.
Come è ben noto, la perpendicolare a una corda condotta per il centro ... la corda stessa.
Quindi è immediato dimostrare che sono uguali per il ... le coppie di triangoli

$$OAH = OBH, \quad ODK = OCK.$$

Ne consegue l'uguaglianza delle coppie di angoli indicate sulla figura con "crocetta" e con "pallino", ossia:

$$\widehat{AOH} = \widehat{BOH}, \quad \widehat{DOK} = \widehat{COK}.$$

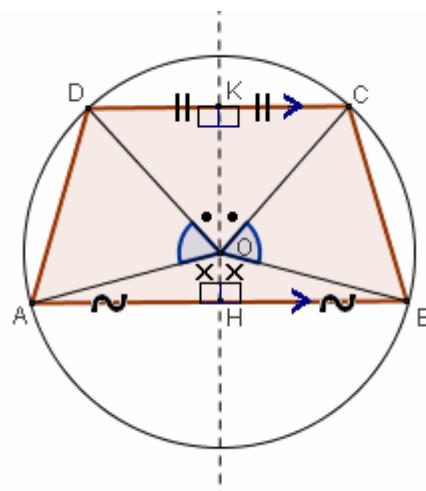
Allora, per ... , saranno uguali fra loro pure i due angoli indicati con "archetto":

$$\widehat{AOD} = \widehat{BOC}.$$

E a questo punto, basta ricordare il teorema secondo cui **in una circonferenza ad angoli al centro uguali corrispondono ...**, per avere la tesi.

HP: $DC \parallel AB$,
ABCD
inscritto

TH: $AD = BC$



31) DIM.

⇒ Il quadrilatero AKOH è un ... ; infatti ha

- gli angoli retti
 $\widehat{A} = 90^\circ$ per ... ,
 $\widehat{AHO} = \widehat{AKO} = 90^\circ$ perché ... ,
 quindi $\widehat{HOK} = 90^\circ$ per ...
- e due lati consecutivi uguali
 ($OK = OH$ perché ...).

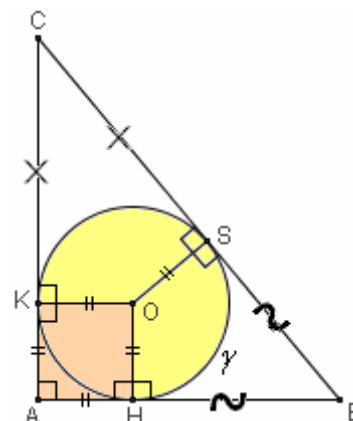
Dunque è $AH = AK = OK = OH =$ raggio $= r$
Inoltre, per il teorema ... , $BH = BS$; $CK = CS$

La seguente catena dimostra la tesi:

$$\begin{aligned} AB + AC &= (AH + BH) + (AK + CK) = \\ &= r + BS + r + CS = (BS + CS) + 2r = \\ &= BC + \text{diametro} \quad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

HP: $\widehat{A} = 90^\circ$, circonferenza inscritta

TH: $AB + AC = BC + 2r$



32) DIM.

⇒ Congiungiamo il centro O con le estremità C e D della base minore. Vediamo che

- $\widehat{AOD} = \widehat{CDO}$ perché ... ;
- $\widehat{CDO} = \widehat{ADO}$ perché,
per il teorema detto "...",
è noto che, quando da un punto esterno a una circonferenza (D) si tracciano le due tangenti (DA, DC), la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice dell'angolo ...

Quindi sono uguali gli angoli...

per cui il triangolo AOD è isoscele: $AO = AD$.

Analogamente si dimostra che è isoscele il triangolo BOC: $OB = BC$.

Dalle due uguaglianze di cui sopra segue

$$AB = AO + OB = AD + BC, \quad \text{c.v.d.}$$

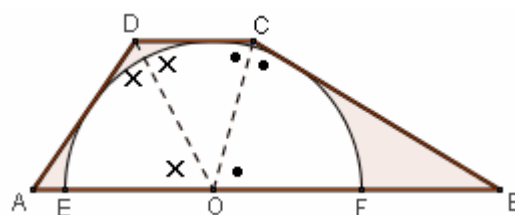
Se poi il trapezio fosse isoscele, la tesi appena dimostrata diventerebbe

$$AB = AD + BC = 2AD = 2BC \rightarrow AD = BC = \frac{1}{2} AB$$

TH: $AB = AD + BC$

(nel caso del trapezio *isoscele*,
 $AB = 2AD = 2BC$, ossia

$$AD = BC = \frac{1}{2} AB)$$



GEOMETRIA Cap. 7: MISURA DELLE GRANDEZZE

7.1 - MISURIAMO I SEGMENTI

“**Misurare**” un segmento **a**
significa prendere un altro segmento di riferimento **u** (detto “unità di misura”)
e chiedersi quante volte **u** è contenuto in **a**.

A) QUANDO LA MISURA E' INTERA

Se **u** è contenuto in **a** esattamente **n** volte (**n** numero intero non negativo), si potrà scrivere $a = n \cdot u$ (generalmente il puntino di moltiplicazione si omette, scrivendo semplicemente: $a = nu$) e si dirà che

“la misura del segmento **a**, rispetto al segmento **u** assunto come unità di misura, è il numero **INTERO** **n**”.

*La figura qui a fianco mostra due segmenti **a**, **u**.*

***a** è il segmento che si vuole misurare,*

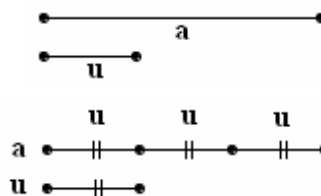
***u** è il segmento che si vuole utilizzare come unità di misura.*

*Poiché **a** risulta uguale alla somma*

*di esattamente 3 segmentini, ciascuno uguale a **u**,*

possiamo scrivere $a = 3u$

*e affermare che “la misura di **a** (rispetto a **u**) è 3”.*



B) QUANDO LA MISURA E' RAZIONALE

Se il segmento **u** NON è contenuto un numero intero di volte in **a**, si ricorrerà ai cosiddetti “sottomultipli” di **u** (vale a dire: la metà di **u**, la terza parte di **u**, la quarta parte di **u**, ecc. ecc.).

Dato un qualunque segmento **u**,

si dice “sottomultiplo di **u** secondo **n**” ciascuno dei segmentini che si ottengono dividendo **u** in **n** parti uguali.

Il sottomultiplo di **u** secondo **n** si indica col simbolo $\frac{1}{n} \cdot u$ (oppure $\frac{1}{n}u$),

che si può leggere: *un n-esimo*, oppure: *l'n-esima parte*, di **u**.

Se l'n-esima parte dell'unità di misura **u** è contenuta esattamente **m** volte nel segmento **a** che intendiamo misurare, potremo scrivere

$$a = m \cdot \frac{1}{n} u = \frac{m}{n} u$$

e diremo che

“la misura del segmento **a**, rispetto al segmento **u** assunto come unità di misura, è il numero **RAZIONALE** m/n ”.

*La figura qui a fianco mostra due segmenti **a**, **u**.*

***a** è il segmento da misurare, **u** svolge il ruolo di unità di misura.*

*Si osserva che **u** non è contenuto un numero intero di volte in **a** (3 volte è “troppo poco”, 4 volte è “troppo”).*

*Però, se dividiamo **u** in due parti uguali*

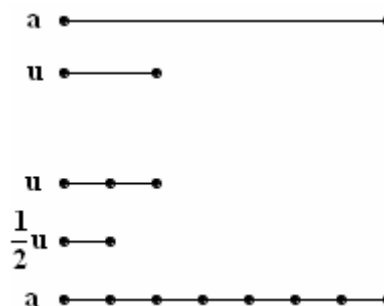
(costruendo, così, il segmento $\frac{1}{2}u$),

vediamo che questo segmentino $\frac{1}{2}u$

*è contenuto esattamente 7 volte in **a**.*

*Poiché dunque **a** risulta uguale alla somma di esattamente 7 segmentini, ciascuno uguale a $\frac{1}{2}u$,*

*possiamo scrivere $a = 7 \cdot \frac{1}{2}u = \frac{7}{2}u$ e affermare che “la misura di **a** (rispetto a **u**) è $\frac{7}{2}$ ”.*



C) QUANDO LA MISURA E' IRRAZIONALE

Si scopre tuttavia – cosa che lasciò del tutto sconcertati gli studiosi greci i quali, nel VI o V secolo a. C., per primi se ne accorsero – che per certe coppie di segmenti **a**, **u**, non avviene

- né che **u** sia contenuto un numero esatto di volte in **a**
- né che esista un sottomultiplo di **u**, che sia contenuto un numero esatto di volte in **a**.

In questo caso si dice che **a**, **u** sono “**incommensurabili**”.

DEF. Due segmenti **a**, **u** si dicono “**incommensurabili**” se non hanno nessun sottomultiplo comune.

Ad esempio, si può dimostrare il seguente importantissimo

TEOREMA - Il lato e la diagonale di uno stesso quadrato sono segmenti incommensurabili.

La *dimostrazione* è molto interessante: vediamo.

Se, per assurdo, esistesse un sottomultiplo **s** del lato **AB** del quadrato **ABCD**, contenuto un numero esatto di volte nella diagonale **BD** dello stesso quadrato, allora esisterebbero due numeri interi **n**, **m**, tali che

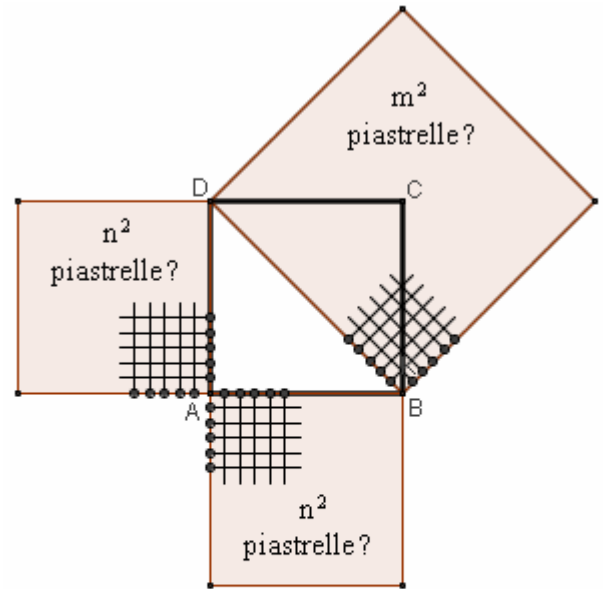
$$AB = ns, \quad BD = ms$$

I quadrati costruiti sui lati uguali **AB** e **AD** potrebbero allora essere suddivisi ciascuno in una griglia di n^2 quadratini di lato **s**, mentre il quadrato costruito sulla diagonale **BD** potrebbe essere suddiviso in una griglia di m^2 quadratini di lato **s**.

D'altra parte, per il Teorema di Pitagora, il quadrato costruito su **BD** è equivalente alla somma dei quadrati costruiti su **AB** e **AD**, e questo comporta che il numero totale di quadratini che “piastrellano” i due quadrati costruiti sui due lati **AB** e **AD**, sia uguale al numero dei quadratini che “piastrellano” il quadrato costruito sulla diagonale **BD**. Dunque si avrà $n^2 + n^2 = m^2$ ossia $2n^2 = m^2$ per cui gli interi **n** ed **m** saranno tali che

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Ma è possibile dimostrare (Teorema nel riquadro sottostante) che non può esistere alcuna frazione (=rapporto di due interi) la quale elevata al quadrato dia come risultato 2. L'assurdo trovato dimostra la tesi.



Il segmentino **s**:

Supponiamo, per assurdo, che **AB=AD** sia costituito da **n** di questi segmentini, mentre **BD** sia costituito da **m** di questi segmentini...

TEOREMA

Non esiste nessuna frazione (rapporto fra due interi) la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2

Dimostrazione

Per assurdo. Supponiamo, per assurdo, che esista una frazione la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.

Detta, per fissare le idee, $\frac{m}{n}$ tale frazione, avremo: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Riduciamo la frazione m/n ai minimi termini, se già non lo è; otterremo una frazione p/q , con **p** e **q** primi fra loro (cioè: privi di divisori comuni; in altre parole: non più semplificabili), tale che $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Si potrà scrivere quindi la seguente catena di deduzioni:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 &\rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \rightarrow p^2 = 2q^2 \rightarrow \text{il numero } p^2 \text{ è pari} \rightarrow \boxed{p \text{ è PARI}} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{esiste un INTERO } p' \text{ tale che } p = 2p' \rightarrow (2p')^2 = 2q^2 \rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \rightarrow q^2 = 2p'^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{il numero } q^2 \text{ è pari} \rightarrow \boxed{q \text{ è PARI}} \end{aligned}$$

Ora, nel corso di tale catena abbiamo dedotto che **p** e **q** sono entrambi PARI, cioè entrambi divisibili per 2, mentre eravamo partiti dal presupposto che la frazione p/q fosse ridotta ai minimi termini, vale a dire non più semplificabile.

Ricapitoliamo: supponendo che esistesse una frazione m/n tale che $(m/n)^2=2$, siamo pervenuti a conclusioni assurde.

Non esiste perciò alcuna frazione che elevata al quadrato dia 2.

Se i due segmenti **a**, **u** sono incommensurabili,

non esiste dunque nessun numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che risulti $\mathbf{a} = \frac{m}{n} \mathbf{u}$:

per qualunque numero razionale $\frac{m}{n}$, il segmento $\frac{m}{n} \mathbf{u}$,

ossia il segmento ottenuto mettendo in fila m segmenti ciascuno uguale all' n -esima parte di **u**,

potrà magari discostarsi pochissimo dal segmento **a**, ma comunque NON potrà mai coincidere esattamente con **a**!

Supponiamo che **a** ed **u** siano incommensurabili,

e supponiamo che, per due certi numeri razionali m/n e m'/n' ,

si abbia: $\frac{m}{n} \mathbf{u} < \mathbf{a} < \frac{m'}{n'} \mathbf{u}$.

Allora diremo che il numero razionale m/n costituisce una "misura per difetto del segmento **a**"
e che il numero razionale m'/n' costituisce una "misura per eccesso del segmento **a**".

E' evidente che esisteranno infiniti numeri razionali caratterizzati dal fatto

di essere misure **per difetto** del segmento **a**;

come pure, esisteranno infiniti numeri razionali caratterizzati dal fatto

di essere misure **per eccesso** di **a** ...

... ma - ribadiamolo - se **a** e **u** sono incommensurabili non esiste alcun numero razionale,
che abbia il diritto di essere considerato la misura **esatta** di **a** rispetto a **u**.

In caso di incommensurabilità di **a** con **u**, la misura di **a** rispetto a **u** sarà espressa da un numero **IRRAZIONALE**:
precisamente, da quel numero irrazionale che è maggiore di tutte le misure razionali per difetto di **a**,
e minore di tutte le misure razionali per eccesso di **a**.

NUMERI IRRAZIONALI

Un numero si dice “irrazionale” se non è esprimibile sotto forma di frazione (intesa come “rapporto fra due numeri interi”).

□ Il discorso fatto sulla “misura” può essere schematizzato, in sostanza, affermando che

l' “IRRAZIONALITÀ” è “l’aspetto aritmetico dell’INCOMMENSURABILITÀ”.

♪ incommensurabilità = concetto geometrico

♪ irrazionalità = concetto aritmetico (da *arithmós* = numero)

□ **Un numero irrazionale è “definito”, “individuato”,
dalle sue “approssimazioni razionali per difetto” e dalle sue “approssimazioni razionali per eccesso”.**

Ad esempio, il numero irrazionale

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095...$$

è definito come “quell’entità numerica che è

maggiore di 1 ma minore di 2;

maggiore di 1,4 ma minore di 1,5;

maggiore di 1,41 ma minore di 1,42;

ecc. ecc.”

□ Esistono infiniti numeri razionali, ed esistono pure infiniti numeri irrazionali,
ma, in un certo senso,

**i numeri irrazionali sono “più infiniti ancora” dei razionali
(la loro “numerosità” ha un “grado di infinito” maggiore).**

Se io “pesco a caso” un punto su di una *number line*,

normalmente la sua ascissa sarà *irrazionale*;

sì, certo, potrebbe anche capitarmi di “beccare” un punto con ascissa *razionale*,
ma la probabilità che ciò accada è *infinitamente piccola* !!!!!

Straordinario ...

Se vuoi approfondire queste tematiche,

di cui fu geniale esploratore il matematico danese Georg Cantor (1845-1918),
puoi andare alla pagina 402 di questo volume.

7.2 - MISURIAMO LE SUPERFICI

E per misurare le superfici, come si farà?

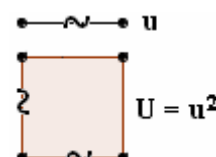
Così come, per misurare un segmento, si prende come unità di misura un altro segmento, per misurare una superficie si dovrà prendere come unità di misura un'altra superficie.

“Misurare” una superficie **A** significa dunque prendere un'altra superficie di riferimento **U** (che farà da “unità di misura”) e chiedersi quante volte la superficie **U** è contenuta in **A**.

Di solito, il calcolo della misura di una superficie è richiesto in un contesto nel quale già sono stati misurati dei segmenti, con l'utilizzo di un determinato segmento **u**, scelto come unità di misura. Allora, è sempre conveniente adottare come unità di misura **U** per le superfici, il quadrato avente per lato il segmento **u**. Tale quadrato viene generalmente indicato col simbolo **u²**

Insomma: se si è scelto questo segmento come unità di misura per le lunghezze (NOTA) ...

... per calcolare delle aree (NOTA) si sceglierà come unità di misura questo quadrato:



Ad esempio, se si sono calcolate le lunghezze in centimetri, le aree verranno calcolate in centimetri quadrati.

- N • *Lunghezza* = quel “quid” che hanno in comune tutti i segmenti congruenti ad un segmento dato
 O • *Area* = quel “quid” che hanno in comune tutte le superfici con la stessa estensione di una superficie data
 T Spessissimo, si dice semplicemente “lunghezza”, o, rispettivamente, “area”,
 A quando, a rigore, bisognerebbe dire “misura della lunghezza” e “misura dell’area”.

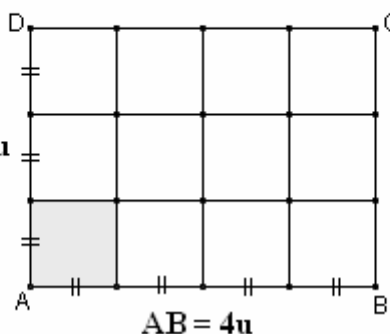
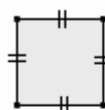
Ora, supponiamo di dover misurare una superficie rettangolare ABCD le cui dimensioni misurino, rispetto all’unità di misura **u** scelta per i segmenti, rispettivamente 4 (la base AB) e 3 (l’altezza AD).

Ci chiediamo: quanto misurerà il rettangolo?

Ribadiamo innanzitutto che, avendo noi adottato il segmento **u** come unità di misura “lineare”, dovremo adottare il quadrato di lato **u** (**u²**) come unità di misura per le superfici.

Si tratta perciò di chiedersi quante volte il quadrato **u²** “sta” nella superficie ABCD, sapendo che il segmento **u** sta 4 volte nel segmento AB e 3 volte nel segmento AD.

u = unità di misura per le lunghezze



La figura mostra che il rettangolo ABCD è riempito da $4 \cdot 3 = 12$ quadrati di lato **u** (4 quadrati per ogni fila orizzontale; 3 file orizzontali una sopra l’altra; in totale, $4 \cdot 3 = 12$ quadrati).

E’ dunque $ABCD = 12 \text{ } u^2$,

e ne concludiamo che l’area di un rettangolo le cui dimensioni hanno lunghezza 4 e 3 rispettivamente, è $4 \cdot 3 = 12$.

Si capisce che il discorso è generalizzabile, almeno se le misure lineari in gioco sono intere: insomma, se in un rettangolo le misure di base e altezza sono, rispett., **b** ed **h**, con **b** ed **h** interi, allora la misura dell’area sarà $b \cdot h$.

E’ poi facile dimostrare che questo risultato si estende anche al caso in cui le misure **b** ed **h** siano razionali; infine, tenendo presente la definizione rigorosa di numero irrazionale come “elemento separatore di due classi contigue di numeri razionali” (definizione che si dà in trattazioni a livello più avanzato) si può far vedere che la stessa formula $b \cdot h$ vale anche se i due numeri **b** ed **h** sono irrazionali, oppure uno razionale e l’altro irrazionale.

In definitiva, resta stabilito che l’area **S** di un rettangolo le cui dimensioni misurino **b**, **h** ($b, h \in \mathbb{R}$) si calcola tramite la formula $S = b \cdot h$

I teoremi sulle equivalenze permettono poi di determinare, mediante formule opportune, le aree del parallelogramma, del triangolo, del trapezio.

Il calcolo delle aree degli altri poligoni si effettua scomponendoli nella somma di poligoni più semplici, mentre per le superfici non poligonali il discorso dell’area comporta considerazioni un po’ più articolate.

Riguardo ai volumi dei solidi, la trattazione è analoga a quella per le aree delle superfici; se ne discuterà brevemente a pagina 386.

7.3 - GENERALIZZIAMO IL CONCETTO DI MISURA

A) LE “CLASSI DI GRANDEZZE”

Diciamo che si può parlare di “misura” ogniqualvolta si consideri una “**classe di grandezze**”.

Cos'è dunque una “classe di grandezze” ?

Prima di rispondere astrattamente a questa domanda, avvertiamo, a titolo di esempio, che

sono classi di grandezze:

- l'insieme dei **segmenti**;
- l'insieme delle **superfici piane**;
- l'insieme degli **angoli**, se si ammette di poter anche “andare oltre il giro completo”;
- l'insieme degli **archi di una stessa circonferenza** (compresi quelli maggiori della circonferenza stessa);
- ... ecc.

E procediamo ora con la (in verità: piuttosto impegnativa) DEFINIZIONE.

Si dice “**classe di grandezze**” un insieme I di oggetti matematici nel quale

1. siano definite tre relazioni, da indicarsi coi simboli $=, <, >$

(dove s'intende che $>$ indichi la relazione inversa di $<$)

NOTA - Il simbolo $=$ potrà avere, a seconda del contesto, significati diversi: ad esempio

- nel caso dei segmenti, dire che sono $=$ significherà affermare che sono “congruenti, sovrapponibili”;
- nel caso delle superfici, $=$ avrà il significato di “equivalente”, ossia “avente la stessa estensione di” (e il simbolo $=$ verrà preferibilmente rimpiazzato dal simbolo $\doteq$);
- ecc. ecc.

2. sia definita un'operazione denominata “somma”, da indicarsi col simbolo $+$

(l'operazione inversa di $+$ verrà indicata con $-$)

3. e le definizioni adottate siano tali che $=, <, >, +$ soddisfino ai seguenti ASSIOMI

(“assioma” ha qui il senso di “affermazione che fa da premessa in una teoria”):

- ☐ la relazione $=$ dev'essere riflessiva, simmetrica e transitiva;
- ☐ date due qualsiasi grandezze A e B , deve verificarsi una e una sola delle tre eventualità $A=B$, $A<B$, $A>B$ (**assioma della tricotomia**);
- ☐ la relazione $<$ deve essere transitiva;
- ☐ l'operazione $+$ dev'essere “ovunque definita” (cioè, per *qualsiasi* coppia di elementi A, B di I la somma $A+B$ deve potersi effettuare, con risultato che deve appartenere anch'esso all'insieme I); dev'essere commutativa, associativa, e dotata di elemento neutro (detto “grandezza nulla”);
- ☐ per ogni grandezza A dell'insieme I , e per ogni numero naturale non nullo n , deve esistere una e una sola grandezza B tale che $nB=A$, dove nB indica il risultato della somma di n addendi $B+B+\dots+B$. In altre parole, per ogni grandezza A dell'insieme I , e per ogni numero naturale non nullo n , deve esistere, ed essere unico, il “sottomultiplo di A secondo n ” (**assioma della divisibilità indefinita**);
- ☐ date due grandezze A, B , se A non è l'elemento neutro additivo (“grandezza nulla”) ed è $B>A$, allora deve esistere un numero naturale n , tale che $nA>B$; in altre parole, data una grandezza non nulla A e data un'altra grandezza B maggiore di A , deve esistere un multiplo di A , che sia maggiore di B (**assioma di Archimede**);
- ☐ se due sottoinsiemi I', I'' di I sono tali che ogni elemento di I' è $<$ di ogni elemento di I'' , allora esiste almeno un elemento di I , che sia $\geq$ di tutti gli elementi di I' e $\leq$ di tutti gli elementi di I'' (**assioma di continuità**).

B) MISURA DI UNA GRANDEZZA

“**Misurare**” una grandezza A significa **confrontarla** con un'altra grandezza U della stessa classe; quindi, con una grandezza che sia “**omogenea**” con quella da misurare (“omogenea” = “della stessa specie”). U assumerà il ruolo di “**unità di misura**” e si tratterà di esprimere, mediante un numero reale, “**quante volte U è contenuta in A** ”.

In analogia a quanto visto coi segmenti, si vede che il procedimento di misura può condurre, a seconda dei casi:

- ☐ ad un **numero intero** (quando, sommando più grandezze tutte uguali a U , si riesce a ottenere esattamente A);
- ☐ ad una **frazione**, ovvero ad un numero razionale (quando sia necessario ricorrere ai sottomultipli di U);
- ☐ ad un **numero irrazionale** (quando accade che A e U sono “incommensurabili” ossia non ammettono alcun sottomultiplo comune).

C) RAPPORTO FRA DUE GRANDEZZE

Supponiamo che “la misura di A, rispetto a U, sia α ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$)”.

Allora potremo scrivere

$$A = \alpha U$$

e il numero α potrà essere chiamato, indifferentemente:

“la misura di A rispetto a U”

oppure anche

“il rapporto A/U (o A:U) fra la grandezza A e la grandezza U”.

Cos'è, dunque, il “rapporto fra due grandezze omogenee”?

E' la misura della prima grandezza, quando la seconda venga assunta come unità di misura; in altre parole, è il numero che esprime “quante volte la seconda grandezza è contenuta nella prima”.

D) IL “TEOREMA DEL RAPPORTO”

Dovendo calcolare il rapporto fra due grandezze omogenee A e B, possiamo procedere per via diretta (chiedendoci “quante volte B è contenuta in A”),

oppure per via indiretta, andando a misurare sia A che B rispetto ad una terza grandezza U, che faccia da unità di misura comune, poi eseguendo il quoziente fra le due misure così ottenute.

Vale infatti (noi ci limitiamo ad enunciarlo, omettendo la dimostrazione) il seguente fondamentale

TEOREMA (“del rapporto”):

Il rapporto A/B o A:B fra due grandezze omogenee A e B, è uguale

al quoziente fra le loro misure, calcolate rispetto ad una qualsivoglia unità di misura comune U.

In pratica.

Supponiamo che un pensionato sia abituato a utilizzare il suo bastone da passeggio per calcolare le lunghezze, e abbia constatato che il rapporto fra la lunghezza L del campo da bocce e la lunghezza B del bastone è 8,5 (perché “il bastone ci sta esattamente 8 volte e mezzo nel campo da bocce”).

Bene! Allora quel pensionato, qualora andasse a misurare sia il campo da bocce che il bastone in metri, e facesse poi la divisione fra le due misure in metri ottenute, troverebbe come risultato ancora 8,5.

E) CLASSI DI GRANDEZZE IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

Si dice che due insiemi sono in “**corrispondenza biunivoca**”

se è stata fissata una legge che faccia corrispondere ad ogni elemento del primo insieme, uno e un solo elemento del secondo insieme, E VICEVERSA.

Ad esempio, in una camicia, l'insieme delle asole e l'insieme dei bottoni sono in corrispondenza biunivoca: ad ogni asola corrisponde uno e un sol bottone e viceversa ad ogni bottone corrisponde una e una sola asola.

In Geometria non è raro imbattersi in casi in cui c'è una corrispondenza biunivoca che lega fra loro due “classi di grandezze”.

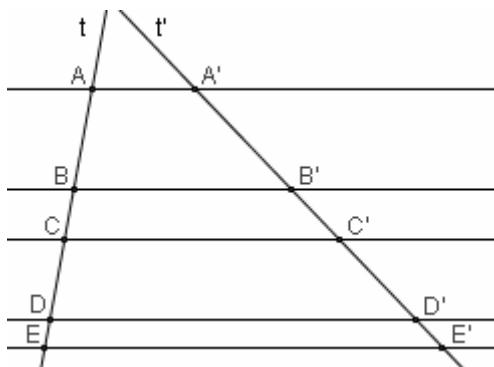
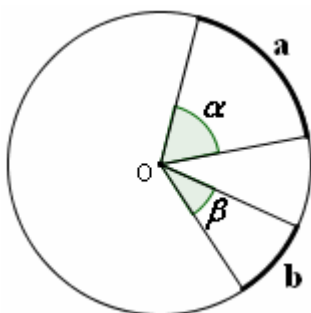
Ad esempio, presa una circonferenza Γ , possiamo considerare l'insieme A dei suoi angoli al centro (insieme A che costituisce, a patto di includervi anche gli angoli maggiori di un angolo giro, una “classe di grandezze”) e l'insieme A' dei suoi archi (anche A', se vi includiamo pure gli archi maggiori dell'intera circonferenza, è una classe di grandezze).

I due insiemi A e A' sono, com'è evidente, in corrispondenza biunivoca:

ad ogni angolo al centro corrisponde uno ed un solo arco, e ad ogni arco corrisponde uno e un solo angolo al centro.

Altro esempio.

Quando un fascio di parallele è tagliato da due trasversali t e t' , si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l'insieme S dei segmenti giacenti su t (S è una classe di grandezze, “sottoclasse” della più generale classe di tutti i segmenti del piano) e l'insieme S' dei segmenti che giacciono su t' .



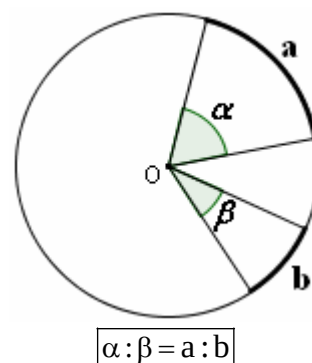
F) CLASSI DI GRANDEZZE DIRETTAMENTE PROPORZIONALI

Quando abbiamo due classi di grandezze, una classe G e un'altra classe G' , legate fra loro da una corrispondenza biunivoca, diremo che G e G' sono “direttamente proporzionali” se accade che il rapporto fra due qualsivoglia grandezze della classe G , è uguale al rapporto delle grandezze che ad esse corrispondono in G' .

Preso una circonferenza Γ , consideriamo la classe degli angoli al centro e la classe degli archi (classi che, come abbiamo osservato, sono in corrispondenza biunivoca fra loro).

Supponiamo che l'angolo α sia il doppio di β così che il rapporto $\alpha:\beta$ sia 2. Allora si capisce (e si dimostra con facilità) che l'arco a corrispondente ad α sarà il doppio dell'arco b corrispondente a β , cosicché anche $a:b=2$. E, al di là del particolare esempio fatto, è intuitivo che, presi due qualsivoglia angoli al centro α, β e detti a, b i corrispondenti archi, varrà sempre la proporzione $\alpha:\beta=a:b$.

Insomma, l'intuizione ci dice che gli angoli al centro in una data circonferenza, e gli archi di quella stessa circonferenza, sono due classi di grandezze direttamente proporzionali



Dunque, due classi di grandezze G e G' in corrispondenza biunivoca fra loro sono direttamente proporzionali quando, prese due qualunque grandezze A, B in G , e considerate le rispettive corrispondenti A' e B' in G' , si ha sempre $A:B=A':B'$

o, se si preferisce, quando sussiste l'implicazione $\frac{A}{B}=\alpha \Rightarrow \frac{A'}{B'}=\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$)

In altre parole ancora, affinché due classi di grandezze G e G' , in corrispondenza biunivoca fra loro, siano direttamente proporzionali, deve accadere che

se A è il doppio di B , allora la grandezza A' (corrispondente di A) è il doppio della grandezza B' (che corrisponde a B);
se A è il triplo di B , allora la grandezza A' (corrispondente di A) è il triplo della grandezza B' (che corrisponde a B);

...

anzi, in termini del tutto generali, deve accadere che, se $A=\alpha B$, allora $A'=\alpha B'$ (α numero reale non negativo).

G) IL “CRITERIO DI PROPORZIONALITA’”

Una cosa è INTUIRE che due certe classi di grandezze in corrispond. biunivoca siano direttamente proporzionali, un'altra cosa è DIMOSTRARLO. A tale scopo, si utilizza di solito un teorema del tutto generale il quale assicura, se sono verificate determinate condizioni, il sussistere della diretta proporzionalità.

Vediamo l'enunciato di questo teorema, pur omettendone la dimostrazione

(che è piuttosto impegnativa, perché deve tenere conto della possibilità, per due grandezze della stessa specie, di essere incommensurabili, quindi di avere come rapporto un numero irrazionale).

TEOREMA (“Criterio di Proporzionalità”)

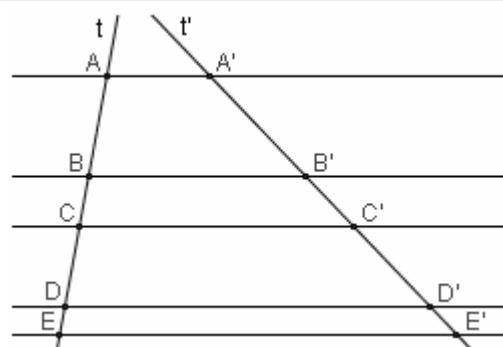
Se due classi di grandezze G, G' sono in corrispondenza biunivoca, e accade che:

- i) $A=B \Rightarrow A'=B'$ ossia:
a due grandezze che sono uguali in G corrispondono sempre due grandezze, che sono uguali in G'
- ii) $A=B+C \Rightarrow A'=B'+C'$ cioè:
ad una grandezza A , in G , che sia la somma di due altre grandezze, corrisponde sempre, in G' , quella grandezza A' , che è la somma delle rispettive corrispondenti

allora quelle due classi di grandezze sono direttamente proporzionali.

Ad esempio, la proporzionalità fra gli angoli al centro e gli archi in una stessa circonferenza, che abbiamo dato per scontata per intuizione, può essere dimostrata rigorosamente come conseguenza del precedente Criterio (in quanto è noto che in una stessa circonferenza ad angoli al centro uguali corrispondono archi uguali, ed è evidente che ad un angolo al centro, che sia somma di altri due, corrisponde proprio quell'arco, che è la somma dei due archi corrispondenti ai due angoli che fanno da addendi nella somma).

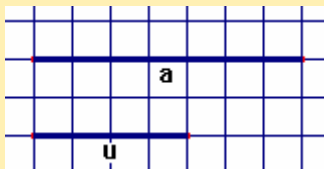
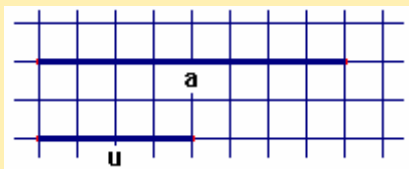
Anche l'importantissimo **Teorema di Talete** (“Quando un fascio di rette parallele viene tagliato da due trasversali, i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali”), di cui parleremo al successivo capitolo 9, viene giustificato in base al Criterio di Proporzionalità sopra citato.



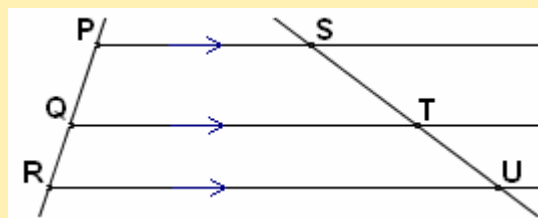
$AB:CD=A'B':C'D'$
TEOREMA DI TALETE

QUESTIONARIO PER IL RIPASSO DELLA DIFFICILE “TEORIA DELLA MISURA”

- 1) “Misurare” un segmento **a** significa prendere un altro segmento **u** (detto “unità di misura”) e chiedersi ...
- 2) Dato un qualunque segmento **u**, e considerato un numero naturale non nullo n , si dice “sottomultiplo di **u** secondo n ” ...
- 3) In ciascuna delle tre figure sotto riportate, quanto vale la misura di **a** rispetto ad **u**?



- 4) Due segmenti **a**, **u** si dicono “incommensurabili” quando ...
- 5) Dimostra che la diagonale e il lato di uno stesso quadrato sono fra loro incommensurabili.
- 6) Dimostra che non esiste nessuna frazione
(= rapporto fra due interi)
la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.
- 7) Un numero si dice “irrazionale” se ...
- 8) Ad esempio, si dimostra che sono irrazionali i numeri ...
- 9) Trova un numero con la virgola, contenente esclusivamente le cifre 1 e 2, che sia irrazionale.
- 10) Che simbolo viene utilizzato, di norma, per indicare l’insieme dei numeri irrazionali?
- 11) Se due dati segmenti **a**, **u** sono incommensurabili,
il numero che indica la misura di **a** rispetto a **u** è ...
- 12) Per misurare le superfici, come si sceglie l’unità di misura?
- 13) Cita due esempi di “classi di grandezze”, oltre alla classe dei segmenti.
- 14) Cos’è il “rapporto fra due grandezze omogenee”?
- 15) Enuncia il “Teorema del Rapporto”.
- 16) Cos’è una “corrispondenza biunivoca” fra due insiemi?
- 17) Quando abbiamo due classi di grandezze, una classe G e un’altra classe G' , legate fra loro da una corrispondenza biunivoca, diremo che G e G' sono “direttamente proporzionali” se accade che ...
- 18) Enuncia il teorema chiamato “Criterio di Proporzionalità”.
- 19) Il Teorema di Talete afferma che quando un fascio di parallele viene tagliato da due trasversali ...
- 20) Ad esempio, con riferimento alla figura qui a destra,
il Teorema di Talete afferma che vale la proporzione
 $TU : SU = \dots : \dots$



CLICCA PER LE RISPOSTE ➡

Un uomo, un maestro: PITAGORA DI SAMO

Pitagora, nato a Samo nella Ionia intorno al 570 a.C., è spesso descritto come “il primo matematico puro”. Non lasciò niente di scritto, ed è problematico riconoscere con certezza quali contributi scientifici e filosofici si debbano a lui personalmente, e quali invece ai suoi seguaci.

Non si può dire abbia avuto una vita quieta - davvero! ... Figlio di un mercante di gemme, ricevette un’ottima educazione, e imparò da bambino a recitare Omero e a suonare la lira, passione quest’ultima che mantenne poi per sempre. Viaggiò parecchio col papà sin da piccolo, e più avanti ebbe modo di conoscere di persona il già anziano filosofo Talete nonché il suo allievo Anassimandro. Intorno all’anno 535 si recò in visita in Egitto, forse principalmente per ragioni di formazione culturale e spirituale. A seguito dell’invasione persiana fu condotto prigioniero in Babilonia, dove pure trovò modo di coltivare i suoi interessi matematici, mistici e artistici. Tornato successivamente a Samo, e visitata l’isola di Creta, finì per stabilirsi a Crotone, nell’odierna Calabria, dove fondò una Scuola filosofica e religiosa, per aderire alla quale in modo stretto era richiesto di adottare una dieta vegetariana e di rinunciare alle proprietà personali. I concetti di “numero”, di “triangolo”, di “dimostrazione”, e più in generale le idee di “bene”, di “giustizia” e di “opportunità”, erano i punti fondanti della sua riflessione.

Era persuaso che ogni aspetto della realtà fosse riconducibile a relazioni numeriche. La prova più significativa di questo era l’osservazione che le corde vibranti di una lira producevano suoni armoniosi quando le loro lunghezze stavano nei rapporti 2:1, 3:2, 4:3, ecc.

A ogni numero attribuiva una propria “personalità”: maschile o femminile, perfetto o incompleto, bello o brutto. Il “dieci” era ritenuto il migliore fra i numeri, in quanto somma dei primi quattro interi ($1+2+3+4$) e per il fatto che si poteva rappresentare con un insieme di punti disposti a triangolo.

Oggi il nome di Pitagora è legato specialmente al famoso teorema geometrico che tutti conoscono, ma va detto che questo era già noto da secoli agli studiosi babilonesi, e non è neppure certo che si debba proprio a Pitagora la sua prima dimostrazione di carattere generale.

Un elenco di risultati attribuibili a Pitagora o ai suoi discepoli è il seguente:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti;
la somma degli angoli interni di un poligono di n lati vale $2n - 4$ angoli retti
mentre la somma degli angoli esterni di un poligono misura quattro angoli retti
- In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati dei cateti è uguale al quadrato dell’ipotenusa (*vedi* ↑) ... dove “quadrato” non deve qui intendersi nel senso moderno di “risultato che si ottiene elevando la misura all’esponente 2”, bensì in senso strettamente geometrico: “E’ possibile decomporre i due quadrati aventi per lato i cateti in superfici le quali, accostate in modo opportuno, riempiono esattamente il quadrato avente per lato l’ipotenusa”
- Risoluzione di equazioni con interpretazione geometrica, es. $a(a - x) = x^2$
- Scoperta (dovuta non a Pitagora, con le cui visioni filosofiche era del resto in contrasto, ma ai suoi discepoli) delle grandezze “incommensurabili”, ossia, in senso aritmetico, dei numeri “irrazionali”
- Studi sui cinque poliedri regolari



In astronomia, Pitagora riteneva che la Terra avesse forma sferica e stesse al centro dell’Universo; scoprì l’inclinazione dell’orbita della Luna rispetto all’equatore e comprese che Lucifero e Vespero - le stelle del mattino e della sera - non erano corpi celesti distinti ma si identificavano entrambe col pianeta Venere.

Come filosofo, pensava che il mondo dipendesse dall’interazione fra coppie di “contrari”, e che l’anima fosse eterna e trasmigrasse, dopo la morte del corpo, in un altro essere, uomo o animale (metempsicosi: si narra che avesse affermato di riconoscere nel latrato di un cane la voce di un amico defunto). Questo continuo ciclo di reincarnazioni poteva aver fine solo a seguito di una purificazione, ottenibile tramite il perfezionamento intellettuale/morale: i pitagorici tenevano in gran pregio l’amicizia, l’altruismo, l’onestà.

Riguardo alla morte di Pitagora, avvenuta in data incerta, le versioni non sono univoche.

Una di queste racconta che egli, poiché detestava e disprezzava le fave, inseguito dal nemico, preferì farsi raggiungere ed uccidere piuttosto che mettersi in salvo attraversando un campo di fave (tale ripugnanza è forse da collegarsi a una patologia chiamata “favismo”, diffusa proprio nella zona di Crotone, e/o all’antica credenza secondo la quale questi legumi avevano a che fare col mondo dei morti, della decomposizione e dell’impurità, da cui il filosofo deve tenersi lontano).

Le parole messe in bocca al Maestro da Ovidio (43 a.C. - 17 d.C.) nell’opera “Metamorfosi” sono emblema di una nobiltà di spirito che dovrebbe certamente far meditare anche noi:

« Smettetela, uomini, di profanare i vostri corpi con cibi empì! Ci sono le messi, ci sono alberi stracarichi di frutti, ci sono turgidi grappoli d’uva sulle viti; ci sono erbe dolci e tenere. Avete a disposizione il latte e il miele profumato di timo. La terra nella sua generosità vi propone in abbondanza blandi cibi e vi offre banchetti senza stragi né sangue. Che enorme delitto è ingurgitare viscere altrui nelle proprie, far ingrassare il proprio corpo ingordo a spese di altri corpi, e vivere, noi animali, della morte di altri animali! »

Cap. 8: EQUIVALENZE; I TEOREMI DI EUCLIDE E DI PITAGORA

8.1 - L'EQUIVALENZA DELLE SUPERFICI PIANE

- Una “**superficie piana**” è una porzione di piano, limitata da una linea chiusa: ad esempio, sono superfici piane i poligoni, o i cerchi.
- L’ “**estensione**” di una superficie piana è “la quantità di piano occupata dalla superficie”.
*“Superficie” ed “estensione” sono “concetti primitivi”,
 la cui descrizione è insita implicitamente negli assiomi che ad essi si riferiscono.*

Due superfici con uguale estensione sono dette “**equivalenti**”.

Se prendiamo una lamiera di metallo e ritagliamo da essa due porzioni di ugual peso, avremo l'idea di due superfici equivalenti.

Ancora: l'imbianchino che impieghi la stessa quantità di vernice per pitturare due diverse pareti, ha verniciato due superfici equivalenti.

Il simbolo che utilizzeremo per indicare equivalenza sarà un “uguale, col puntino sopra”: $\doteq$

ASSIOMI della relazione di “equivalenza fra superfici piane”

1. **Due superfici uguali (= congruenti) sono equivalenti**
2. **L'equivalenza delle superfici piane gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva**

- PROPRIETA' RIFLESSIVA $\forall A, A \doteq A$

Ogni superficie è equivalente a sé stessa

- PROPRIETA' SIMMETRICA $A \doteq B \rightarrow B \doteq A$

Se una superficie A è equivalente ad una superficie B , allora anche B è equivalente ad A

- PROPRIETA' TRANSITIVA $(A \doteq B \wedge B \doteq C) \rightarrow A \doteq C$

Se una superficie A è equivalente ad una superficie B ,
 e la superficie B a sua volta è equivalente ad una superficie C ,
 allora A è equivalente a C :

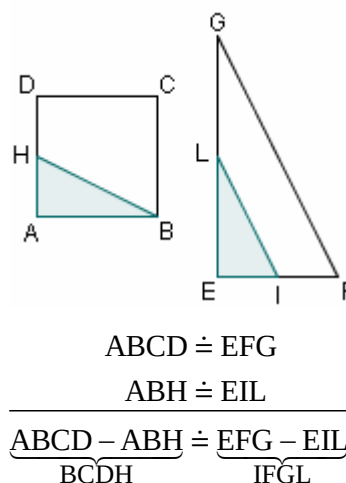
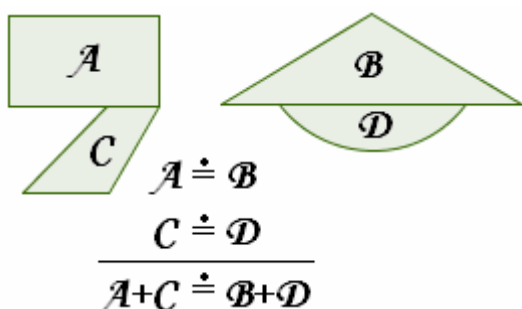
In altre parole, due superfici equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro.

3. **Somme, o differenze, di superfici equivalenti (in particolare: uguali), sono equivalenti**

NOTA. Per “somma” di due superfici, intendiamo la superficie “totale”.

Per poter essere “sommate”, due superfici devono essere prive di intersezione, o, al più, avere in comune soltanto punti del contorno.

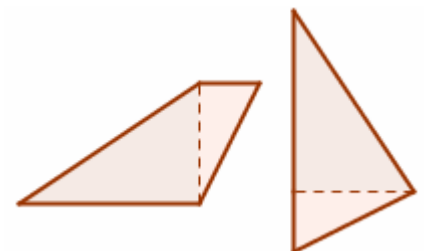
Per sommare due superfici S ed S' che siano parzialmente sovrapposte, così da avere in comune anche dei punti interni ai contorni, occorre sostituire ad una di esse (es. S') una superficie congruente, o equivalente, disposta in modo tale da poter essere sommata con S .



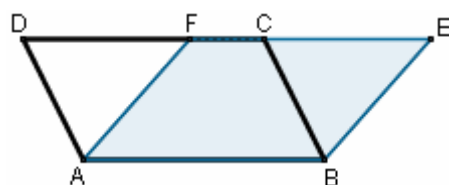
COROLLARIO

dell'assioma 3:

**due superfici
equiscomponibili
(ossia: scomponibili in parti
rispettivamente uguali)
sono equivalenti**



*Ad esempio, sono equivalenti
il trapezio e il triangolo in figura,
perché scomponibili in triangoli
rispettivamente uguali*

TEOREMA. Due parallelogrammi aventi ugual base e uguale altezza sono equivalenti

IPOTESI

ABCD, ABEF parallelogrammi
con ugual base e uguale altezzaTESI $ABCD \doteq ABEF$

DIM.

I due triangoli ADF, BCE sono uguali per il Primo Criterio perché hanno: $AD = BC$ (lati opposti di un parallelogrammo); $AF = BE$ (stesso motivo); $\widehat{DAF} = \widehat{CBE}$ (angoli coi lati paralleli e concordi). Quindi:

$ABED \doteq ABED$ (ogni superficie è equivalente a sé stessa : assioma 2, proprietà riflessiva dell'equivalenza)

$ADF \doteq BCE$ (due superfici uguali sono anche equivalenti : assioma 1)

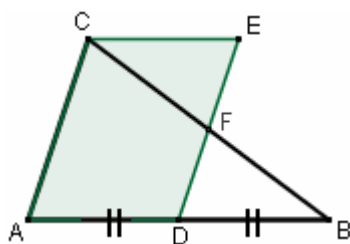
$$\frac{ABED - ADF}{ABEF} = \frac{ABED - BCE}{ABCD}$$

Vuoi sapere perché abbiamo preferito ragionare per differenza anziché per somma? Clicca qui: [⇨](#)

COROLL. Un parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo avente ugual base e uguale altezza

NOTA 1 – Il corollario appena enunciato autorizza a calcolare l'area di un parallelogrammo tramite la **stessa formula che consente di calcolare l'area di un rettangolo**:

$S_{\text{RETT.}} = b \cdot h$ (vedi a questo proposito il precedente capitolo "Misura delle Grandezze").

TEOREMA. Un triangolo è equivalente a un parallelogrammo avente base uguale a metà base del triangolo, e per altezza la stessa altezza

IPOTESI:

ABC triangolo

ADEC parallelogrammo con $AD = \frac{1}{2}AB$, e stessa altezza di ABC

TESI

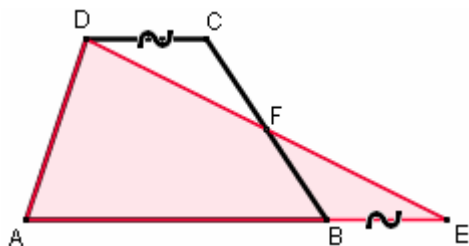
 $ABC \doteq ADEC$

DIM.

I due triangoli DBF, EFC sono uguali per il Secondo Criterio (due parallele, alterni interni, $DB = AD = CE$). Possiamo allora scrivere la catena $ABC = ADFC + DBF \doteq ADFC + EFC = ADEC$, che dimostra la tesi.

NOTA 2 – Combinando questo teorema con la NOTA 1 si ha la

formula per l'area di un triangolo: $S_{\text{TRIANG.}} = \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{b \cdot h}{2}$

COROLLARIO. Due triangoli con ugual base e uguale altezza sono equivalenti**TEOREMA. Un trapezio è equivalente a un triangolo avente base uguale alla somma delle basi del trapezio, e per altezza la stessa altezza**

IPOTESI

ABCD trapezio

 $BE = DC$,

così che il triangolo AED abbia base uguale alla somma delle basi del trapezio, e per altezza la stessa altezza del trapezio

TESI

 $ABCD \doteq AED$

DIM.

I due triangoli FCD e FBE sono uguali per il Secondo Criterio. Ne consegue

$ABCD = ABFD + FCD \doteq ABFD + FBE = AED$, c.v.d.

NOTA 3 - Questo teorema, insieme con la formula di cui alla NOTA 2, giustifica la

formula per l'area di un trapezio: $S_{\text{TRAP.}} = \frac{(\text{BASE MAGG.} + \text{base min.}) \cdot \text{altezza}}{2} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

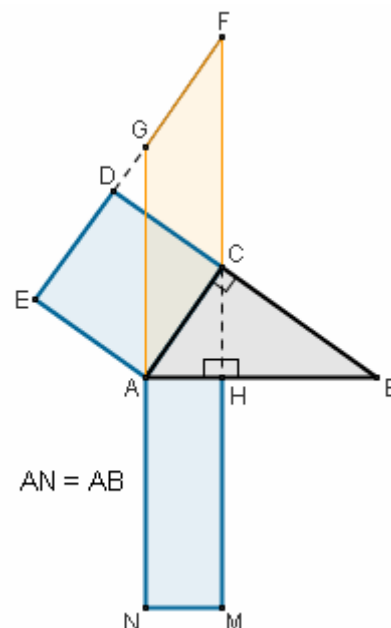
8.2 - I TEOREMI DI EUCLIDE E DI PITAGORA

IL 1° TEOREMA DI EUCLIDE

**In un triangolo rettangolo,
il quadrato costruito su di un cateto
è equivalente al rettangolo,
avente per dimensioni
l'ipotenusa
e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa:**

$$q(AC) \doteq r(AB, AH)$$

*Se pensiamo che due superfici equivalenti,
ossia aventi la stessa estensione, hanno la stessa "area"
(dove per "area" intendiamo la "misura numerica dell'estensione"),
e teniamo presenti le formule per l'area di quadrato e rettangolo,
note dalle scuole medie e discusse in questo volume
nel capitolo dedicato alla "Misura delle Grandezze",
otteniamo*



il 1° Teorema di Euclide enunciato IN FORMA ARITMETICA:

**In un triangolo rettangolo, il quadrato di un cateto
(nel senso di "la misura del cateto, elevata alla seconda")
è uguale al prodotto dell'ipotenusa per la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa
(ci si riferisce al prodotto delle misure, ovviamente):**

$$AC^2 = AB \cdot AH$$

Figura dinamica GEOGEBRA ➔

DIM.

La figura mostra:

- un triangolo rettangolo ABC;
- il quadrato ACDE costruito su di un cateto;
- e il rettangolo AHMN, il quale, poiché si è preso $AN = AB$, ha una dimensione uguale all'ipotenusa AB, e l'altra dimensione uguale alla proiezione AH del cateto AC prima considerato, sull'ipotenusa.

Vogliamo dimostrare che le due superfici $ACDE = q(AC)$ e $AHMN = r(AB, AH)$ sono equivalenti.

A tale scopo, prolunghiamo i tre segmenti NA, MC, ED, in modo da ottenere il parallelogramma ACFG.

Tale parallelogramma farà da "figura-ponte": faremo vedere che è equivalente sia al quadrato, che al rettangolo.

E con ciò resterà dimostrato, per la proprietà transitiva dell'equivalenza,

che il quadrato ACDE e il rettangolo AHMN sono equivalenti fra loro.

Ora, che il parallelogramma ACFG e il quadrato ACDE siano equivalenti è immediato:

infatti, se si prende AC come base sia per ACFG che per ACDE, si vede che il segmento CD fa da altezza per entrambi: quindi il parallelogramma e il quadrato sono equivalenti perché hanno stessa base e stessa altezza.

Un poco più impegnativo è dimostrare che sono equivalenti il rettangolo AHMN e il parallelogramma ACFG.

AHMN e ACFG sono inscritti nella stessa striscia, avente per lati le due rette NG ed MF: quindi, se si prendono come rispettive basi AN e AG, hanno la stessa altezza (ad esempio, il segmento AH fa da altezza per entrambi).

Si tratta allora di dimostrare che hanno anche ugual base, cioè che risulta $AN = AG$.

Ma $AN = AB$, quindi se riusciamo a far vedere che $AB = AG$, la nostra dimostrazione sarà completata.

A tale scopo, confrontiamo i due triangoli ABC, AGE: se riusciamo a dimostrarli uguali, siamo a posto.

In effetti tali due triangoli hanno:

- $AC = AE$ perché lati di un quadrato;
- $\hat{ACB} = \hat{AEG} = 90^\circ$
- $\hat{CAB} = \hat{EAG}$ perché complementari dello stesso angolo $\hat{GAC}$
($\hat{CAB} = \hat{GAB} - \hat{GAC} = 90^\circ - \hat{GAC} = \hat{CAE} - \hat{GAC} = \hat{EAG}$)

E' dunque $ABC = AGE$ per il Secondo Criterio, come intendevamo provare. La tesi è perciò dimostrata.

RIAS- $ABC = AGE$ (2° crit.) $\rightarrow AB = AG$ (quindi $AN = AB = AG$)
SU- $AHMN \doteq ACFG$ (ugual base: $AN = AG$, stessa altezza AH)
MEN- $ACFG \doteq ACDE$ (stessa base AC, stessa altezza CD) $\rightarrow AHMN \doteq ACFG \doteq ACDE$ **c.v.d.**

OSSERVAZIONE: la dimostrazione appena conclusa costituisce un bell'esempio di METODO TOP-DOWN!

IL TEOREMA DI PITAGORA

In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa

$$q(AC) + q(BC) \doteq q(AB)$$

DIM.

La figura mostra:

- un triangolo rettangolo ABC;
- i quadrati ACDE e CBGF costruiti sui cateti e il quadrato ABLN costruito sull'ipotenusa.

E' stata anche tracciata l'altezza CH relativa all'ipotenusa, poi prolungata fino ad incontrare il segmento NL in M.

In questo modo, sono comparsi nella figura due rettangoli:

- AHMN, che ha una dimensione uguale all'ipotenusa, e l'altra dimensione uguale alla proiezione del cateto AC sull'ipotenusa;
- HBLM, che ha una dimensione uguale all'ipotenusa, e l'altra dimensione uguale alla proiezione del cateto BC sull'ipotenusa.

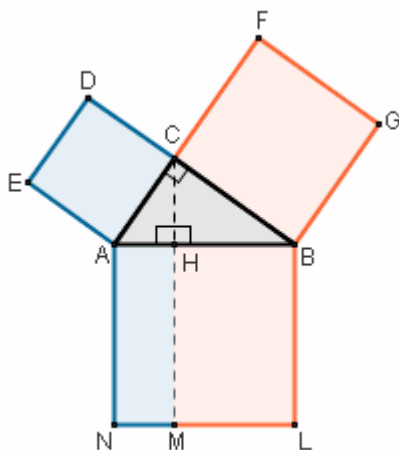
Ora si ha

$$AHMN \doteq ACDE \quad (1^\circ \text{ Teorema di Euclide})$$

$$HBLM \doteq CBGF \quad (1^\circ \text{ Teorema di Euclide})$$

$$\frac{AHMN + HBLM}{ABLN} \doteq \frac{ACDE + CBGF}{ABLN}$$

c.v.d.



Il Teorema di Pitagora enunciato IN FORMA ARITMETICA:

In un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati dei cateti ("quadrato" nel senso di "misura elevata alla seconda") è uguale al quadrato dell'ipotenusa

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

Figura dinamica GEOGEBRA ➔

IL 2° TEOREMA DI EUCLIDE

In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa

$$q(CH) \doteq r(AH, HB)$$

DIM.

Nella figura compaiono:

- un triangolo rettangolo ABC;
- il quadrato ACDE costruito sul cateto AC;
- il quadrato CHKF costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa (CH);
- il rettangolo AHMN, che è una "vecchia conoscenza" proveniente dal Primo Teorema di Euclide: infatti la dimensione AN è stata presa uguale all'ipotenusa AB. poi sul segmento AN è stato preso un segmento AQ = AH e da Q è stata tracciata la parallela QP ad AH, così da ottenere il quadrato AHPQ ed il rettangolo NMPQ. Quest'ultimo rettangolo ha una dimensione uguale ad AH, mentre l'altra sua dimensione è $NQ = AN - AQ = AB - AH = HB$. Insomma, NMPQ ha le due dimensioni uguali alle proiezioni AH, HB dei due cateti sull'ipotenusa, ed è dunque il rettangolo di cui parla la tesi.

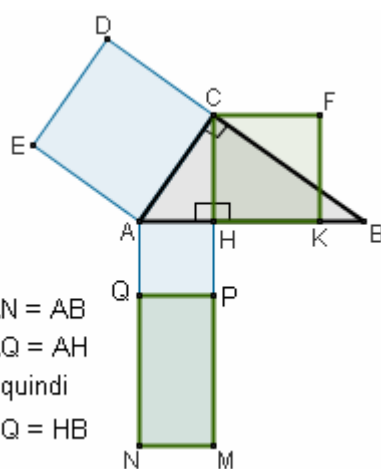
Si tratta, in definitiva, di dimostrare che il quadrato CHKF è equivalente al rettangolo NMPQ.

E tale equivalenza si può provare con la seguente catena:

$$CHKF \doteq_{\text{Pitagora su AHC}} ACDE - AHPQ$$

$$ACDE \doteq_{\text{per il 1° Teorema di Euclide applicato ad ABC}} AHMN$$

$$AHMN - AHPQ = NMPQ \quad \text{c.v.d.}$$



Il 2° Teorema di Euclide enunciato IN FORMA ARITMETICA:

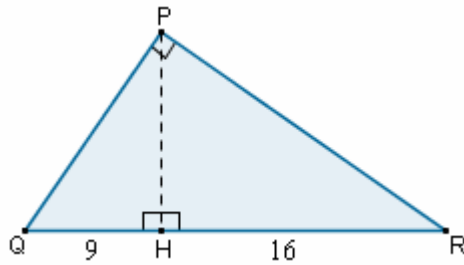
In un triangolo rettangolo, il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è uguale al prodotto delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa

$$CH^2 = AH \cdot HB$$

Figura dinamica GEOGEBRA ➔

ESEMPI NUMERICI, ESERCIZI SUI TEOREMI DI EUCLIDE E DI PITAGORA

- a) In un triangolo rettangolo PQR, di ipotenusa QR, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano rispettivamente 9 cm e 16 cm. Determinare perimetro e area del triangolo.



$$\widehat{QPR} = 90^\circ$$

$$PH \perp QR$$

$$QH = 9 \text{ cm}, HR = 16 \text{ cm}$$

$$2p(PQR) = ?$$

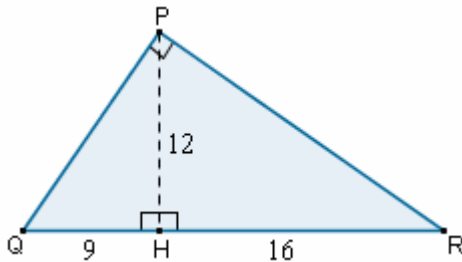
$$S(PQR) = ?$$

Il fatto che siano note le misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa ci fa venire in mente il 2° Teorema di Euclide, del quale sono “protagoniste” tali due proiezioni, insieme con l'altezza relativa all'ipotenusa. Dunque

$$\boxed{PH^2 = QH \cdot HR} \quad (\text{Euclide 2°}, PQR)$$

e da qui ricaviamo

$$\boxed{PH = \sqrt{QH \cdot HR}} \quad \begin{matrix} \text{NOTA 1} \\ \text{NOTA 2} \end{matrix} = \sqrt{9 \cdot 16} \quad \begin{matrix} \text{NOTA 2} \\ \text{NOTA 3} \end{matrix} = \sqrt{144} \quad \begin{matrix} \text{NOTA 3} \end{matrix} = 12 \text{ cm}$$



NOTA 1 Ovviamente, davanti alla radice non mettiamo il doppio segno $\pm$ perché il valore negativo non avrebbe senso in questo contesto.

NOTA 2 Anche: $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$

NOTA 3 L'unità di misura, a stretto rigore, andrebbe scritta ad ogni passaggio della catena; noi, per brevità, la mettiamo solo nel passaggio finale.

Ora possiamo ricavare il cateto PQ:

- ♫ applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PHQ:

$$\boxed{PQ^2 = QH^2 + PH^2} \quad (\text{Pitagora}, PHQ)$$

da cui

$$\boxed{PQ = \sqrt{QH^2 + PH^2}} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

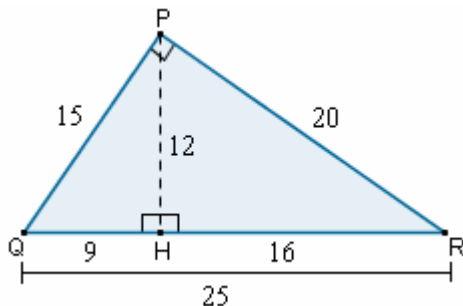
E possiamo ricavare il cateto PR:

- ♫ applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PHR:

$$\boxed{PR^2 = HR^2 + PH^2} \quad (\text{Pitagora}, PHR)$$

da cui

$$\boxed{PR = \sqrt{HR^2 + PH^2}} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$



- ♫ oppure applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo PQR:

$$\boxed{PQ^2 = QR \cdot QH} \quad (\text{Euclide 1°}, PQR), \text{ da cui}$$

$$\boxed{PQ = \sqrt{QR \cdot QH}} = \sqrt{(9+16) \cdot 9} = \sqrt{25 \cdot 9} = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

- ♫ oppure applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo PQR:

$$\boxed{PR^2 = QR \cdot HR} \quad (\text{Euclide 1°}, PQR), \text{ da cui}$$

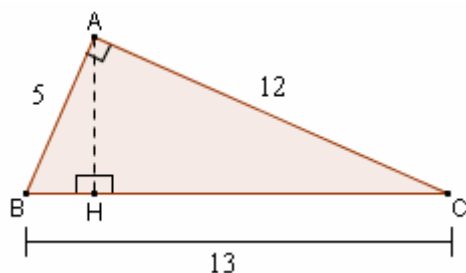
$$\boxed{PR = \sqrt{QR \cdot HR}} = \sqrt{(9+16) \cdot 16} = \sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$

$$\boxed{2p(PQR)} = PQ + QR + PR = 15 + 25 + 20 = \boxed{60 \text{ cm}}$$

$$\boxed{S(PQR)} = \frac{QR \cdot PH}{2} = \frac{25 \cdot 12}{2} = \boxed{150 \text{ cm}^2}$$

$$\text{oppure } S(PQR) = \frac{PQ \cdot PR}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2$$

- b) In un triangolo rettangolo i cui lati misurano 5, 12 e 13, quali sono le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa? E dell'altezza relativa all'ipotenusa?



$$AB^2 = BC \cdot BH \quad (\text{Euclide 1}^\circ, ABC)$$

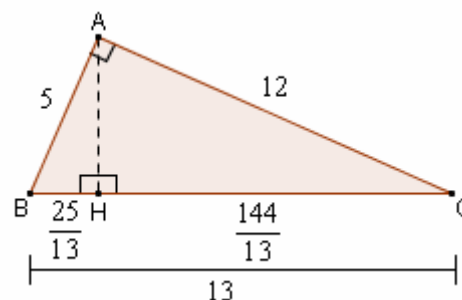
$BC \cdot BH = AB^2$ (scambiando i membri)

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{5^2}{13} = \frac{25}{13} \text{ cm}$$

$$HC = BC - BH = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13} \text{ cm}$$

$$AH^2 = BH \cdot HC \quad (\text{Euclide 2}^\circ, ABC)$$

$$AH = \sqrt{BH \cdot HC} = \sqrt{\frac{25}{13} \cdot \frac{144}{13}} = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 12^2}{13^2}} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13} \text{ cm}$$



In alternativa (con calcoli, però, più pesanti)

si sarebbe potuta calcolare immediatamente l'altezza relativa all'ipotenusa mediante la formula

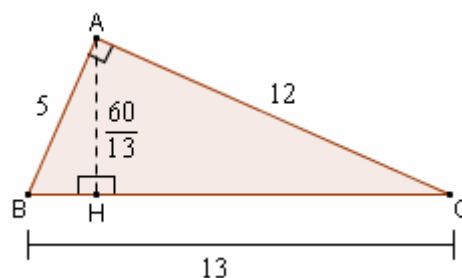
$$\text{altezza} = \frac{\text{doppia area}}{\text{ipotenusa}} = \frac{\text{prodotto cateti}}{\text{ipotenusa}}$$

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13} \text{ cm}$$

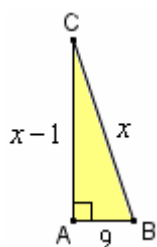
per poi ricavare le proiezioni con Pitagora:

$$BH^2 + AH^2 = AB^2 \quad (\text{Pitagora, ABH})$$

$$BH^2 = AB^2 - AH^2, \quad BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \dots = \sqrt{\frac{625}{169}} = \frac{25}{13} \text{ cm}$$



- c) In un triangolo rettangolo, un cateto misura metri 9, e l'altro cateto è inferiore di 1 metro all'ipotenusa. Determina tutti i lati del triangolo.



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$9^2 + (x-1)^2 = x^2$$

$$81 + x^2 - 2x + 1 = x^2$$

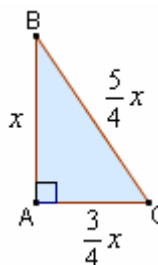
$$-2x = -82; \quad x = 41$$

$$BC = 41 \text{ m}, \quad AC = 40 \text{ m}$$

In questo problema, Pitagora è stato utilizzato per impostare l'equazione risolvente.

INUTILE, IN CASI SIMILI, SCOMODARE formule inverse o RADICI QUADRATE: quando si desidera scrivere un'uguaglianza contenente x che serva da equazione risolvente, basta a tale scopo la relazione pitagorica "originaria".

- d) In un triangolo rettangolo, i cateti sono uno $\frac{3}{4}$ dell'altro e il perimetro misura $36a$. Determinare l'area.



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2} = \dots = \frac{5}{4}x$$

$$x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x = 36a \quad \dots \quad x = 12a$$

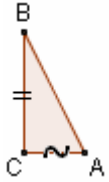
$$AC = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4} \cdot 12a = 9a$$

$$S = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{9a \cdot 12a}{2} = 54a^2$$

In questo problema, dunque, il teorema di Pitagora è stato impiegato per esprimere un segmento in funzione di x .

L'INVERSO DEL TEOREMA DI PITAGORA

Se in un triangolo
la somma dei quadrati costruiti su due lati
è equivalente al quadrato costruito sul terzo lato,
allora il triangolo è rettangolo
(e ha il terzo lato come ipotenusa)



IPOTESI

$$q(AC) + q(BC) \doteq q(AB)$$

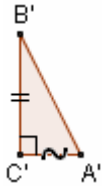
TESI

ABC è rettangolo, con ipotenusa AB

L'inverso del Teorema di Pitagora
enunciato
in FORMA
ARITMETICA:

Se in un triangolo
la somma dei quadrati di due lati
("quadrato" nel senso di
"misura elevata alla seconda")
è uguale al quadrato del terzo lato,
allora il triangolo è rettangolo
e ha il terzo lato come ipotenusa

DIM. Si considera (fig. qui a destra) un angolo retto $\hat{C}'$,
e sui suoi lati si prendono due segmenti $A'C' = AC$ e $B'C' = BC$.
Si congiunge poi A' con B' , ottenendo così un triangolo rettangolo $A'B'C'$.
L'obiettivo è a questo punto di dimostrare che i due triangoli $A'B'C'$ e ABC sono uguali:
con ciò resterà infatti provato che anche ABC , al pari di $A'B'C'$, è rettangolo.
Ora, ABC e $A'B'C'$ hanno già uguali, per costruzione, due lati:
se riuscissimo a far vedere che hanno uguale anche il lato rimanente, saremmo a posto,
perché potremmo invocare il 3° Criterio.
E in effetti, si ha:



$$q(A'B') \stackrel{\substack{\doteq \\ \text{perché} \\ A'B'C' \\ \text{è rettangolo} \\ \text{per costruzione}}}{=} q(A'C') + q(B'C') \stackrel{\substack{\doteq \\ \text{perché} \\ A'C'=AC, \\ B'C'=BC \\ \text{per costruzione}}}{=} q(AC) + q(BC) \stackrel{\substack{\doteq \\ \text{per} \\ \text{ipotesi}}}{=} q(AB).$$

Ma se $q(A'B') \doteq q(AB)$, ne consegue $A'B' = AB$!

Possiamo dunque davvero concludere che i due triangoli ABC , $A'B'C'$ sono uguali per il 3° Criterio, c.v.d.

♥ E' giusto dire che un triangolo coi lati di 3, 4 e 5 cm è rettangolo "per il Teorema di Pitagora"?

Beh, no, perché dovremmo dire invece "per l'INVERSO del Teorema di Pitagora"!

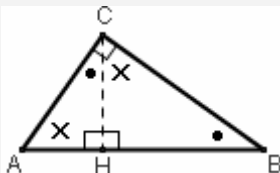
Tuttavia, se per "Teorema di Pitagora" intendiamo

quel *doppio* enunciato che consta del teorema diretto e del suo inverso,

l'espressione verbale ritorna ad essere accettabile.

I TEOREMI DI EUCLIDE "RITROVATI PER SIMILITUDINE"

♥ A distanza di tempo, potresti avere difficoltà a ricordare gli enunciati dei due Teoremi di Euclide.
Se ciò accadesse, tieni conto della possibilità di ricostruirli utilizzando le Similitudini,
che saranno oggetto di studio in un capitolo successivo.



E' ben noto che quando, in un triangolo rettangolo,
si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa,
si ottengono tre triangoli rettangoli (compreso quello di partenza),
dotati della proprietà di avere gli angoli rispettivamente uguali.
Ora, si dimostra (teoria delle Similitudini),
che quando due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali,
allora sono "simili", ossia hanno anche i lati in proporzione
(in pratica, sono "uno l'ingrandimento dell'altro").
I lati che si corrispondono nella proporzione
sono quelli che stanno opposti ad angoli uguali.

Dunque, con riferimento alla figura:

- $ACH \sim ABC \rightarrow AH : AC = AC : AB \rightarrow AC^2 = AH \cdot AB$ (1° Teorema di Euclide)
simile con
- $ACH \sim CHB \rightarrow AH : CH = CH : HB \rightarrow CH^2 = AH \cdot HB$ (2° Teorema di Euclide)
simile con

TERNE PITAGORICHE

Una “terna pitagorica” è
una terna di numeri naturali
tutti non nulli a, b, c tali che

$$a^2 + b^2 = c^2$$

	3	4	5
	5	12	13
	8	15	17
Esempi:	7	24	25
	20	21	29
	...	...	...

Un programmino
che dà un elenco
delle terne pitagoriche
⇒

E' evidente che una terna “pitagorica” prende questo nome dal fatto che i suoi termini possono essere interpretati come le misure dei tre lati di un triangolo rettangolo.

Infatti il **Teorema di Pitagora** afferma (nella sua lettura “aritmetica”) che

“in un triangolo rettangolo,

la somma dei quadrati (NOTA) dei cateti è uguale al quadrato dell'ipotenusa”

mentre il suo inverso afferma che

“se in un triangolo la somma dei quadrati (NOTA) di due lati è uguale al quadrato del terzo lato,
allora il triangolo è rettangolo e ha il terzo lato come ipotenusa”

NOTA: “quadrato” nel senso di “misura elevata alla seconda”

- Se si prendono i tre termini a, b, c di una terna pitagorica e li si moltiplica per uno stesso numero naturale maggiore di 1, si ottiene un'altra terna pitagorica.

$$\text{infatti } a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 \Leftrightarrow k^2a^2 + k^2b^2 = k^2c^2 \Leftrightarrow (ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$$

vale a dire: se (a, b, c) è una terna pitagorica,

allora anche (ka, kb, kc) lo è, e viceversa.

Ad esempio, dalla terna $(3, 4, 5)$ si generano tutte le “figlie”

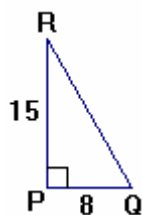
$(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$, $(12, 16, 20)$, $(15, 20, 25)$, $(18, 24, 30)$, $(21, 28, 35)$, ...

- Diremo che una terna pitagorica è “primitiva” o “fondamentale” se i suoi tre termini sono “primi fra loro”,
ossia non hanno divisori comuni
(= il loro Massimo Comun Divisore è 1),
altrimenti parleremo di terna “derivata”.

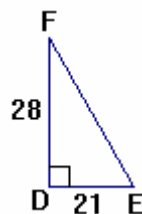
- Per scoprire nuove terne pitagoriche possiamo anche sfruttare delle IDENTITÀ algebriche:
ad esempio, per le tre espressioni $n^2 - p^2$; $2np$; $n^2 + p^2$
vale l'identità $(n^2 - p^2)^2 + (2np)^2 = (n^2 + p^2)^2$ (verificalo!)
quindi, se attribuiamo alle lettere n, p valori interi a nostro piacere,
la terna $(n^2 - p^2, 2np, n^2 + p^2)$ sarà SEMPRE una terna pitagorica.

- Tante cose si potrebbero aggiungere; qui ci accontentiamo di rilevare un aspetto molto “pratico”:
se sono noti 2 lati di un dato triangolo rettangolo, e si osserva che le loro misure coincidono con i termini che hanno ugual posto in una terna pitagorica nota,
allora la determinazione del lato rimanente sarà immediata !!!

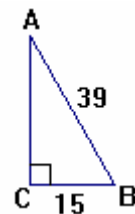
Esempi:



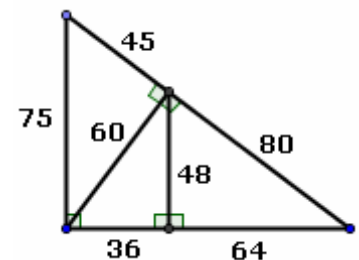
Qui possiamo subito dire,
se ricordiamo la terna
 $(8, 15, 17)$,
che $QR = 17$.



Se osserviamo che
 $21 = 3 \cdot 7$; $28 = 4 \cdot 7$
capiamo di trovarci di fronte
alla terna pitagorica
 $(3, 4, 5)$ moltiplicata per 7,
e concludiamo immediatamente che
 $EF = 5 \cdot 7 = 35$



Se osserviamo che
 $39 = 13 \cdot 3$; $15 = 5 \cdot 3$
e ricordiamo la terna pitagorica
fondamentale $(5, 12, 13)$
avremo subito,
senza dover fare calcoli,
 $AC = 12 \cdot 3 = 36$



Verifica che dalla figura ↑
si possono trarre
5 terne pitagoriche.

Verifica che
 $(2001, 2002000, 2002001)$
è una terna pitagorica.

Suggerimento utile:
controlla che sia
 $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$

PITAGORA: STORIA, APPROFONDIMENTI DAL SITO DEL PROF. PEIRETTI

Sul bellissimo sito <http://www2.polito.it/didattica/polymath/>

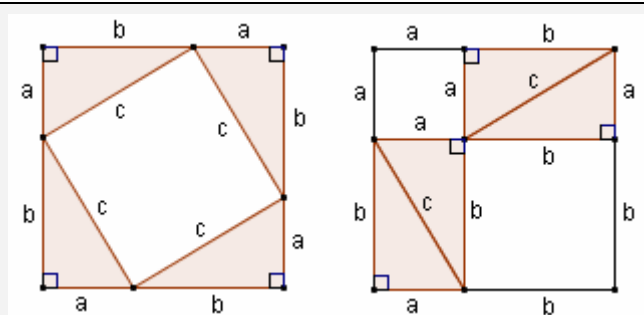
(progetto Polymath, dedicato alla bellezza della matematica), troviamo, fra le tante cose interessanti, queste splendide lezioni su Pitagora e il suo Teorema a cura del professor Federico Peiretti di Torino: ➡

LE TANTE DIMOSTRAZIONI ALTERNATIVE DEL TEOREMA DI PITAGORA

Del Teorema di Pitagora sono state escogitate tantissime dimostrazioni alternative.

Il sito www.cut-the-knot.org, in questa pagina ➡, ne riporta più di 100!!!

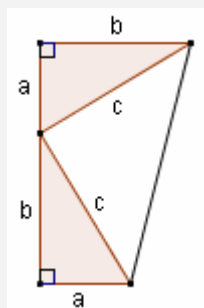
Ecco qui di seguito tre possibili modalità di dimostrazione del teorema.



In questa dimostrazione vengono indicate con a , b , c le misure dei tre lati del triangolo rettangolo. Nella prima figura quattro copie del triangolo sono state disposte in modo tale da lasciare in mezzo una regione vuota, che si può dimostrare facilmente essere quadrata.

Nella figura a fianco le stesse quattro mattonelle triangolari sono state posate in maniera differente. Ma i due quadratoni più grossi sono uguali (il loro lato è, in entrambi i casi, $a+b$) e quindi hanno la stessa estensione anche le regioni bianche che rappresentano, nei due casi, la differenza fra i due quadratoni uguali e la superficie formata dalle quattro mattonelle triangolari.

Segue la tesi: $c^2 = a^2 + b^2$



La figura qui a fianco si riferisce ad una dimostrazione trovata da Garfield (1831-1881), un presidente degli Stati Uniti che si diletta di matematica.

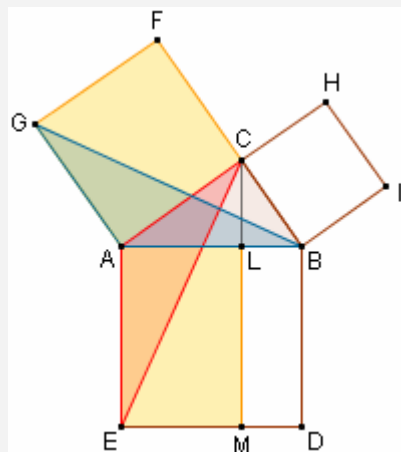
Due copie di un triangolo rettangolo di lati a , b , c sono state disposte in modo che, tracciata una congiungente, si formasse un trapezio rettangolo.

Poiché gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono fra loro complementari, ne deriva che il triangolo bianco ha un angolo di $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Se calcoliamo l'area del trapezio in due modi differenti, avremo

$$S = \frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} \quad \text{ma anche} \quad S = 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{c \cdot c}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$

$$\text{e quindi} \quad \frac{(a+b)^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2} \quad \text{da cui} \quad \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = \frac{2ab + c^2}{2} \quad \text{c.v.d.}$$



La figura a sinistra riporta la dimostrazione che si trova negli "Elementi", il più famoso testo di geometria di tutti i tempi, scritto da Euclide intorno al 300 a. C.

Il triangolo rett. di partenza è ABC (l'angolo retto è quello di vertice C); ABDE, ACFG, BCHI sono i tre quadrati costruiti sui lati mentre CL è l'altezza relativa all'ipotenusa, poi prolungata in LM.

Tracciate le congiungenti BG e CE, possiamo osservare che il quadrato ACFG è equivalente alla metà del triangolo ABG (infatti il quadrato e il triangolo hanno la stessa base AG e uguale altezza) mentre il rettangolo ALME è equivalente alla metà del triangolo ACE (stessa base AE e uguale altezza).

Ma i due triangoli ABG e ACE sono uguali per il 1° Criterio (i due loro angoli di vertice A sono uguali a 90° + uno stesso angolo) perciò è $ACFG \equiv ALME$;

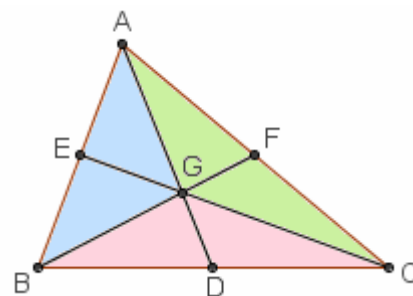
e analogamente si potrebbe far vedere che è $BCHI \equiv LBDM$.

Sommando si ha $ACFG + BCHI \equiv ALME + LBDM = ABDE$ c.v.d.

RIPASSO, ESERCIZI su equivalenze e teoremi di Euclide e Pitagora

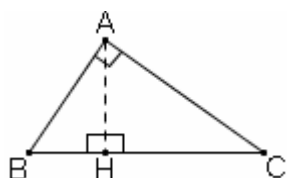
- 1) Dimostra che un parallelogrammo è suddiviso dalle sue diagonali in quattro triangoli fra loro equivalenti.
- 2) Dimostra che se si tracciano le diagonali di un trapezio, i due triangoli che hanno per lati i due lati obliqui sono equivalenti fra loro.

- 3) Dimostra che i sei triangoli in cui un triangolo dato è suddiviso dalle sue mediane, sono tutti equivalenti fra loro.



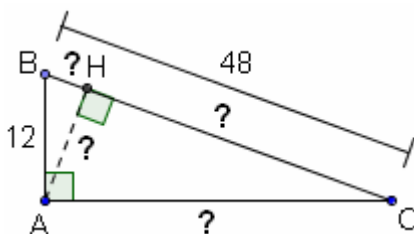
4)

a)

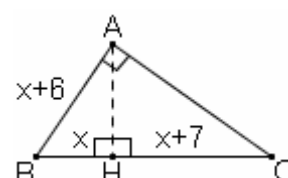


Euclide 1°: $AB^2 = BC \cdot BH$
Enuncialo anche a parole!

b)



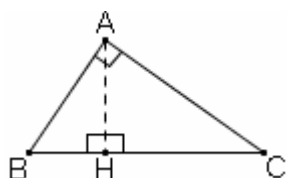
c)



$x = ?$
 $S(ABC) = ?$

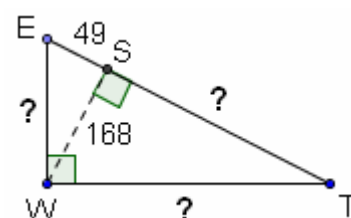
5)

a)

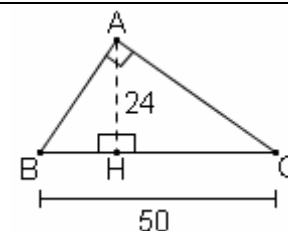


Euclide 2°: $AH^2 = BH \cdot HC$
Enuncialo anche a parole.

b)



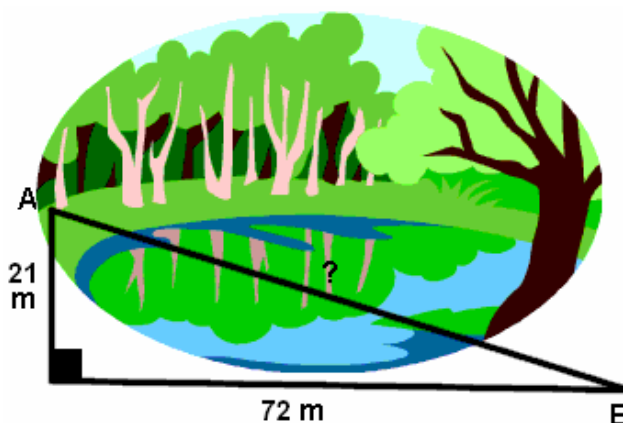
c)



$BC = 50$, $AH = 24$
 $2p(ABC) = ?$

www.proprofs.com

- 6) To get from point A to point B Myranda must avoid walking through the pond. She walks 21 meters south and 72 meters east. How many meters is the shortest distance from point A to point B?



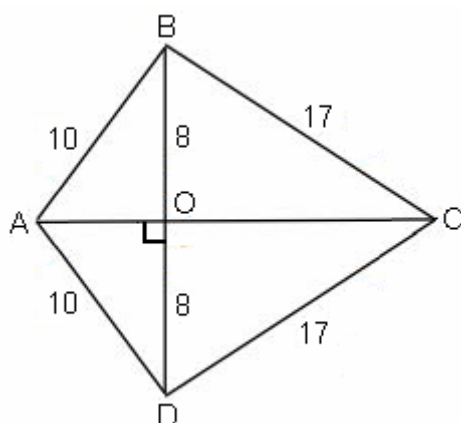
- 7) Breanna has a laptop computer that has a 37 centimeter diagonal screen. The width of the laptop is 12 centimeters.

What is the length of the laptop?

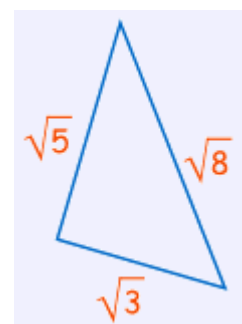
Da

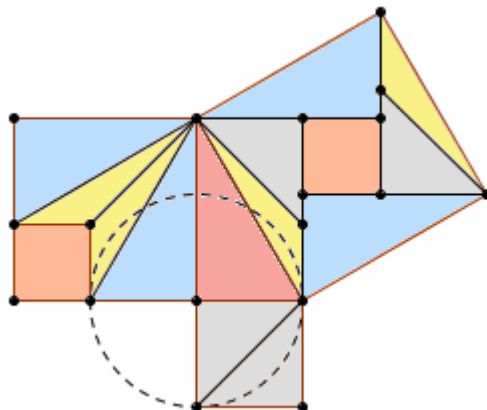
www.mathsisfun.com

- 8) The diagram shows a kite ABCD. The diagonals cut at right angles and intersect at O. What is the length of the diagonal AC?



- 9) Does this triangle have a right angle?



3	4	...	13	...	85	← 10) Elenco delle più semplici terne pitagoriche primitive (da completare)	Ispirato a un problema trovato su di un'antica tavola babilonese:
5	12	...	...	63	65		11) Una trave lunga 30 dm
...	24	25	20	...	29		sta verticalmente a ridosso di una parete.
8	...	17	28	45	...		Mentre la sua sommità scivola in basso di
...	40	41	...	56	65		6 dm mantenendosi appoggiata alla parete,
11	60	...	36	77	...		di quanti dm l'estremità che poggia a terra
12	...	37	39	...	89	si allontana dalla parete?	
12) Se n è un intero qualunque, la terna (a, b, c), dove a = 2n+1; b = 2n(n+1); c = 2n(n+1)+1 è sempre una terna pitagorica: dimostrarlo.							13) Se (a, b, c) è una terna pitagorica, allora anche a+2b+2c; 2a+b+2c; 2a+2b+3c sarà una terna pitagorica: dimostrarlo.
Scritto intorno al 200 a. C., ripreso con ampliamenti e commenti da Liu Hui nel III secolo d.C., "I Nove Capitoli dell'Arte Matematica" è il "classico" dell'antichità matematica cinese. Pressappoco come avvenne per gli Elementi di Euclide nel mondo greco antico, questo scritto rappresentò un compendio della matematica che si era sviluppata in Cina fino a quel tempo.							14) Un'asta metallica poggia contro una parete verticale sulla quale il suo punto d'appoggio si trova all'altezza di 10 cm. Se l'altra estremità dell'asta, quella che poggia a terra, viene allontanata dalla parete in modo da distare da essa 1 cm in più di quanto distava prima, l'asta finirà per giacere orizzontale a terra. Quanto è lunga quest'asta?
 Questo francobollo è dedicato a Liu Hui I due problemi qui a fianco → sono liberamente ispirati a quesiti tratti da quel testo.							15) Un bastone ha la stessa lunghezza della diagonale di un'anta di armadio, ed è di 4 dm più lungo dell'altezza dell'anta e di 2 dm più lungo della sua larghezza. Quanto misurano le dimensioni dell'anta? [Equazione di 2° grado ...]
							16) La figura qui a sinistra mostra una delle tante possibili dimostrazioni del Teorema di Pitagora. C'è chi la attribuisce al cinese Liu Hui, di cui abbiamo parlato, ma non è certo. Cerca di comprenderla nei particolari, e di capire perché funziona per qualsiasi triangolo rettangolo.

QUALCHE RISPOSTA

- 1) Hanno tutti e quattro ugual base e uguale altezza, perché ...
- 2) Sono differenze fra due triangoli equivalenti e uno stesso triangolo ...
- 3) BGD e CGD sono equivalenti perché hanno ugual base e stessa altezza; poiché com'è noto la mediana AD è divisa dal baricentro G in due parti delle quali quella contenente il vertice A è doppia dell'altra, il triangolo BGD avrà estensione uguale alla metà di quella del triangolo BGA = AGE + BGE, quindi ...
- 4b) $BH = 3$, $HC = 45$, $AH = 3\sqrt{15}$, $AC = 12\sqrt{15}$ 4c) $(x+6)^2 = x(2x+7)$; $x = 9$, $S(ABC) = 150$
- 5b) $ST = 576$, $WE = 175$, $WT = 600$ 5c) $BH = x$; $x(50-x) = 24^2$; $x = 18 \vee x = 32$, $2p(ABC) = 120$
- 6) 75 m 7) 35 cm 8) 21 9) Sì, per l'inverso del Teorema di Pitagora: $(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{8})^2$
- 11) Di 18 dm 14) E' lunga 50,5 cm 15) 6 dm e 8 dm

Altri problemi sui teoremi di Euclide e Pitagora si trovano a pagina 245

GEOMETRIA Cap. 9: SIMILITUDINI

Per comodità del lettore riportiamo alcune nozioni di base sulle proporzioni già esposte nel Volume 1.

9.1 - PROPORZIONI

Si dice "**proporzione**" un'uguaglianza fra due rapporti (= quozienti).

Esempio

$$12 : 16 = 15 : 20$$

Questa proporzione è corretta, perché effettivamente i due rapporti (=quozienti) $12:16$ e $15:20$ sono uguali fra loro (valgono entrambi $\frac{3}{4}$, o, se si preferisce: $0,75$).

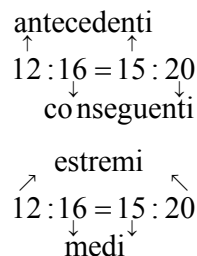
Di solito si legge "**12 sta a 16 come 15 sta a 20**", proprio per evidenziare il fatto che si va a confrontare il "peso di un numero rispetto all'altro": 12, nei confronti di 16, è $\frac{3}{4}$ e quindi è proprio come 15 nei confronti di 20.

ESERCIZI (risposte più avanti in questa pagina)

- Quanto deve valere x se si vuole che la proporzione $24 : 12 = x : 11$ sia corretta?
- Quanto deve valere y se si vuole che la proporzione $5 : 15 = y : 18$ sia corretta?
- Quanto deve valere z se si vuole che la proporzione $6 : 4 = 30 : z$ sia corretta?

Un po' di **terminologia**. In una proporzione,

- i due dividendi (cioè: il 1° e il 3° termine) si dicono "**antecedenti**";
- i due divisori (cioè: il 2° e il 4° termine) si dicono "**consequenti**";
- il 1° e il 4° termine si dicono "**estremi**";
- il 2° e il 3°, "**medi**".



Risposte agli esercizi di questa pagina

- Il quoziente $24:12$ vale 2, quindi anche il quoziente $x:11$ dovrà valere 2, e ciò avviene a condizione che x sia uguale a 22.
Anche: così come 24 è il doppio di 12, altrettanto x dovrà essere il doppio di 11 da cui $x=22$.
- Così come 5 è la terza parte di 15, anche y dovrà essere la terza parte di 18. Perciò $y=6$.
- $6:4=1,5$ ossia il 6 è 1 volta e mezza il 4. Il 30 è una volta e mezza ... che cosa? 20, evidentemente!
Anche ragionando "da destra a sinistra":
 z , rispetto al 30, dovrà avere lo stesso "peso" che ha il 4 rispetto al 6.
Ma 4 è $\frac{2}{3}$ di 6, cioè $\frac{2}{3}$ di 6, e allora z dovrà essere $\frac{2}{3}$ di 30, cioè 20.

PROPRIETA' FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI

In una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi;

E, VICEVERSA,

se 4 numeri non nulli sono tali che il prodotto di due di essi è uguale al prodotto degli altri due, allora con tali quattro numeri si può costruire una proporzione, a patto di prendere come medi (o come estremi) i fattori di un medesimo prodotto.

Brevemente: se a, b, c, d sono quattro numeri non nulli, vale la **doppia implicazione**

$$a : b = c : d \Leftrightarrow ad = bc$$

Dimostrazione $a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad = bc$

Importante - **Questa proprietà consta di DUE enunciati**: un enunciato **diretto**, e il rispettivo **inverso**.

Essa fornisce perciò una condizione NECESSARIA E SUFFICIENTE affinché quattro numeri non nulli, presi in un dato ordine, formino una proporzione valida.

Per verificare se una proporzione è corretta, anziché calcolare i due quozienti per vedere se coincidono, **si può andare a vedere se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi**: così facendo si applica, appunto, la "Proprietà Fondamentale" (precisamente, nel suo "aspetto **INVERSO**").

La Proprietà Fondamentale delle proporzioni ha importanti **conseguenze**.

Ad esempio, supponiamo che in una proporzione siano noti i primi tre termini ma non il quarto. Allora:

$$a : b = c : x; \quad ax = bc; \quad x = \frac{bc}{a}.$$

E in generale, è facile vedere che:

**se il termine incognito è un estremo, sarà uguale al prodotto dei medi FRATTO l'estremo noto;
se il termine incognito è un medio, sarà uguale al prodotto degli estremi FRATTO il medio noto**

Esempio: $25 : x = 20 : 12 \quad x = \frac{25 \cdot 12}{20} = 15$

Se più termini di una proporzione sono espressi in funzione di una stessa incognita x , la proporzione si può interpretare come un'equazione che permetterà di trovare il valore di x .

Applicare la Propr. Fondamentale è in questo caso un modo veloce e comodo per liberarsi dai denominatori.

Esempio: ... In alternativa, si poteva trasformare in una "classica" equaz. coi denominatori:

$$(x+4) : 10 = (2x+1) : 15$$

$$(x+4) \cdot 15 = 10 \cdot (2x+1)$$

$$15x + 60 = 20x + 10$$

$$-5x = -50; \quad x = 10$$

$$(x+4) : 10 = (2x+1) : 15$$

$$\frac{x+4}{10} = \frac{2x+1}{15}; \quad \frac{3(x+4)}{30} = \frac{2(2x+1)}{30} \text{ ecc.}$$

PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI (sul Vol. 1 trovi anche un paio di dimostrazioni, a titolo di esempio)

Le proporzioni godono di diverse altre **proprietà**, che permettono, a partire da una proporzione fissata $a : b = c : d$, di ricavarne altre, che saranno corrette anch'esse se e solo se lo è quella di partenza.

$b : a = d : c$ (invertire) $a : c = b : d$ (permutare i medi) $d : b = c : a$ (permutare gli estremi)

$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$ $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$ (comporre e scomporre applicato agli antecedenti e ai conseguenti)
 $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$ $(a \pm c) : (b \pm d) = c : d$

Alle proprietà sopra elencate si può aggiungere la seguente, relativa alle "catene di rapporti uguali":

"data una CATENA DI RAPPORTI UGUALI, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti come ciascun antecedente sta al proprio conseguente".

Es.: dalla catena $14 : 7 = 6 : 3 = 10 : 5$ si possono ricavare le 3 proporzioni $(14+6+10) : (7+3+5) = \begin{cases} 14 : 7 \\ 6 : 3 \\ 10 : 5 \end{cases}$

Applicazione: trovare 3 numeri sapendo che la loro somma è 90 e che sono proporzionali ai numeri 4, 11, 3 (o, come anche si dice, "stanno fra loro come 4:11:3")

$$x : 4 = y : 11 = z : 3 \quad (x+y+z) : (4+11+3) = x : 4 \quad 90 : 18 = x : 4 \quad x = \frac{90 \cdot 4}{18} = 20 \quad \dots \text{e analogamente per } y, z$$

Il quarto termine di una proporzione è detto

"QUARTO PROPORZIONALE dopo i primi tre termini".

Ad esempio, nella proporzione $8 : 6 = 12 : 9$ abbiamo che 9 è il quarto proporzionale dopo 8, 6, 12.

□ Trovare il quarto proporzionale dopo 24, 6, 8

$$\boxed{24 : 6 = 8 : x} \text{ da cui } x = \frac{6 \cdot 8}{24} = 2 \text{ (anche molto più semplicemente: 24 è il quadruplo di 6; e 8 a sua volta è il quadruplo ... di cosa? Di 2, è ovvio!)}$$

Una proporzione in cui i due medi sono uguali si dice "PROPORZIONE CONTINUA".

Ad esempio, $9 : 6 = 6 : 4$ è una proporzione continua.

In una proporzione continua, ciascuno dei due medi uguali si dice

"MEDIO PROPORZIONALE fra il 1° e il 4° termine".

Ad esempio, in $9 : 6 = 6 : 4$, il 6 è medio proporzionale fra 9 e 4.

□ Trovare il medio proporzionale fra 2 e 32

$$\boxed{2 : x = x : 32} \quad x^2 = 2 \cdot 32; \quad x^2 = 64; \quad x = 8 \text{ (oppure } x = \pm 8, \text{ a seconda del contesto)}$$

ESERCIZI

- 1) Verifica che le seguenti proporzioni sono tutte corrette, controllando che in ciascuna il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi
 a) $12:16=15:20$ b) $12:6=6:3$ c) $40:12=100:30$ d) $1,2:2,16=1,5:2,7$
- 2) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni, pensando direttamente all'uguaglianza dei due rapporti e quindi *senza applicare le formule* "prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"
 a) $6:3=x:5$ b) $6:3=5:x$ c) $15:3=35:x$ d) $15:3=x:4$
 e) $1:2=2:x$ f) $x:10=4:8$ g) $3:4=x:28$ h) $2:3=x:10$
 i) $4:3=x:12$ j) $x:4=6:30$ k) $40:50=x:2$ l) $18:x=30:40$
 m) $7:y=6:3$ n) $24:8=z:11,25$ o) $t:2,6=12:8$ p) $0,05:5=x:0,2$
- 3) Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni, *applicando le formule* "prodotto dei medi fratto l'estremo noto", "prodotto degli estremi fratto il medio noto"
 a) $12:20=18:x$ b) $10:25=x:10$ c) $x:3=4:5$ d) $15:x=35:30$
 e) $12:5=x:8$ f) $x:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ g) $x:2,4=3,2:5$ h) $0,8:0,2=0,1:x$
- 4) Le seguenti proporzioni contengono più volte un'incognita. Determina il valore di questa.
 a) $18:(x+4)=15:x$ b) $(x+2):14=(x+3):16$ c) $x:(x+1)=(x+2):(x+7)$
 d) $h:(h-2)=(h-3):h$ e) $(w+1,2):4=(w-1,2):3$ f) $a:(2a+3)=5:10$
- 5) Determina il *quarto proporzionale* dopo:
 a) 4, 8 e 10 b) 5, 15 e 15 c) 40, 25 e 32 d) 3, 4 e 5
 e) 3; 3,3; 4 f) 2,5; 3,6; 4,7 g) 3^7 , 3^{11} , 3^{10} h) $5 \cdot 10^{12}$, $3 \cdot 10^{13}$, $2 \cdot 10^8$
- 6) Determina il *medio proporzionale* (positivo) fra:
 a) 3 e 48 b) 24 e 6 c) 2 e 3 d) 2,5 e 6,4
 e) 3^7 e 3^{11} f) 3,3 e $3\bar{3}$ g) 1 e 5^6 h) 100 e 1000
- 7) **Dividere un numero in parti proporzionali a due numeri dati**
 Dividere il numero 30 in parti proporzionali ai numeri 5 e 7 significa trovare due numeri x, y tali che
 a. $x+y=30$
 b. $x:5=y:7$.
 Se, partendo dalla proporzione, si applica la proprietà del "comporre gli antecedenti e i conseguenti", si ottiene $\frac{(x+y):(5+7)}{30} = \frac{x:5}{y:7}$ da cui $x=12,5$; $y=17,5$
 In generale, comunque, per dividere un numero c in due parti proporzionali ai due numeri a e b , basta dividere c per la somma $a+b$ poi moltiplicare il risultato ottenuto prima per a poi per b .
 Dividi il numero dato in parti proporzionali ai numeri a fianco specificati:
 a) 30; 1 e 4 b) 30; 2 e 3 c) 100; 2 e 3 d) 1; 9 e 11
 e) 0,07; 5 e 9 f) 30; 5 e 2 g) 72; 2, 3 e 4 h) 72; 2 e 3
- 8) ♥ Pierino, alla richiesta di determinare x nella proporzione $(x+3):x=2x:25$, scrive: $x=\frac{25(x+3)}{2x}$, ma non è molto convinto di questo procedimento. Cosa gli consiglieresti?

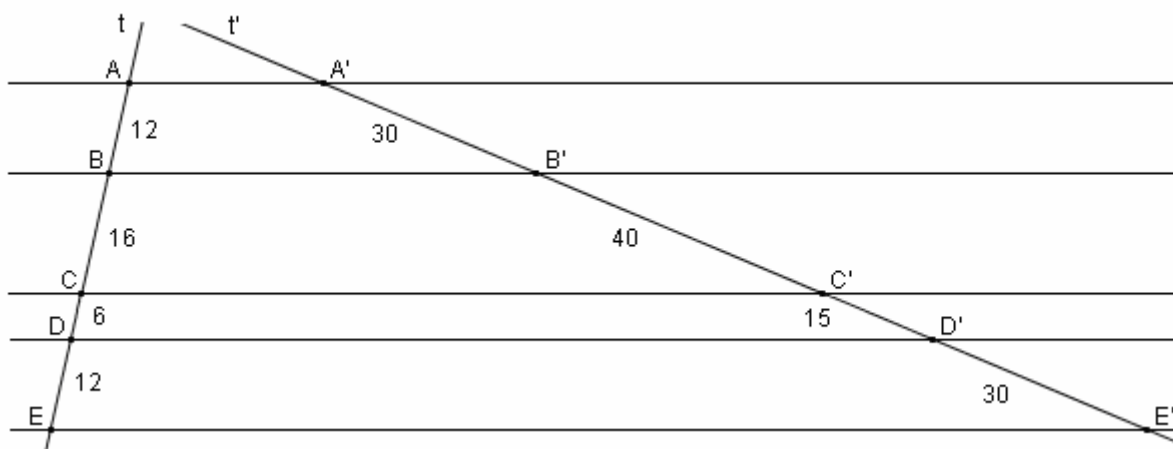
RISULTATI

- 2a) 10 2b) 2,5 2c) 7 2d) 20 2e) 4 2f) 5 2g) 21 2h) 20/3
 2i) 16 2j) 4/5 2k) 8/5 2l) 24 2m) 3,5 2n) 33,75 2o) 3,9 2p) 0,002
 3a) 30 3b) 4 3c) 12/5 3d) 90/7 3e) $96/5=19,2$ 3f) 5/8 3g) 1,536 3h) 0,025
 4a) 20 4b) 5 4c) 1/2 4d) 6/5 4e) 8,4 4f) impossibile
 5a) 20 5b) 45 5c) 20 5d) 20/3 5e) 4,4 5f) 6,768 5g) 3^{14} 5h) $1,2 \cdot 10^9$
 6a) 12 6b) 12 6c) $\sqrt{6} \approx 2,45$ 6d) 4 6e) 3^9 6f) $\sqrt{11} \approx 3,317$ 6g) 5^3 6h) $\sqrt{100000} \approx 316$
 7a) 6 e 24 7b) 12 e 18 7c) 40 e 60 7d) 0,45 e 0,55 7e) 0,025 e 0,045 7f) $150/7 \approx 21,4$ e $60/7 \approx 8,6$
 7g) 16, 24 e 32 7h) 28,8 e 43,2 8) Di fare *prodotto dei medi = prodotto degli estremi* poi risolvere l'equazione

9.2 - SIMILITUDINI

□ IL TEOREMA DI TALETE (= “Grande” Teorema di Talete)

Quando un fascio di rette parallele viene tagliato da due trasversali, i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali



Vale a dire, con riferimento alla figura:

$$(1) \quad AB : CD = A'B' : C'D'$$

o anche, applicando la proprietà del permutare:

$$(2) \quad AB : A'B' = CD : C'D'$$

Il “Teorema di Talete” è dunque una **generalizzazione** dell’enunciato che avevamo chiamato “**Piccolo Teorema di Talete**” e che affermava:

“Se un fascio di parallele è tagliato da due trasversali, a segmenti uguali su una trasversale corrispondono segmenti uguali sull’altra”.

I DUE MODI ALTERNATIVI DI “VEDERE” LA PROPORZIONALITÀ

Dicendo “i segmenti staccati dalle parallele sulle trasversali sono proporzionali”, voglio intendere che:

♪ un segmento (sulla 1^a trasversale) sta ad un altro segmento (sempre sulla 1^a trasversale) come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo (vedi proporzione 1)

oppure, in modo PERFETTAMENTE EQUIVALENTE:

♪ un segmento (sulla 1^a trasversale) sta al suo corrispondente (sulla 2^a trasversale) come un altro segmento (sulla 1^a trasversale) sta al suo corrispondente (sulla 2^a trasversale) (vedi proporzione 2)

Dimostrazione del Teorema di Talete

Quando un fascio di parallele è tagliato da due trasversali t e t' , si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra l’insieme S dei segmenti giacenti su t (S è una classe di grandezze, “sottoclasse” della più generale classe di tutti i segmenti del piano) e l’insieme S' dei segmenti che giacciono su t' .

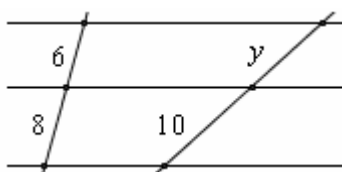
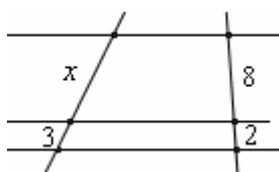
E’ noto da un teorema precedente che

“a segmenti uguali su una trasversale, corrispondono segmenti uguali sull’altra”; ed è evidente che

“a un segmento, su una trasversale, che sia somma di due certi segmenti, corrisponde quel segmento, sull’altra trasversale, che è la somma dei rispettivi corrispondenti” (ad es. nella figura, al segmento AC , che è la somma $AB+BC$, corrisponde il segmento $A'C'$, che è proprio la somma di $A'B'$ (corrispondente di AB) con $B'C'$ (corrispondente di BC).

Allora sono verificate le condizioni del “Criterio di Proporzionalità” (cap. 7, pag. 195), per cui la tesi è dimostrata.

Due esercizietti sul Teorema di Talete: determina x e y .



Soluzioni

$$x : 3 = 8 : 2 \text{ oppure } x : 8 = 3 : 2 \\ \text{da cui } x = 12$$

$$6 : 8 = y : 10 \text{ oppure } 6 : y = 8 : 10 \\ \text{da cui } y = 15/2 = 7,5$$

□ POLIGONI SIMILI

Due poligoni con lo stesso numero di lati si dicono “simili” se sono uno l’ingrandimento dell’altro.

Specifichiamo meglio, cercando di dare una veste matematica precisa a questa idea.

Se ti sforzi di disegnare due poligoni, ad esempio due quadrilateri, in modo che **uno di essi appaia come l’ingrandimento dell’altro**,

ti renderai conto che dovrai innanzitutto disegnarli

con **gli angoli rispettivamente uguali**;

... ma ciò **non sarà sufficiente**:

ci vorrà qualcosa in più, e precisamente dovrai fare in modo che **i lati siano in proporzione**.

*I due poligoni della figura sottostante
hanno gli angoli rispettivamente uguali.
Eppure, evidentemente,
NON sono “uno l’ingrandimento dell’altro”...*

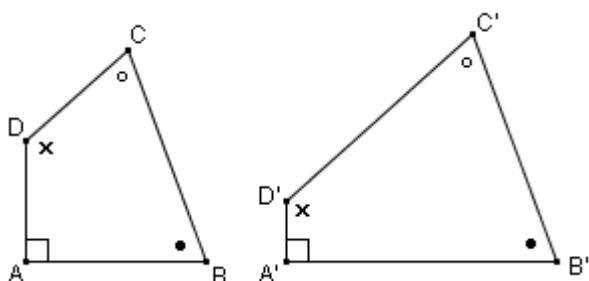


Figura 1

*... Invece i due poligoni di quest’altra figura,
oltre ad avere gli angoli rispettivamente uguali,
hanno pure i lati proporzionali,
perché ciascun lato del primo poligono
è $\frac{2}{3}$ del lato che gli corrisponde
nel secondo poligono.
In questa Figura 2, i due poligoni in gioco appaiono
“uno l’ingrandimento dell’altro”.*

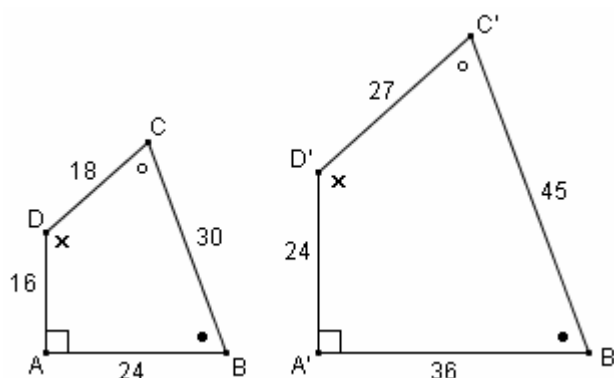


Figura 2

Da queste considerazioni discende la seguente

DEFINIZIONE

Due poligoni aventi lo stesso numero di lati si dicono SIMILI se hanno:

- I) gli angoli rispettivamente uguali**
- II) e i lati corrispondenti proporzionali**

Dire che “hanno i lati corrispondenti proporzionali” significa dire che il rapporto fra due lati corrispondenti è lo stesso per ogni coppia di lati corrispondenti.

Con riferimento alla *Figura 2*,

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'.$$

Tale rapporto costante si dice

“rapporto di similitudine”.

Ad es., in *Figura 2*, il rapporto di similitudine dei due quadrilateri ABCD, A'B'C'D' (presi in quest’ordine), è $\frac{3}{2}$ (prendendoli invece nell’ordine opposto, il rapporto di similitudine sarebbe $\frac{2}{3}$)

$$\text{rapporto di similitudine} = \frac{\text{lato poligono pensato per secondo}}{\text{lato poligono pensato per primo}}$$

per cui se il rapporto di similitudine è
 < 1 , il secondo è rimpicciolito rispetto al primo;
 > 1 , il secondo è ingrandito rispetto al primo.

□ TRIANGOLI SIMILI

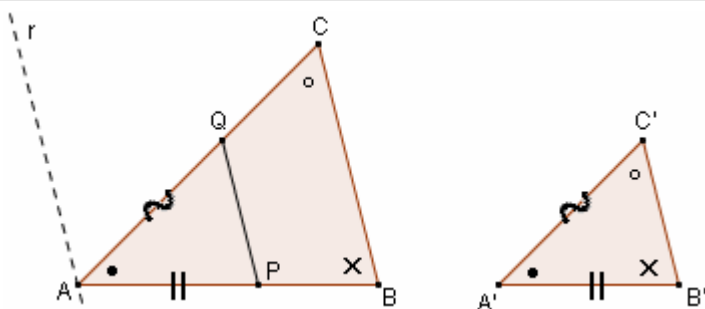
Abbiamo visto che due poligoni si dicono simili se hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati corrispondenti proporzionali.

Nel caso dei triangoli, tuttavia, **questa definizione si rivela sovrabbondante**, perché si può dimostrare che se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora hanno SENZ’ALTRO anche i lati corrispondenti proporzionali; cosa che invece non necessariamente accade per i poligoni con più di tre lati.

Questo enunciato prende il nome di “Primo Criterio di Similitudine”.

TEOREMA (1° Criterio di Similitudine):

Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora sono simili, cioè hanno anche i lati corrispondenti proporzionali



IPOTESI

$$\hat{A} = \hat{A}'; \quad \hat{B} = \hat{B}'; \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

TESI

ABC è simile con A'B'C',
cioè vale anche la proporzione
 $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$

Dimostrazione (per la prima proporzione; per le altre si procede in modo analogo)

Prendiamo sulla semiretta AB un segmento $AP = A'B'$, e sulla semiretta AC un segmento $AQ = A'C'$. Il triangolo APQ risulterà uguale al triangolo A'B'C' per il Primo Criterio di Uguaglianza dei Triangoli (è infatti $\hat{A} = \hat{A}'$ per ipotesi). Pertanto $\hat{APQ} = \hat{B}' = \hat{B}$ e quindi le due rette PQ e BC, formando con la trasversale AB due angoli corrispondenti uguali, sono parallele. Tracciamo ora per A un'altra retta r parallela a PQ e BC. Per il Teorema di Talete avremo $AB : AP = AC : AQ$ e quindi anche, essendo $AP = A'B'$ e $AQ = A'C'$, $AB : A'B' = AC : A'C'$

Il 1° Criterio di Similitudine è un teorema che si applica con **grandissima frequenza** negli esercizi. Osserviamo fra l'altro che si può subito concludere che due triangoli dati sono simili anche se si sa (per ipotesi o per precedente dimostrazione) che hanno **DUE angoli rispettivamente uguali**, perché allora (per differenza rispetto a 180°) saranno certo uguali anche gli angoli rimanenti.

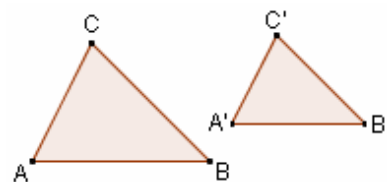
♥ PUNTUALIZZAZIONE: DUE MODI ALTERNATIVI DI “VEDERE” LA PROPORZIONALITÀ

Quando so che due certi triangoli ABC e A'B'C' sono simili, allora posso impostare le proporzioni

$$AB : A'B' = AC : A'C'; \quad AB : A'B' = BC : B'C'; \quad AC : A'C' = BC : B'C'$$

Permutando i medi in ciascuna delle tre, esse diventano:

$$AB : AC = A'B' : A'C'; \quad AB : BC = A'B' : B'C'; \quad AC : BC = A'C' : B'C'$$



Quindi se abbiamo due triangoli simili, l'affermazione che “i lati corrispondenti sono proporzionali” può essere interpretata indifferentemente in due modi, perfettamente equivalenti fra loro.

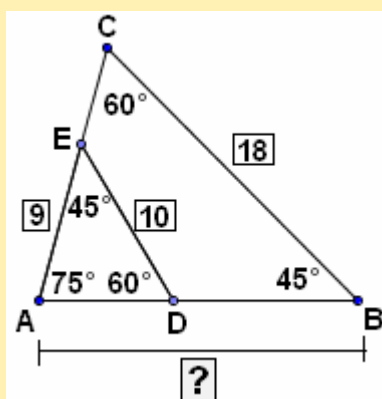
♪ Si può interpretare nel senso che il rapporto tra due lati corrispondenti è costante, cioè che

“un lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente,
come un altro lato (del 1° triangolo) sta al suo corrispondente”...

♪ ... ma si può anche interpretare nel senso che il rapporto di due lati del 1° triangolo è uguale al rapporto dei due lati corrispondenti del 2° triangolo (presi nello stesso ordine), cioè che

“un lato (del 1° triangolo) sta ad un altro lato (sempre del 1° triangolo)
come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo”.

♥ ESEMPIO DI ESERCIZIO



Nella figura, i due triangoli ABC, ADE sono simili per il 1° Criterio.

Dunque, per determinare AB, imposteremo una qualunque fra le proporzioni che coinvolgono AB insieme con segmenti noti, ad esempio

□ $AB : AE = BC : DE$ (“un lato, del 1° triangolo, sta al suo corrispondente, come un altro lato, del 1° triangolo, sta al suo corrispondente”; AB e AE si corrispondono perché entrambi opposti a un angolo di 60°)

□ OPPURE $AB : BC = AE : DE$

(un lato, del 1° triangolo, sta a un altro lato, sempre del 1° triangolo, come il corrispondente del primo sta al corrispondente del secondo)

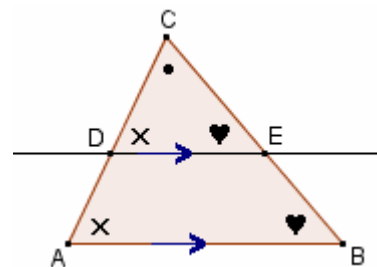
♥ In due triangoli simili, sono corrispondenti (“omologhi”) due lati che stiano opposti ad angoli uguali, o allo stesso angolo

Bene; prendiamo una qualsiasi delle proporzioni, ad es. $AB : AE = BC : DE$ e sostituiamo al posto degli elementi noti, AE, BC e DE, la loro misura (AB fa da “x”, ma è inutile una nuova lettera in questo caso: lasceremo AB).

$$\text{Avremo così } AB : 9 = 18 : 10 \quad \text{da cui} \quad AB = \frac{9 \cdot 18}{10} = \frac{162}{10} = 16,2$$

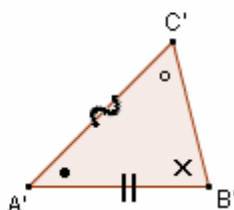
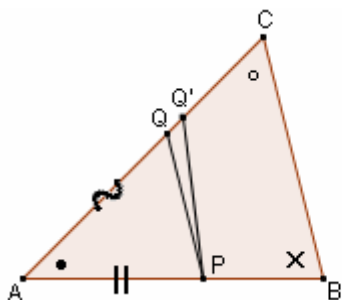
COROLLARIO del 1° Criterio di Similitudine:
Una retta parallela ad un lato di un triangolo
stacca da questo un triangolo simile al dato

Con riferimento alla figura qui a fianco:
 basta tener presente che,
 quando si hanno due parallele con trasversale,
 gli angoli corrispondenti sono uguali ...



TEOREMA (2° Criterio di Similitudine):

Se due triangoli hanno due lati proporzionali e gli angoli compresi uguali, allora sono simili



IPOTESI

$$AB : A'B' = AC : A'C'$$

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

TESI

ABC simile con A'B'C'

Dimostrazione

Prendiamo sulla semiretta AB il segmento $AP = A'B'$, e sulla semiretta AC il segmento $AQ = A'C'$. Ora il triangolo APQ risulterà uguale ad A'B'C' per il 1° Crit. di Uguaglianza dei Triangoli ($\hat{A} = \hat{A}'$ per ipotesi). Basterà dunque dimostrare che ABC è simile ad APQ; e a tale scopo, tenendo presente il Corollario del Primo Criterio di Similitudine, basterà far vedere che PQ è parallela a BC.

Per assurdo. Se PQ NON fosse parallela a BC, la parallela a BC condotta da P taglierebbe AC in un punto Q' distinto da Q; i due triangoli ABC, APQ' risulterebbero simili e si avrebbe

$$(1) \quad AB : AP = AC : AQ'$$

D'altra parte, per ipotesi e per la costruzione effettuata, vale pure la proporzione

$$(2) \quad AB : AP = AC : AQ. \quad \text{Ma}$$

se due proporzioni hanno ordinatamente uguali tre termini,
allora hanno necessariamente uguale anche il termine rimanente
 ("UNICITA' DELLA QUARTA PROPORZIONALE": vedi NOTA)

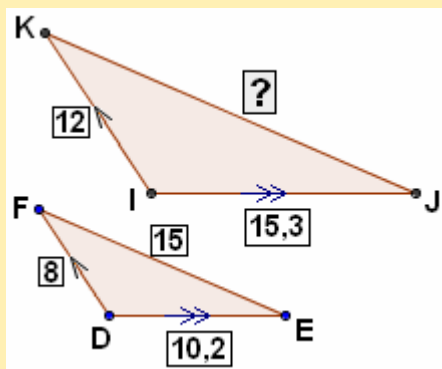
Quindi, dal fatto che valgano contemporaneamente le due proporzioni (1) e (2),
 si trae $AQ' = AQ$, e quindi $Q' \equiv Q$, contro quanto supposto.

NOTA

Se è $a : b = c : d$ e contemporaneamente $a : b = c : e$ allora si ha $d = \frac{bc}{a}$ ma anche $e = \frac{bc}{a}$ quindi sarà $d = e$ (**UNICITA' DELLA QUARTA PROPORZIONALE, O DEL QUARTO PROPORZIONALE**)



**E
S
E
M
P
I
O**



In figura, i due angoli EDF, JIK hanno i lati paralleli e concordi, quindi sono fra loro uguali.

Inoltre $12 : 8 = 15,3 : 10,2$ (i due rapporti valgono entrambi $3/2$). Di conseguenza si può affermare che i due triangoli EDF, JIK sono simili per il 2° Criterio di Similitudine.

Potremo perciò, per determinare JK, scrivere una qualunque proporzione che coinvolga JK e segmenti noti, ad esempio

$$JK : EF = IK : DF \quad \text{da cui} \quad JK = \frac{EF \cdot IK}{DF} = \frac{15 \cdot 12,3}{8,2} = \frac{45}{2} = 22,5$$

(è possibile, se si preferisce, anche scrivere

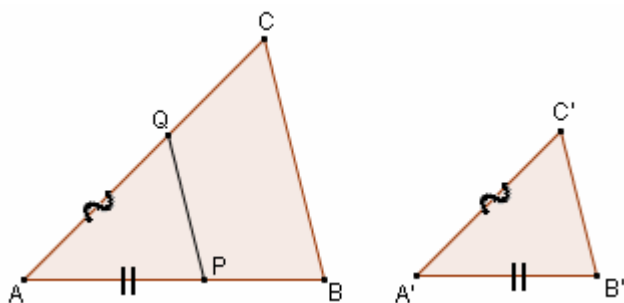
$$JK : EF = IK : DF \rightarrow JK : 15 = 12 : 8 \rightarrow JK = 15 \cdot 12 / 8 = 22,5).$$

Più rapidamente, osservato che i lati del triangolo grande sono una volta e mezza quelli del triangolo piccolo,

$$JK = \frac{3}{2} EF = \frac{3}{2} \cdot 15 = \frac{45}{2} = 22,5$$

TEOREMA (3° Criterio di Similitudine):

Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente proporzionali, allora sono simili



$$\text{HP} \quad AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$$

$$\text{TH} \quad ABC \text{ simile con } A'B'C'$$

OSSERVAZIONE

Quindi, considerate le due condizioni che nei *poligoni* definiscono la similitudine:

- 1) uguaglianza degli angoli corrispondenti
 - 2) proporzionalità dei lati
- il Terzo Criterio ci dice che, NEI TRIANGOLI, è sufficiente la SECONDA,
- mentre il Primo Criterio ci diceva che, sempre NEI TRIANGOLI, è sufficiente la PRIMA.

Dimostrazione

Prendiamo sulla semiretta AB il segmento $AP = A'B'$, e sulla semiretta AC il segmento $AQ = A'C'$. Essendo

$$AB : A'B' = AC : A'C'$$

si avrà anche

$$AB : AP = AC : AQ$$

I due triangoli ABC, APQ sono perciò simili per il 2° Criterio di Similitudine; quindi sarà pure

$$(1) \quad AB : AP = BC : PQ$$

D'altra parte, essendo, per ipotesi, $AB : A'B' = BC : B'C'$ e, per costruzione, $AP = A'B'$, si ha altresì

$$(2) \quad AB : AP = BC : B'C'$$

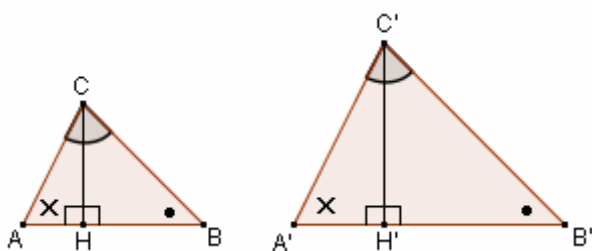
Confrontando le due proporzioni (1) e (2), per l'unicità della quarta proporzionale si trae

$$PQ = B'C'.$$

Allora i due triangoli APQ, A'B'C' sono uguali per il 3° Criterio di uguaglianza dei triangoli, ed essendo ABC simile ad APQ, sarà pure ABC simile ad A'B'C', come volevasi dimostrare.

TEOREMA

In due triangoli simili, le basi stanno fra loro come le rispettive altezze

**IPOTESI**

ABC simile con A'B'C'
 $CH \perp AB$, $C'H' \perp A'B'$

TESI

$$AB : A'B' = CH : C'H'$$

Dimostrazione

Dalla similitudine di ABC e A'B'C'

segue

$$AB : A'B' = AC : A'C'$$

Inoltre, poiché per ipotesi si ha $\hat{A} = \hat{A}'$, anche i due triangoli rettangoli ACH e A'C'H' sono simili, da cui

$$AC : A'C' = CH : C'H'.$$

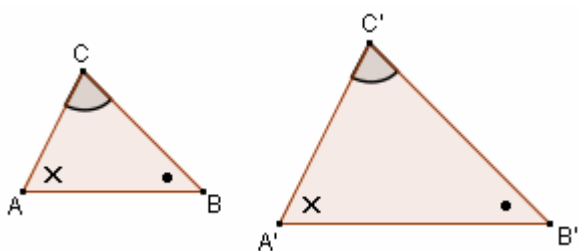
Confrontando le due proporzioni, segue subito la tesi.

OSSERVAZIONE

Perciò, se due triangoli sono simili, qualora, ad esempio, ogni lato del primo sia i $\frac{2}{3}$ del lato che gli corrisponde nel secondo (con rapporto di similitudine $\frac{3}{2}$, quindi), anche ogni altezza del primo sarà i $\frac{2}{3}$ dell'altezza che gli corrisponde nel secondo.

Insomma, il rapporto fra due qualsiasi lati corrispondenti finisce per essere anche il rapporto fra due qualsiasi *altezze* corrispondenti.

TEOREMA. In due triangoli simili, i perimetri stanno fra loro come due lati omologhi



IPOTESI

ABC simile con A'B'C'

TESI

$$2p(ABC) : 2p(A'B'C') = AB : A'B' \\ (= AC : A'C' = BC : B'C')$$

Dimostrazione

Semplicissima. Poiché, per ipotesi, ABC e A'B'C' sono simili, si avrà $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$.

Applicando a questa catena di rapporti uguali

la proprietà del comporre gli antecedenti e i conseguenti (NOTA),

si otterrà $(AB + AC + BC) : (A'B' + A'C' + B'C') = AB : A'B' (= AC : A'C' = BC : B'C')$, cioè la tesi.

NOTA. Questa proprietà afferma:

**“data una catena di rapporti uguali,
la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti
come ciascun antecedente sta al proprio conseguente”**

Ad esempio, da $14 : 7 = 6 : 3 = 10 : 5$ ricaviamo $(14 + 6 + 10) : (7 + 3 + 5) = \begin{cases} 14 : 7 \\ 6 : 3 \\ 10 : 5 \end{cases}$

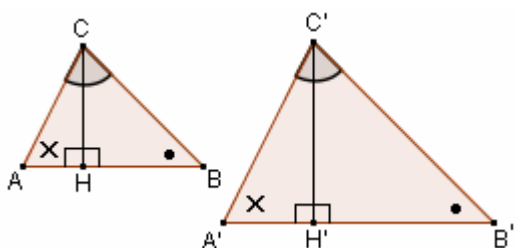
Applicazione: trovare 3 numeri sapendo che la loro somma è 90

e che sono proporzionali ai numeri 4, 11, 3 (o, come anche si dice, “stanno fra loro come 4:11:3”)

$$x : 4 = y : 11 = z : 3 \quad (x + y + z) : (4 + 11 + 3) = x : 4 \quad 90 : 18 = x : 4 \quad x = \frac{90 \cdot 4}{18} = 20 \quad \dots \text{e analogamente per } y, z$$

TEOREMA

In due triangoli simili, le aree stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi (NOTA)

*Dimostrazione*

Poiché, come già dimostrato, in due triangoli simili le basi stanno fra loro come le rispettive altezze, si avrà

$$AB : A'B' = CH : C'H' \quad \left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{CH}{C'H'} \right)$$

da cui

$$\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \frac{\frac{AB \cdot CH}{2}}{\frac{A'B' \cdot C'H'}{2}} = \frac{AB \cdot CH}{A'B' \cdot C'H'} = \\ = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{CH}{C'H'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

OSSERVAZIONE RIASSUNTIVA

Nel passaggio da un triangolo a un altro simile, *ogni lato viene moltiplicato per k*. Allora risulteranno moltiplicati anche

- il PERIMETRO per k ,
- ciascuna ALTEZZA per k ,
- l'AREA invece per il numero k^2 .

IPOTESI

ABC
simile
con
A'B'C'

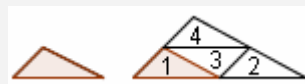
TESI

$$\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \\ = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

NOTA

Quindi, se nel passaggio da un triangolo ad un altro simile il lato, ad esempio, **raddoppia**, allora l'area diventa il **quadruplo**!

Osserva d'altronde la figura ...

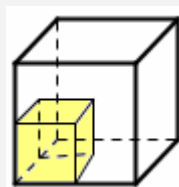


Se poi il lato triplica, l'area diventa 9 volte, ecc. Questo vale, più in generale, per tutti i poligoni, anzi per tutte le figure piane sottoposte a dilatazione o contrazione.

Nello **spazio tridimensionale**, avviene qualcosa del genere ... però ...

**In due figure solide simili,
i volumi stanno fra loro
come i CUBI di due lati omologhi.**

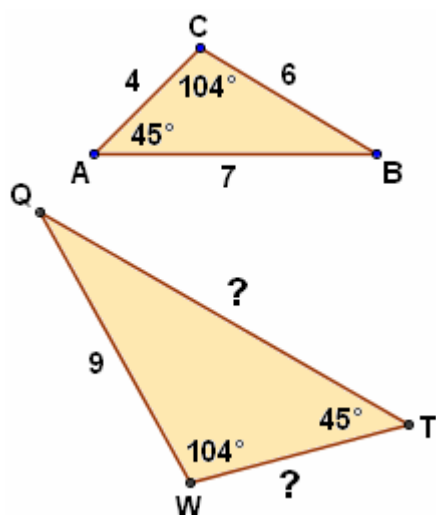
Se un solido subisce, ad es., una dilatazione in modo che ogni misura lineare raddoppi, il suo volume diventerà 8 volte tanto.



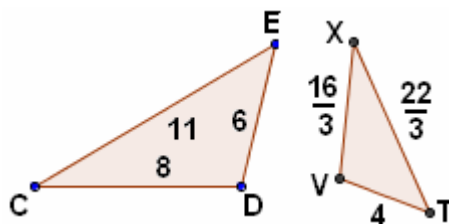
Il cubo di lato doppio richiede 8 cubetti piccoli per essere riempito. Quindi il suo volume è 8 volte il volume del cubetto piccolo.



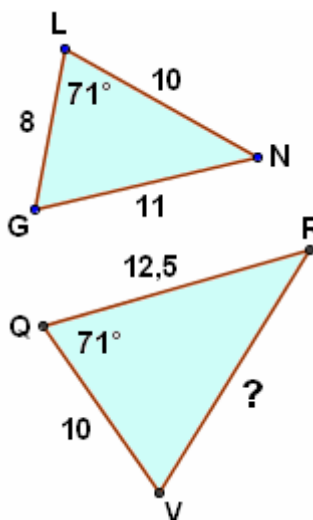
ESERCIZI sui triangoli simili



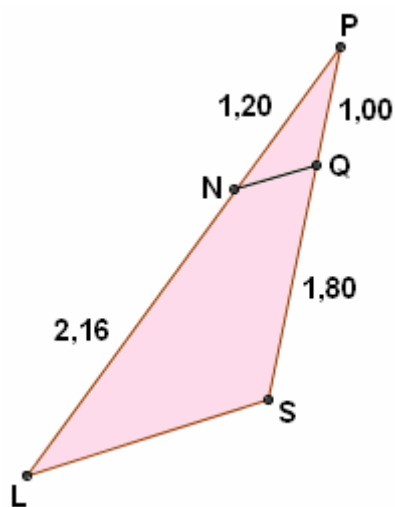
- 1) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli ABC, WTQ sono simili?
 Quanto misurano i lati indicati col punto interrogativo?
 Quanto vale il rapporto di similitudine?



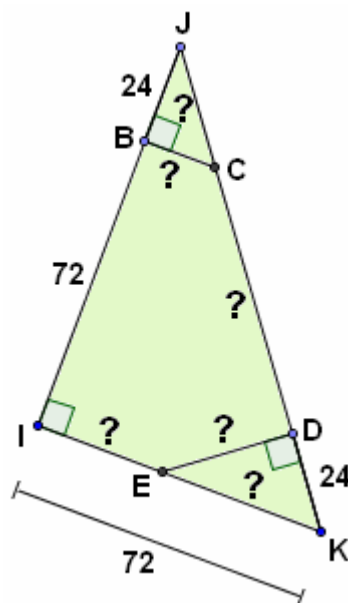
- 2) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli CDE, VTX sono simili?
 Quanto vale il rapporto di similitudine?



- 3) Quale teorema ci garantisce che i due triangoli GNL, QVR sono simili?
 Quanto vale il rapporto di similitudine?
 Quanto misura il lato indicato col punto interrogativo?



- 4) Siamo certi che NQ sia parallela a LS?

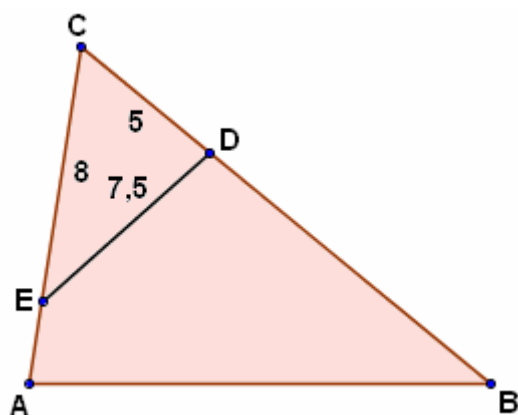


- 5) Quanto misura, innanzitutto, l'ipotenusa del triangolo rettangolo IJK?

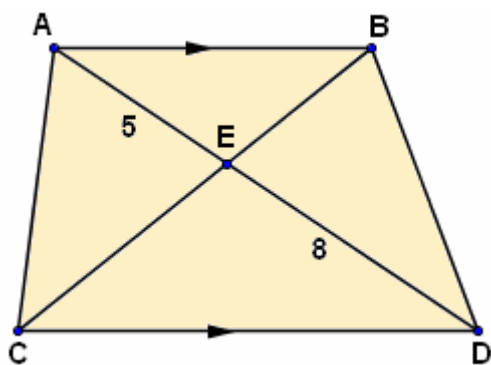
Quale teorema ci garantisce che i triangoli IJK, BJC sono simili?
 Quanto vale il loro rapporto di similitudine?

Quale teorema ci garantisce che i triangoli IJK, DEK sono simili?
 Quanto vale il loro rapporto di similitudine?

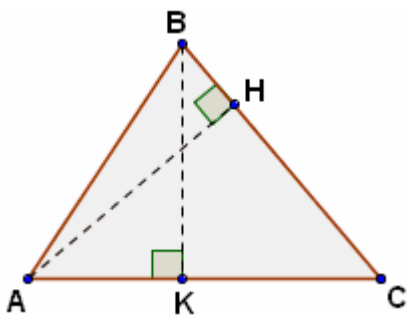
Quanto misurano i segmenti indicati col punto interrogativo?



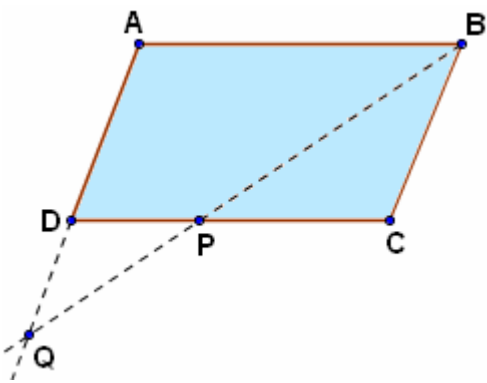
- 6) Sapendo che $CA = 10$ e $CB = 16$, è possibile dedurre che EDC è simile ad ABC, e determinare la misura di AB: perché?



- 7) AD, BC sono le diagonali di un trapezio e si tagliano in E.
 I due triangoli AEB, CED sono simili?
 E i due triangoli AEC e BED?
 Qual è il rapporto fra i perimetri dei triangoli AEB, CED?
 Qual è il rapporto tra le loro aree?
 Se CB misurasse 12 cm, quanto misurerebbero CE ed EB?



- 8) In un triangolo ABC,
 siano AH e BK
 due altezze.
 Dimostra che
 $AC \cdot CK = BC \cdot CH$



- 9) Dal vertice B di un parallelogrammo ABCD
 si traccia una semiretta BP,
 essendo P un punto sul lato DC;
 questa semiretta va a intersecare
 la retta AD in Q.
 I due triangoli BPC e ABQ sono simili:
 perché?
 Se $AB = 10$, $AD = 6$ e $DP = 4,2$
 quanto misurerà DQ?

**Problemi
 vari
 sulle
 similitudini
 sono proposti
 a partire
 da pagina
 258**

RISPOSTE

- 1) Il 1° Criterio di Similitudine; $WT : AC = WQ : BC \rightarrow WT : 4 = 9 : 6$ oppure $WT : WQ = AC : BC \rightarrow \dots$
 $WT = 6$ e $QT = 10,5$; rapporto di similitudine $3/2$ ($2/3$ se i triangoli venissero pensati in ordine inverso)
- 2) Il 3° Criterio; $2/3$ 3) Il 2° Criterio; $5/4 = 1,25$; $13,75$
- 4) Sì, il parallelismo è certo. Uno dei modi di giustificare l'affermazione è il seguente:
 i due triangoli PNQ, PLS sono simili per il 2° Criterio (con rapporto di similitudine $2,8$);
 ma allora, ad esempio, si ha $\widehat{PNQ} = \widehat{PLS}$; ed essendo questi due angoli in posizione di corrispondenti
 rispetto alle due rette NQ ed LS tagliate dalla trasversale LP, tali due rette sono fra loro parallele.
- 5) 120 ; il 1° Crit.; $1/4$; il 1° Crit.; $1/3$; $BC = 18$; $JC = 30$; $DE = 32$; $EK = 40$; $IE = 32$; $CD = 66$
- 6) Poiché $5:10 = 8:16$, i due lati che formano l'angolo $\widehat{C}$ sono proporzionali
 e si può invocare il 2° Criterio di Similitudine. AB misurerà 15 .
- 7) AEB e CED sono simili per il 1° Criterio (due angoli alterni interni di rette parallele con trasversale
 sono uguali); invece AEC e BED, in generale, *non* sono simili.
 Il rapporto fra i perimetri dei triangoli AEB e CED è $5/8$ e il rapporto tra le loro aree è $25/64$.
 CE misurerebbe cm $12 \cdot 8/13 = 96/13$ ed EB misurerebbe cm $12 \cdot 5/13 = 60/13$.
- 8) I due triangoli ACH e BCK sono simili per il 1° Criterio, e dalla proporzione $AC : BC = CH : CK$
 segue la tesi (in una proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi).
- 9) 1° Criterio: $\widehat{CBP} = \widehat{AQB}$ perché alterni interni rispetto a due parallele con trasversale,
 $\widehat{CPB} = \widehat{ABQ}$ per la stessa ragione; oppure, $\widehat{C} = \widehat{A}$ perché angoli opposti in un parallelogrammo.
 Anche: per ovvie ragioni BPC è simile con QPD che a sua volta è simile con ABQ, quindi ...
 DQ misurerà $4,345$ circa (similitudine fra QPD e BPC)

9.3 - APPLICAZIONI DELLE SIMILITUDINI

TEOREMA DELLA BISETTRICE

La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati

IPOTESI
 $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$

TESI
 $BD : DC = AB : AC$

Dimostrazione

Da C tracciamo la parallela alla bisettrice AD, e sia E il punto di intersezione fra tale parallela e la retta del lato AB. Osserviamo che il triangolo ACE è isoscele ($AE = AC$). Infatti, gli angoli $\widehat{ACE}$, $\widehat{AEC}$ sono uguali perché:

$$\widehat{ACE} = \widehat{DAC} \quad (\text{alterni interni, } AD \parallel CE, \text{ trasv. AC})$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} \quad (\text{ipotesi})$$

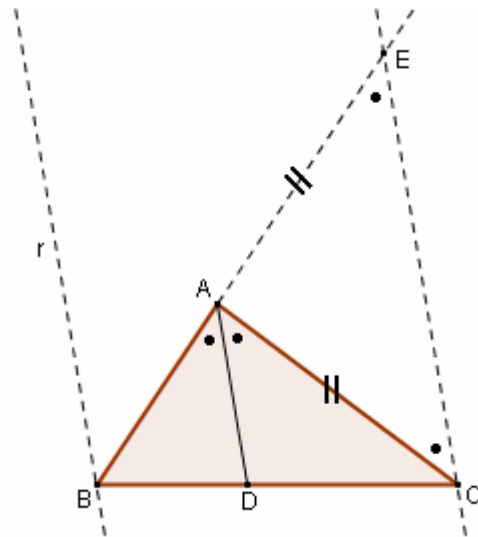
$$\widehat{DAB} = \widehat{AEC} \quad (\text{corrispondenti, } AD \parallel CE, \text{ trasv. BE})$$

Ora, per B tracciamo una terza parallela ad AD e CE. Per il Teorema di Talete avremo:

$$BD : DC = AB : AE$$

e quindi, essendo $AE = AC$,

$$BD : DC = AB : AC, \quad \text{c.v.d.}$$



TEOREMA DELLE DUE CORDE

Se due corde di una circonferenza si tagliano, le due parti dell'una formano i medi e le due parti dell'altra gli estremi di una proporzione

IPOTESI

Le due corde AB, CD si tagliano in P

TESI

$$PA : PC = PD : PB$$

(o qualunque altra proporzione che abbia PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa)

Dimostrazione

Tracciamo AD e BC.

I due triangoli APD, CPB sono simili perché:

$$\widehat{APD} = \widehat{CPB} \quad (\text{opposti al vertice})$$

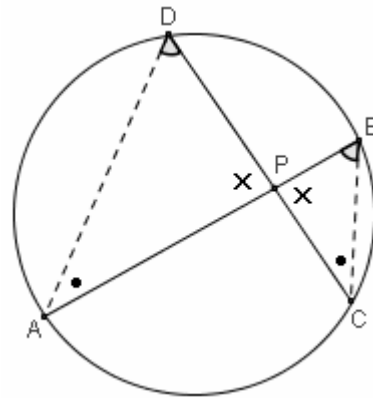
$$\widehat{DAB} = \widehat{DCB} \quad (\text{sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco } \widehat{BD})$$

$$\widehat{ADC} = \widehat{ABC} \quad (\text{per diff. rispetto a } 180^\circ, \text{ oppure perchè angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco } \widehat{AC})$$

Sussiste dunque la proporzione

$$PA : PC = PD : PB,$$

dalla quale, applicando la proprietà del permutare ai medi e agli estremi, e la proprietà dell'invertire, si possono ricavare tutte quelle proporzioni, caratterizzate dal fatto di avere PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa.



**ENUNCIATO
EQUIVALENTE:**

"Se due corde di una circonferenza si tagliano, il prodotto delle due parti dell'una è uguale al prodotto delle due parti dell'altra ($PA \cdot PB = PC \cdot PD$)"

TEOREMA DELLE DUE SECANTI

Condotta da un punto esterno ad una circonferenza due secanti, un'intera secante (NOTA) e la sua parte esterna formano i medi e l'altra intera secante e la sua parte esterna gli estremi di una proporzione

NOTA: per "secante" si intende qui quel "pezzo" della retta secante, compreso fra il punto esterno e l'intersezione con la circonferenza, più lontano da questo.

IPOSTESI PA, PC secanti

TESI $PA : PC = PD : PB$ (o qualunque altra proporzione che abbia PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa)

Dimostrazione

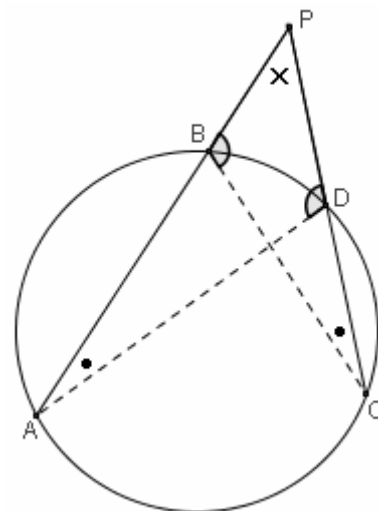
Tracciamo AD e BC. I due triangoli APD, CPB sono simili per avere:

$\hat{P}$ in comune

$\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ (angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco $\widehat{BD}$)

$\widehat{ADP} = \widehat{CBP}$ (per differenza rispetto a 180°)

Sussiste dunque la proporzione $PA : PC = PD : PB$, dalla quale, applicando la proprietà del permutare ai medi e agli estremi, e quella dell'invertire, si possono ricavare tutte quelle proporzioni, caratterizzate dal fatto di avere PA, PB come estremi e PC, PD come medi, o viceversa



ENUNCIATO EQUIVALENTE:

"Condotta da un punto esterno ad una circonferenza due secanti, il prodotto di un'intera secante per la sua parte esterna è uguale al prodotto dell'altra secante per la sua parte esterna ($PA \cdot PB = PC \cdot PD$)"

TEOREMA DELLA TANGENTE E DELLA SECANTE

Condotta da un punto esterno ad una circonferenza una tangente ed una secante, la tangente (NOTA) è media proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna

NOTA: per "tangente" si intende qui il segmento di tangente, compreso fra il punto esterno e punto di contatto.

IPOSTESI PA secante, PT tangente

TESI $PA : PT = PT : PB$

Dimostrazione

Tracciamo AT, BT. Dico che i due triangoli APT, BPT sono simili.

Essi infatti hanno, innanzitutto, l'angolo $\hat{P}$ in comune;

per dimostrare un'altra uguaglianza fra angoli

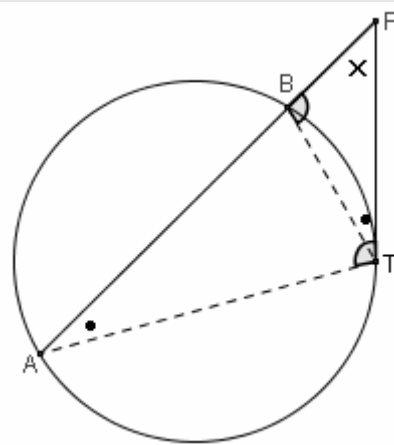
bisogna questa volta ricordare che esistono anche gli "angoli alla circonferenza di 2^a specie"

(quelli che hanno un lato secante e l'altro tangente).

$\widehat{BTP}$ è, appunto, un angolo alla circonferenza di 2^a specie, che insiste

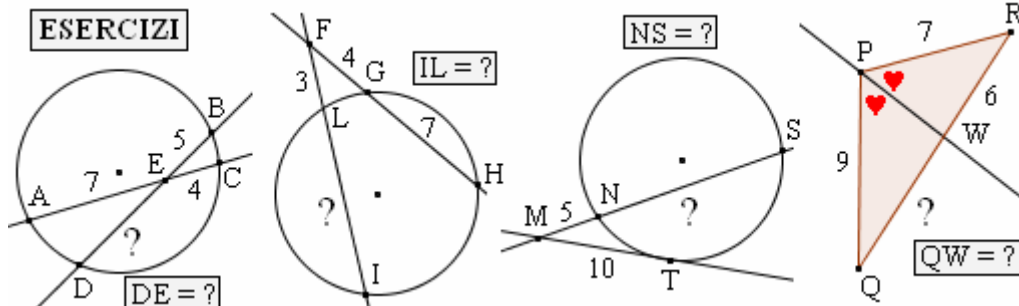
sull'arco $\widehat{BT}$, ed è perciò uguale a $\widehat{BAT}$, angolo alla circonferenza di 1^a specie che insiste sullo stesso arco.

Dimostrata così la similitudine fra APT e BPT, si ha subito la tesi: $PA : PT = PT : PB$, c.v.d.



ENUNCIATO EQUIVALENTE:

"Condotta da un punto esterno ad una circonferenza una tangente e una secante, il quadrato del segmento di tangente è uguale al prodotto dell'intera secante per la sua parte esterna ($PT^2 = PA \cdot PB$)"

ESERCIZI**RISPOSTE**

DE = 28/5; IL = 35/3;
NS = 15; QW = 54/7

Questa bella **figura dinamica GEOGEBRA** mostra bene il legame di "continuità" fra gli ultimi 3 teoremi →

Altri problemi sulle applicazioni delle similitudini si trovano a pagina 223, altri ancora a pagina 266

AIUTO AL RIPASSO, ESERCIZI sulle similitudini

1) RIEMPI I PUNTINI

1° Criterio di Similitudine:

.....

2° Criterio di Similitudine:

.....

3° Criterio di Similitudine:

.....

In due triangoli simili, le basi stanno fra loro come

In due triangoli simili, i perimetri stanno fra loro come

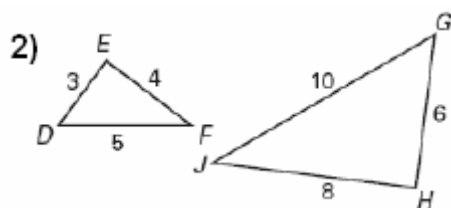
In due triangoli simili, le aree stanno fra loro come

Perché il perimetro di un triangolo triplichi, devo ingrandirlo “in scala” moltiplicando ciascun lato per ...
mentre se voglio che triplichi l’area, devo ingrandirlo “in scala” moltiplicando ciascun lato per ...

Affinché il volume di un cubo triplichi, dovrò moltiplicare il lato per il numero ...

Se due triangoli simili hanno le aree una 6400 volte l’altra, qual è il rapporto di similitudine? ...

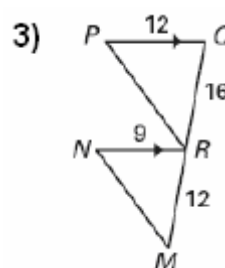
Dal sito www.getbookee.org



Quale teorema ci assicura che sono simili?

A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.

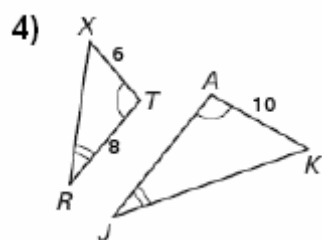
Qual è il fattore di scala? ...



Quale teorema ci assicura che sono simili?

A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.

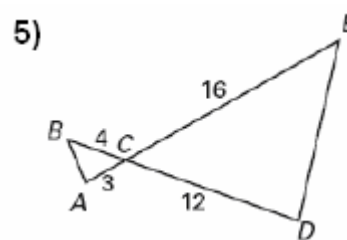
Qual è il fattore di scala? ...



Quale teorema ci assicura che sono simili?

A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.

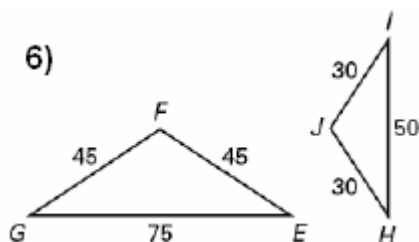
Qual è il fattore di scala? ...



Quale teorema ci assicura che sono simili?

A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.

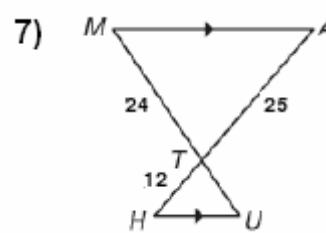
Qual è il fattore di scala? ...



Quale teorema ci assicura che sono simili?

A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.

Qual è il fattore di scala? ...

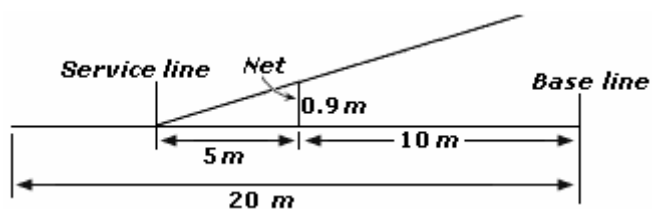


Quale teorema ci assicura che sono simili?

A) 1° Criterio di Simil. B) 2° Crit. C) 3° Crit.

Qual è il fattore di scala? ...

Dal sito <http://worksheets.tutorvista.com>



8) On a given tennis court, the distance between the base line and the net is 10 m and the distance between the service line and the net is 5 m. The net is 0.9 m high. A player serves the ball directly above the base line (assume the ball travels in a straight line). What is the minimum height that the ball can be hit at so as to ensure the ball lands in the service area?

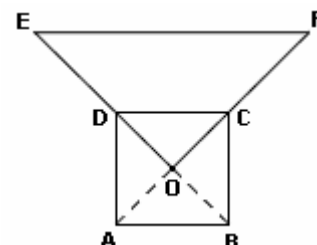
A) 1,65 m B) 2,7 m C) 5,9 m D) 1,8 m

9) The ratio of the corresponding sides of two similar triangles is 3:2. The ratio of their corresponding heights is

A) 3:2 B) 3:9
C) 2:3 D) 4:9

10) ABCD is a square $\rightarrow$ with each side 2 cm long. BD and AC are extended to E and F such that $EF \parallel DC$. $EF = 8$ cm. Find the area of CDEF.

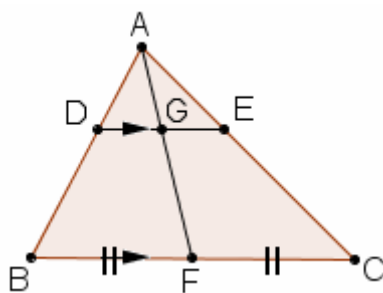
NOTA:
la figura non è in "scala"



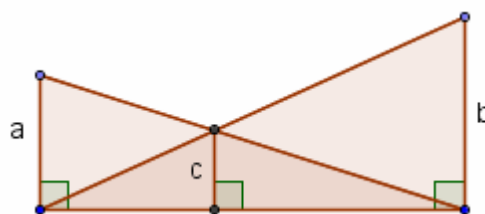
A) 12 cm² B) 14 cm²
C) 15 cm² D) 16 cm²

I seguenti due problemi sono tratti da www.cbseguess.com

11) Bello:
nella figura a destra,
DE è parallelo a BC
e F è il punto medio di BC.
Dimostra che $DG = GE$.



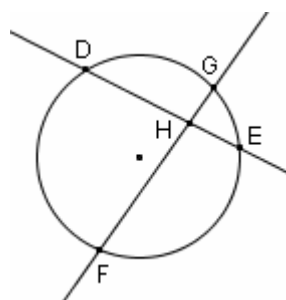
12) Molto bello: dimostra che, nella figura qui sotto, si ha $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$



Enuncia, a PAROLE e tramite FORMULE riferite alle figure, i teoremi seguenti, e risolvi i problemini:

13) Teorema delle due corde:

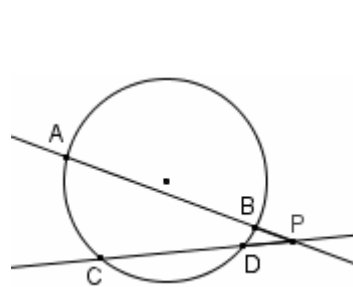
...



Se ad esempio
 $DE = 10$ ($DH > HE$),
 $FG = 11$,
 $HG = 3$,
quanto misura HE?

14) Teorema delle due secanti:

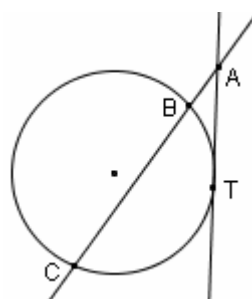
...



Se ad esempio fosse
 $CD = 8$,
 $PD = 4$,
 $PB = 3$,
quanto misurerebbe AB?

15) Teorema della tangente e secante:

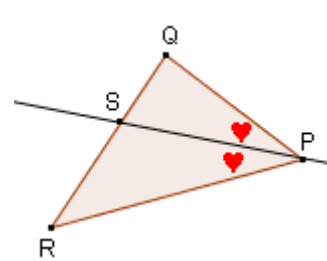
...



Ad esempio:
 $AB = 3$,
 $BC = 9$.
AT = ?

16) Teorema della bisettrice:

...



Ad esempio:
 $RQ = 7$,
 $RS = 4$,
 $PQ = 6,3$
PR = ?

RISPOSTE

1) Ultimi quattro quesiti, nell'ordine: 3; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{3}$; 80 (o 1/80) 2) C; 2 3) B; 3/4 4) A; 5/3 5) B; 4
6) C; 2/3 7) A; 12/25 8) B 9) A 10) C 11) $\rightarrow$ 12) $\rightarrow$ 13) 4 14) 13 15) 6 16) 8,4

Cap. 10: POLIGONI REGOLARI; COMPLEMENTI DI GEOMETRIA

10.1 - TRIANGOLI RETTANGOLI PARTICOLARI

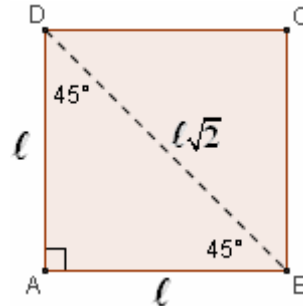
A) FORMULE RIGUARDANTI IL QUADRATO (e il triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 45°)

Consideriamo un quadrato ABCD.

Se conosciamo la misura del lato: $AB = BC = CD = DA = \ell$,
quanto misurerà la diagonale?

Applicando il Teorema di Pitagora otteniamo:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{diagonale}} = BD &= \sqrt{AB^2 + AD^2} = \\ &= \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{2\ell^2} = \boxed{\ell\sqrt{2}} \end{aligned}$$



Perciò:

in un QUADRATO,

$$\text{DIAGONALE} = \text{LATO} \cdot \sqrt{2}$$

e quindi

$$\text{LATO} = \frac{\text{DIAGONALE}}{\sqrt{2}}$$

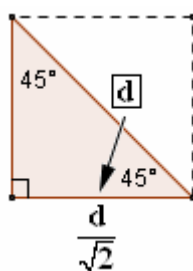
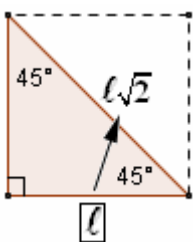
*Angoli acuti di 45° :
può intervenire $\sqrt{2} \approx 1,4$*

Conseguenza:

♥ **in un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 45°**
(che può essere visto come la metà di un quadrato)

- ❑ **L'IPOTENUSA E' UGUALE AL CATETO MOLTIPLICATO $\sqrt{2}$**
- ❑ **IL CATETO E' UGUALE ALL'IPOTENUSA DIVISO $\sqrt{2}$**

Ricordiamo che $\boxed{\sqrt{2} = 1,41421... \approx 1,4}$



Nella seconda figura

si suppone di partire dalla misura d dell'ipotenusa
(ipotenusa per il triangolo, diagonale per il quadrato).

Essendo $d = \ell\sqrt{2}$, invertendo si ha: $\ell = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

E' possibile, volendo, razionalizzare, ottenendo:

$$\ell = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

Ma ... razionalizzare è proprio "obbligatorio"?

No! E' però spesso conveniente,

♪ o per rendere più semplice l'espressione
(ad es., se è $d = 6$, si avrà

$$\ell = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2})$$

♪ oppure per rendere più semplici
eventuali calcoli successivi sul valore trovato.

B) FORMULE RIGUARDANTI IL TRIANGOLO EQUILATERO (e il triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°)

Consideriamo un triangolo equilatero ABC.

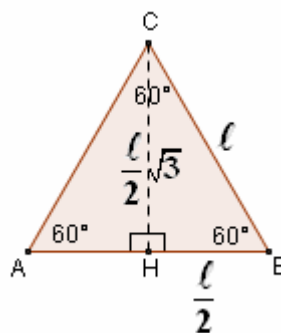
Se conosciamo la misura del lato:

$$AB = BC = CA = \ell,$$

quanto misurerà l'altezza CH?

Applicando il Teorema di Pitagora otteniamo:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{altezza}} = CH &= \sqrt{CB^2 - HB^2} = \\ &= \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\ell^2 - \ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \boxed{\frac{\ell}{2}\sqrt{3}} \end{aligned}$$



Perciò in un TRIANGOLO EQUILATERO,

$$\text{ALTEZZA} = \frac{\text{LATO}}{2}\sqrt{3}$$

Conseguenze:

*Angoli acuti di 30° e 60°:
può intervenire $\sqrt{3} \approx 1,7$*

♥ in un TRIANGOLO RETTANGOLO CON GLI ANGOLI ACUTI DI 30° e 60°
(che può essere visto come la metà di un triangolo equilatero)

❑ IL CATETO MINORE E' META' DELL'IPOTENUSA

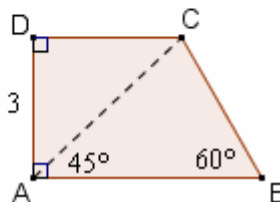
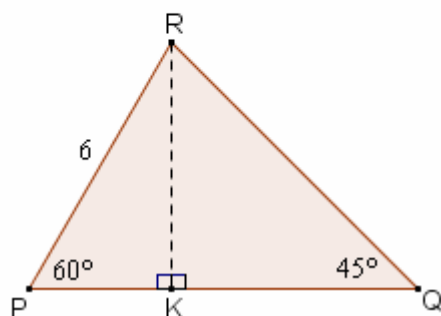
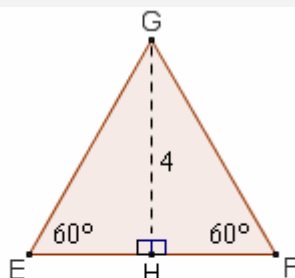
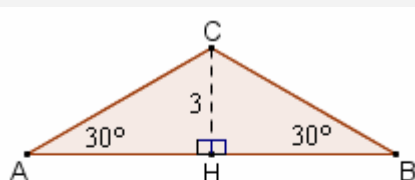
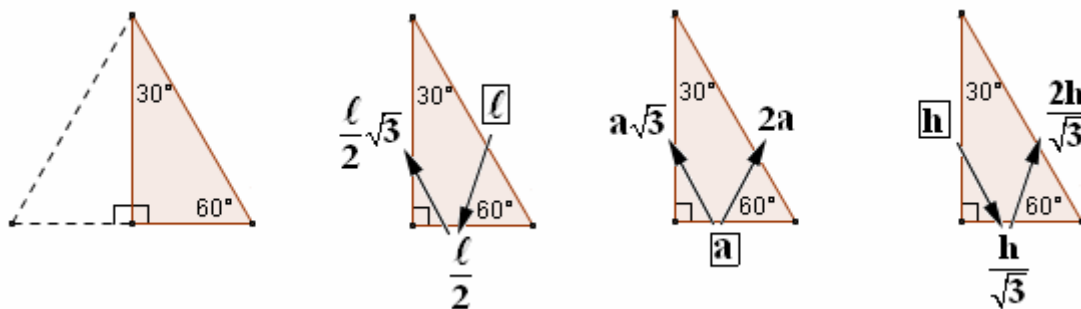
(e quindi l'ipotenusa è il doppio del cateto minore)

❑ IL CATETO MAGGIORE E' UGUALE AL CATETO MINORE MOLTIPLICATO $\sqrt{3}$

(e quindi: il cateto maggiore è uguale a metà ipotenusa moltiplicato $\sqrt{3}$
mentre il cateto minore è uguale al cateto maggiore diviso $\sqrt{3}$)

Ricordiamo che $\sqrt{3} = 1,73205... \approx 1,7$

Le figure seguenti riassumono le situazioni che si possono incontrare nei problemi:
dato un lato di un triangolo rettangolo "particolare" 90°-30°-60°,
determinare i lati rimanenti, utilizzando le formule apprese o eventualmente invertendole.



ESERCIZI

Con riferimento alle figure qui a fianco, calcola i perimetri dei tre triangoli e del trapezio, verificando che è:

$$2p(ABC) = 12 + 6\sqrt{3}$$

$$2p(PQR) = 9 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$$

$$2p(EFG) = 8\sqrt{3}$$

$$2p(ABCD) = 9 + 3\sqrt{3}$$

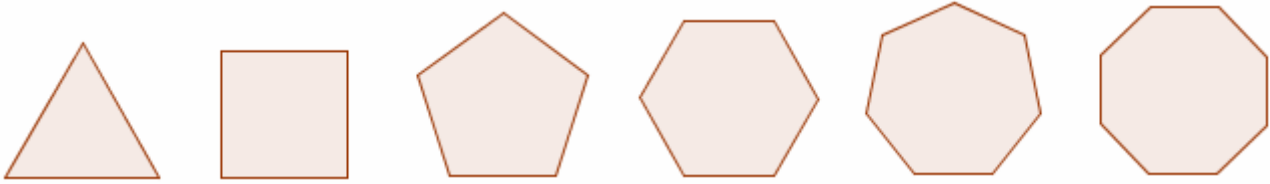
**Problemi vari con
triangoli rettangoli particolari
sono proposti alle pagine
252 e 253**

10.2 - POLIGONI REGOLARI

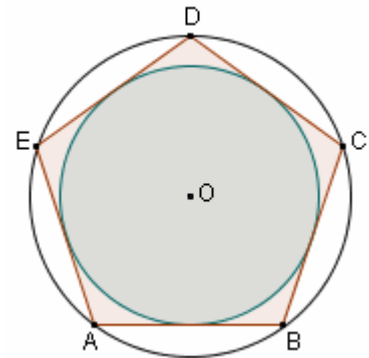
Si dice **REGOLARE** un poligono che abbia tutti i lati e tutti gli angoli uguali.

Sono poligoni regolari:

il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono regolare, l'esagono regolare, l'eptagono regolare, l'ottagono regolare, l'ennagono regolare, il decagono regolare, l'undecagono regolare, il dodecagono regolare, ecc.

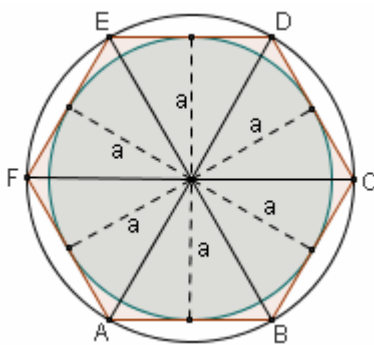
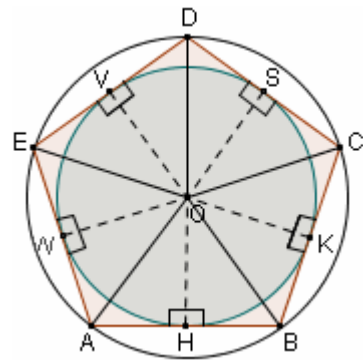


Si può dimostrare che **un poligono regolare è inscritto in una circonferenza, e circoscritto ad un'altra circonferenza;** e che **tali due circonferenze circoscritta e inscritta hanno lo stesso centro** (tale punto viene detto, semplicemente, "il centro del poligono regolare").



In un poligono regolare, congiungendo il centro con i vertici, si ottengono tanti triangoli quanti sono i lati del poligono. Essi sono tutti uguali fra loro (3° Criterio) e le loro altezze, condotte dal centro O, sono anch'esse tutte uguali fra loro. Una qualsiasi di tali altezze viene detta "**apotema**" del poligono regolare.

Possiamo dire, in definitiva, che in un poligono regolare l'"apotema" è la distanza del centro O da uno qualsiasi dei lati. L'apotema coincide col raggio della circonferenza inscritta.



Per calcolare l'**area** di un poligono regolare, si possono sommare le aree dei triangoli ottenibili congiungendo il centro coi vertici. Con riferimento alla figura qui a sinistra, abbiamo

$$S = \frac{AB \cdot a}{2} + \frac{BC \cdot a}{2} + \frac{CD \cdot a}{2} + \frac{DE \cdot a}{2} + \frac{EF \cdot a}{2} + \frac{FA \cdot a}{2} = \frac{(AB + BC + CD + DE + EF + FA) \cdot a}{2}$$

In definitiva, in un poligono regolare l'area è data dalla formula:

$$S = \frac{\text{perimetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

Per stabilire quanto misura uno degli **angoli** di un dato poligono regolare, basterà ricordare che la somma degli angoli di un poligono di n lati è $(n - 2) \cdot 180^\circ$ e tener presente che in un poligono regolare gli angoli sono tutti uguali tra loro, per ottenere

$$\alpha_n = \frac{n - 2}{n} \cdot 180^\circ$$

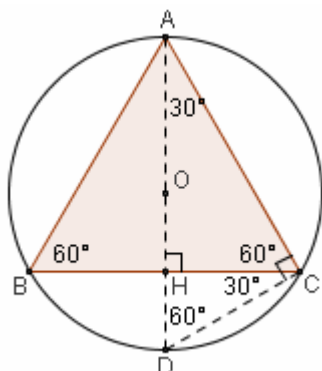
Avremo dunque, ad esempio: $\alpha_5 = 108^\circ$, $\alpha_6 = 120^\circ$, $\alpha_8 = 135^\circ$, $\alpha_{10} = 144^\circ$, ecc.

MISURA DEL LATO DI UN POLIGONO REGOLARE, IN FUNZIONE DEL RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO

Proponiamoci ora di determinare quanto misuri il lato di un poligono regolare
rispettivamente di 3, 4, 5, 6, 8, 10 lati (sono questi i casi più rilevanti),
che sia inscritto in un cerchio di raggio noto R

(“misura ℓ_n del lato di un poligono regolare di n lati,
espressa in funzione del raggio R del cerchio circoscritto”).

TRIANGOLO EQUILATERO



Tracciamo il diametro AD ; avremo:

$$AD = 2R;$$

$\widehat{ACD} = 90^\circ$ (perchè inscritto in una semicirconferenza);

$\widehat{ADC} = 60^\circ$ (perchè $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ in quanto angoli alla circonferenza
che insistono sullo stesso arco $\widehat{AC}$; e $\widehat{ABC} = 60^\circ$)

Quindi, considerando il triangolo rettangolo “particolare” ACD , si avrà

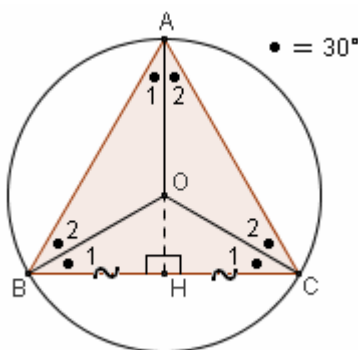
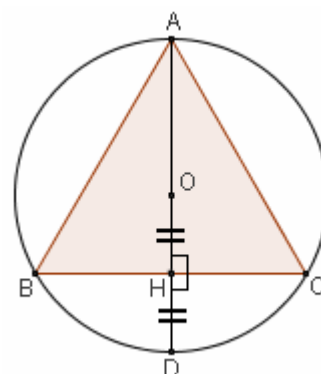
$$AC = \frac{AD}{2} \sqrt{3} = \frac{2R}{2} \sqrt{3} = R\sqrt{3}$$

Resta così stabilito che

$$\ell_3 = R\sqrt{3}$$

*Fra l'altro, osservando la figura sovrastante,
è immediato dimostrare che $OH = HD = R/2$,
e ciò suggerisce un metodo comodissimo
per disegnare con precisione
un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza
(vedi figura qui a destra):
si traccia un diametro qualunque AD ,
si prende il punto medio H del raggio OD
e per H si traccia la perpendicolare ad AD
fino ad incontrare la circonferenza in due certi punti B e C .*

Questi, insieme con A , saranno i vertici di un triangolo equilatero.



Allo stesso importante risultato di cui sopra ($\ell_3 = R\sqrt{3}$)

si sarebbe potuto anche pervenire nel modo seguente.

Congiungiamo O con A , B e C ;

avremo $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC$ per il 3° Criterio.

Essendo poi tali triangoli, oltre che uguali, anche isosceli, si avrà

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Tracciamo ora $OH \perp BC$: avremo $BH = HC = \frac{1}{2}BC$,

perché la perpendicolare a una corda condotta dal centro
taglia la corda stessa in due parti uguali;

ed essendo BOH un triangolo rettangolo “particolare”, risulterà

$$BH = \frac{BO}{2} \sqrt{3} = \frac{R}{2} \sqrt{3} \quad \text{da cui} \quad \ell_3 = BC = 2BH = R\sqrt{3}$$

QUADRATO

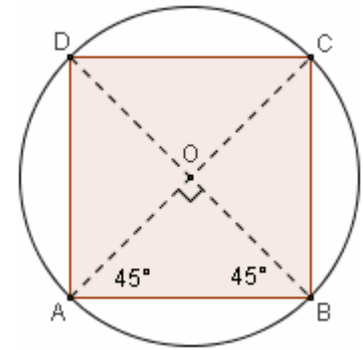
E' chiaro che il punto O di intersezione delle diagonali di un quadrato inscritto in un cerchio coincide col centro del cerchio stesso (basta ricordare che in un quadrato le diagonali sono uguali e si tagliano scambievolmente per metà, per concludere che $OA = OB = OC = OD$ e dedurre quindi che O, essendo equidistante dai punti A, B, C e D, è il centro del cerchio circoscritto al quadrato ABCD). Ricordando poi che in un quadrato le diagonali sono perpendicolari e bisettrici degli angoli, e considerando il triangolo rettangolo particolare AOB, avremo:

$$AB = OA \cdot \sqrt{2}$$

cioè

$$\ell_4 = R\sqrt{2}$$

Se si vuole disegnare perfettamente un quadrato inscritto, basta disegnare due diametri perpendicolari: le loro estremità saranno i quattro vertici del quadrato.

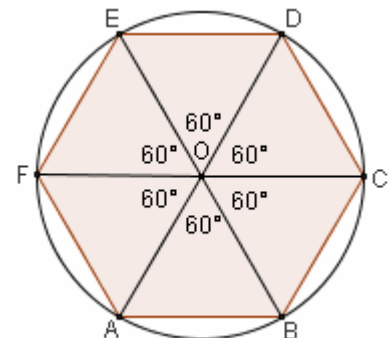


PENTAGONO REGOLARE: ne ripareremo dopo aver trattato il decagono regolare.

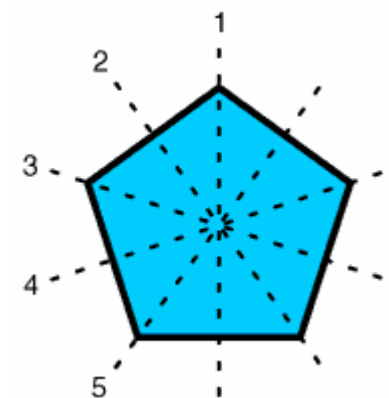
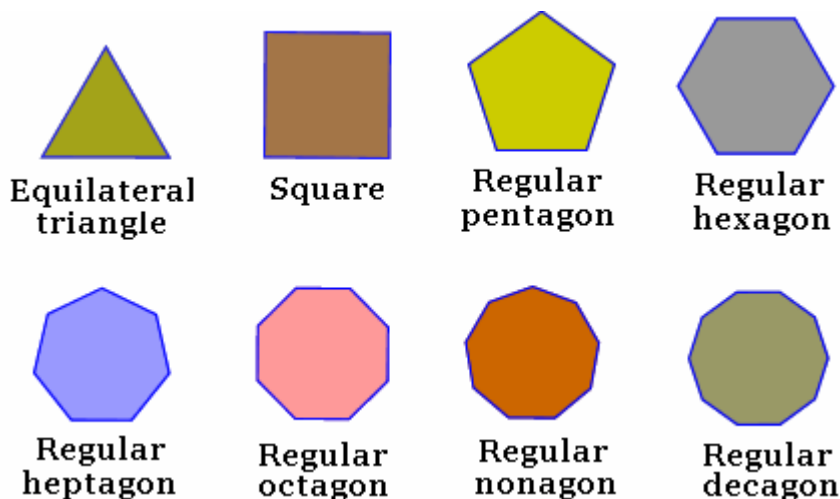
ESAGONO REGOLARE

I 6 angoli di vertice O nella figura sono tutti uguali fra loro (perché i 6 triangoli sono tutti uguali fra loro per il 3° Criterio; oppure, perché sono angoli al centro che insistono su corde uguali e quindi su archi uguali). Allora ciascuno di questi 6 angoli misurerà $360^\circ : 6 = 60^\circ$; perciò ciascuno dei 6 triangoli, essendo isoscele e avendo un angolo di 60° , sarà equilatero. Pertanto è $AB = OA = OB = R$; quindi,

$$\ell_6 = R$$



“Il lato dell’esagono regolare inscritto in una circonferenza, è uguale al raggio della circonferenza stessa”



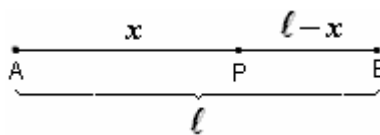
Five lines of symmetry of a regular pentagon
(<http://library.thinkquest.org>)

SEZIONE AUREA

Definizione. Si dice “sezione aurea” di un segmento, quella parte del segmento che è media proporzionale fra l'intero segmento e la parte rimanente

Preso un segmento AB di lunghezza ℓ ,
e detta AP la sua sezione aurea, avremo:
 $AB : AP = AP : PB$

Posto ora $AP = x$, sarà $PB = \ell - x$ da cui:



$$\ell : x = x : (\ell - x)$$

$$x^2 = \ell(\ell - x)$$

$$x^2 = \ell^2 - \ell x$$

$$x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$$

e risolvendo:

$$x_{1,2} = \frac{-\ell \pm \sqrt{\ell^2 + 4\ell^2}}{2} = \frac{-\ell \pm \sqrt{5\ell^2}}{2} = \frac{-\ell \pm \ell\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ell & \text{non accettabile perchè negativa} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ell \end{cases}$$

Dunque la sezione aurea di un segmento di lunghezza ℓ misura

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ell$$

Essendo $\sqrt{5} \approx 2,236$, si ha che la sezione aurea di un segmento è lunga circa 0,618 volte il segmento stesso.

TEOREMA

Il lato del DECAGONO REGOLARE inscritto in una circonferenza è uguale alla sezione aurea del raggio

Delle due figure qui a fianco, la prima mostra un decagono regolare inscritto; quella sottostante evidenzia uno solo dei dieci triangolini isosceli uguali in cui il decagono regolare è suddiviso dai raggi che ne congiungono i vertici col centro.

Vogliamo dimostrare che AB è uguale alla sezione aurea del raggio OB.

Cominciamo col domandarci: quanto misura l'angolo $\widehat{AOB}$?

Ovviamente, la risposta è $360^\circ : 10 = 36^\circ$.

E perciò avremo $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$.

Tracciando, ora, la bisettrice AW dell'angolo $\widehat{OAB} = 72^\circ$, risulterà $\widehat{WAO} = \widehat{WAB} = 72^\circ : 2 = 36^\circ$, e nel triangolo ABW si avrà $\widehat{BWA} = 180^\circ - \widehat{WBA} - \widehat{WAB} = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$.

Le misure angolari così ricavate garantiscono che:

- AWO è isoscele ($AW = OW$);
- ABW è isoscele ($AB = AW = OW$) e simile a BOA.

Da questa similitudine si trae la proporzione

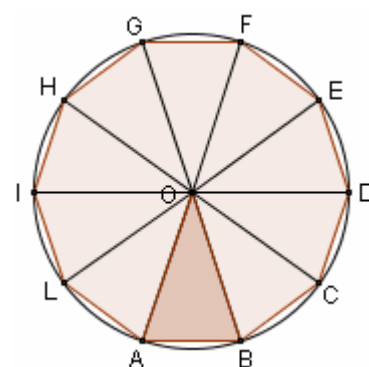
$$OB : AB = AB : BW,$$

la quale, essendo $AB = OW$, può essere riscritta come

$$OB : OW = OW : BW.$$

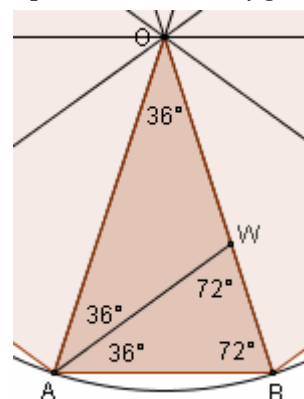
Ma ciò prova che OW è la sezione aurea di OB;

ed essendo, appunto, $AB = OW$, il teorema è dimostrato.



Sopra: un decagono regolare inscritto.

Sotto: un particolare della figura.



E' pertanto

$$\ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$$

SEZIONE AUREA: REALTÀ E LEGGENDA

Il numero da noi trovato $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803398\dots$

esprime il rapporto fra la sezione aurea x di un dato segmento, e il segmento stesso:

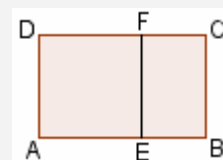
$$\frac{\text{sezione aurea}}{\text{intero segmento}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803398\dots$$

Il *reciproco* di tale numero esprimerà allora il rapporto fra l'intero segmento e la sua sezione aurea. Si usa indicare col simbolo Φ (lettera greca "fi" maiuscola) quest'ultimo numero, e denominarlo "**numero aureo**". Calcoliamolo:

$$\boxed{\Phi} = \frac{\text{intero segmento}}{\text{sezione aurea}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = 1,61803398\dots$$

La sezione aurea e il "numero aureo" godono di diverse - belle e armoniose - proprietà, fra cui le seguenti.

- Il "numero aureo" Φ e il suo inverso (= quello che esprime la "sezione aurea" di un segmento unitario) hanno le stesse cifre dopo la virgola. Ed è facilissimo spiegare il perché, vero?
- Vale l'uguaglianza $\Phi^2 = \Phi + 1$ (puoi provarlo col calcolo diretto: è un semplice esercizio coi radicali)
- Se dividiamo un segmento nella sua sezione aurea e nella "parte rimanente", questa "parte rimanente" è a sua volta uguale ... alla sezione aurea della sezione aurea! Dimostralo, ponendo per semplicità la lunghezza dell'intero segmento uguale a 1. Quindi (figura qui a fianco) se ABCD è un "rettangolo aureo" ($AD = \text{sez. aurea di } AB$) e AEFD è un quadrato, allora anche EBCF è un rettangolo aureo!



Una proprietà interessantissima del "numero aureo" è quella che andiamo ad esporre qui di seguito, ossia la **relazione fra il "numero aureo" e la "successione di Fibonacci"**.

Si dice "successione di Fibonacci" quella sequenza di interi che inizia con la coppia di numeri 0 1 e prosegue poi in modo che ciascun termine sia costruito facendo la somma dei due che lo precedono, quindi:

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 ...

Abbiamo dunque, detto f_n il generico termine di questa successione, che dal terzo termine in poi è

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Bene: **si può dimostrare che, nella successione di Fibonacci, il rapporto $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ fra**

un termine e quello che lo precede "tende", "si avvicina" (al tendere di n a infinito), al numero aureo!

n	f_n	$\frac{f_n}{f_{n-1}}$
0	0	
1	1	
2	1	1
3	2	2
4	3	1,5
5	5	1,666666667
6	8	1,6
7	13	1,625
8	21	1,615384615
9	34	1,619047619
10	55	1,617647059
11	89	1,618181818
12	144	1,617977528
13	233	1,618055556
14	377	1,618025751
15	610	1,618037135
16	987	1,618032787
...	...	...

La successione di Fibonacci compare con una certa frequenza in fenomeni naturali. L'esempio forse più significativo è quello dei **girasoli**, e delle **pigne**.

Osservando un girasole o una pigna, possiamo distinguere

- ♪ un certo numero di spirali che girano in senso orario,
- ♪ e un certo altro numero di spirali che girano in senso antiorario ...

Bene, tali due numeri sono sempre due numeri di Fibonacci consecutivi!

Nel girasole, possiamo avere

- 21 spirali che girano in senso orario e 34 che girano in senso antiorario,
- o rispettivamente 34 e 55 spirali,
- o più raramente 55 e 89, oppure 89 e 144.
- Si è anche registrato il caso di un girasole che portava rispettivamente 144 e 233 spirali.



La questione è stata studiata con cura dai ricercatori, che hanno compreso come i numeri consecutivi di Fibonacci abbiano a che fare con la massimizzazione del numero di semi presenti sulla superficie del fiore o della pigna.

In altre situazioni in cui i numeri di Fibonacci o il numero aureo compaiono in natura (ad esempio, la spirale della conchiglia Nautilus, oppure la disposizione delle foglie intorno al fusto in una pianta), questa comparsa è analogamente legata al raggiungimento della massima efficienza nell'accrescimento di un organismo, o ad altre questioni non semplici ma pur sempre spiegabili.

A partire da **Luca Pacioli**, autore del trattato *De Divina Proportione* illustrato dal contemporaneo Leonardo da Vinci, è nato un convincimento diffuso che la mente umana coglierebbe un senso di particolare armonia nel contemplare la sezione aurea e i rettangoli le cui due dimensioni abbiano rapporto uguale al "numero aureo", e soprattutto è nata la diceria - non suffragata da prove - secondo cui tale numero sarebbe stato utilizzato ripetutamente fin dall'antichità in modo intenzionale nell'architettura e nell'arte. Ad esempio, è frequente sentir affermare che la facciata del Partenone, il tempio ateniese che può essere considerato uno dei simboli dell'architettura greca antica, rivelerebbe uno sforzo, da parte del progettista, di far sì che i rapporti fra le lunghezze di vari elementi siano prossimi al "numero aureo"; si dice spesso che certe piramidi egizie sarebbero state realizzate in modo da far entrare consapevolmente il "numero aureo" nei loro rapporti dimensionali, ecc.

Tuttavia, queste affermazioni **non sono sufficientemente provate**, sia perché simili lunghezze e relativi quozienti non possono essere fissati in modo univoco (da dove partiamo, esattamente, per misurare? dove arriviamo? Sovente si ha una certa discrezionalità in questo) sia perché, nel fare tante misure su tante costruzioni, è del tutto prevedibile che almeno in qualche caso si giunga a calcolare un rapporto fra lunghezze prossimo a 1,6; ma sarebbe arbitrario voler vedere a tutti i costi, in casi siffatti e senza una prova certa, una volontà deliberata di giungere al "numero aureo" da parte del progettista.

Tanto più che probabilmente è vero che la mente umana coglie per istinto una maggiore piacevolezza in quei rapporti fra lunghezze che sono compresi all'incirca nell'intervallo fra 1,5 e 1,8; ed è questo il motivo per cui, realisticamente, rettangoli troppo "bislunghi" o "tozzi" tendono ad essere meno sfruttati da architetti ed artisti.

La "sezione aurea" e il "numero aureo" sono stati oggetto di grande interesse anche da parte di scrittori opportunisti, o di pseudo-ricercatori superficiali, i quali hanno cercato a tutti i costi di scovare il "numero aureo" un po' dappertutto nell'Arte e nella Natura - anche dove in realtà non interviene, ma intervengono solo, fortuitamente, valori ad esso più o meno vicini.

Questi mediocri hanno cercato di presentare il numero aureo quasi fosse la "firma" di qualche misterioso spiritello, e di inventare di sana pianta l'intervento di sette esoteriche in tutte quelle realizzazioni dell'ingegno umano che con esso potevano (mah ...) sembrare coinvolte.

In realtà, **il ruolo effettivo della sezione aurea nell'architettura e nella pittura è molto più limitato di quanto si vorrebbe far credere ... e per quanto riguarda i fenomeni naturali**, se la sezione aurea è un marchio di armonia e di bellezza che sovente si ripete nella realtà che ci circonda, come abbiamo accennato ciò è legato a **motivazioni ben precise e per nulla "misteriose"**, anche se ardue da descrivere a chi non ha una conoscenza approfondita delle Scienze e della Matematica.

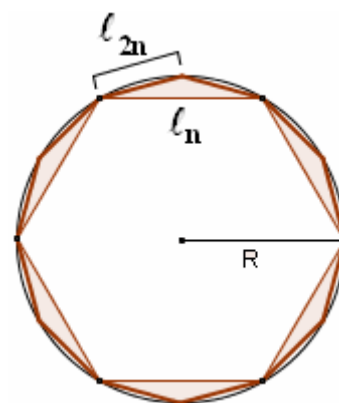
- | | | |
|------------------|--|---|
| L
I
N
K | S
E
L
E
C
T
I
O
N
A
T
I | ❑ Di Keith Devlin, docente alla Stanford University: Good stories, pity they're not true ➡ |
| | | ❑ Di Alessandro Zocchi, psicobiologo e psicofarmacologo:
Gli esperimenti psicologici per verificare la bellezza del rapporto aureo ➡ |
| | | ❑ Da www.maths.surrey.ac.uk : |
| | | ♪ The Fibonacci numbers and the golden section in Nature ➡
♪ The Fibonacci numbers and the golden section in Art, Architecture and Music ➡
("All the other pages are factual and verifiable - the material here is a often a matter of opinion.
What do YOU think?") |

L'immagine del girasole è tratta dal sito <http://britton.disted.camosun.bc.ca/home.htm> di Jill Britton, che ringrazio.

LA FORMULA $\ell_n \rightarrow \ell_{2n}$

Risolviamo infine il seguente problema (**formula $\ell_n \rightarrow \ell_{2n}$**):

**nota la misura ℓ_n
del lato di un poligono regolare di n lati,
inscritto in un cerchio di raggio R ,
determinare la misura ℓ_{2n}
del lato del poligono regolare inscritto,
avente un numero di lati doppio.**



Sia $AB = \ell_n$ (vedi figura qui a fianco).

Il diametro PQ perpendicolare ad AB
divide in metà tanto la corda quanto l'arco di estremi A e B ;
si avrà pertanto $AP = \ell_{2n}$.

Applicando Pitagora al triangolo rettangolo AHO , si trae

$$OH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\ell_n\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\ell_n^2} = \sqrt{\frac{4R^2 - \ell_n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

da cui

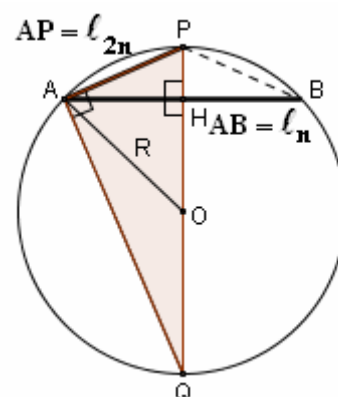
$$PH = R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

Applichiamo ora il Primo Teorema di Euclide
al triangolo PAQ , che è rettangolo in A
perché inscritto in una semicirconferenza:

$$\ell_{2n}^2 = AP^2 = PQ \cdot PH = 2R \left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2} \right) = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

da cui la formula cercata:

$$\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}} \quad \text{FORMULA } \ell_n \rightarrow \ell_{2n}$$



ESERCIZIO AL COMPUTER

Con un foglio elettronico
calcola, a partire da $\ell_6 = 1$
(supponendo $R = 1$:
come sappiamo, il lato
dell'esagono regolare
è uguale al raggio),
i valori di ℓ_{12} , ℓ_{24} , ℓ_{48} , ...

APPLICAZIONI DELLA FORMULA

♪ Per esempio, siccome sappiamo che $\ell_4 = R\sqrt{2}$, avremo:

$$\begin{aligned} \ell_8 &= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_4^2}} = \\ &= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - 2R^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{2R^2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\ell_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad (\text{lato dell'OTTAGONO REGOLARE inscritto in un cerchio di raggio } R)$$

♪ Per determinare poi ℓ_5 , potremo partire dalla formula $\ell_{10} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_5^2}}$,
risolvendola rispetto a ℓ_5 e poi sostituendo al posto di ℓ_{10} il valore noto $\ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

Prova a fare i calcoli: otterrai alla fine

$$\ell_5 = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}R \quad (\text{lato del PENTAGONO REGOLARE inscritto in un cerchio di raggio } R)$$

10.3

UNA RELAZIONE INTERESSANTE FRA CATETI, IPOTENUSA E ALTEZZA RELATIVA ALL'IPOTENUSA, IN UN TRIANGOLO RETTANGOLO

In un triangolo rettangolo (ABC nella figura), per calcolare l'area S, possiamo utilizzare indifferentemente l'una o l'altra delle due formule

$$S = \frac{AB \cdot CH}{2}; \quad S = \frac{CA \cdot CB}{2}$$

Vale quindi l'uguaglianza

$$\frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{CA \cdot CB}{2}$$

da cui si trae

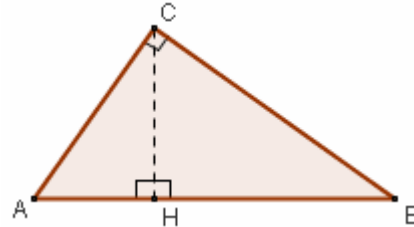
$$AB \cdot CH = CA \cdot CB$$

e infine

$$CH = \frac{CA \cdot CB}{AB}$$

ovvero

altezza relativa all'ipotenusa = $\frac{\text{cateto} \cdot \text{altro cateto}}{\text{ipotenusa}}$



Ad esempio, nel triangolo rettangolo i cui lati misurano 3, 4 e 5 cm, l'altezza relativa all'ipotenusa misura

$$\text{cm } \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$$

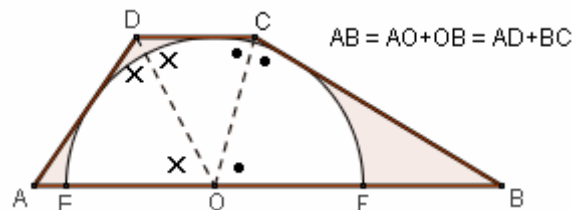
10.4 - IL TRAPEZIO CIRCOSCRITTO AD UNA SEMICIRCONFERENZA

La figura qui a fianco mostra un trapezio circoscritto ad una semicirconferenza, ossia un trapezio con:

- la base maggiore giacente sulla retta del diametro;
- i lati obliqui e la base minore tangenti alla semicirconferenza.

Si può provare che

**in un trapezio circoscritto ad una semicirconferenza,
la base maggiore è uguale alla somma dei due lati obliqui**



Congiungiamo infatti il centro O con le estremità C e D della base minore. Vediamo che

- $\widehat{AOD} = \widehat{CDO}$ perché alterni interni rispetto a due parallele con trasversale;
- $\widehat{CDO} = \widehat{ADO}$ perché è noto che, quando da un punto esterno a una circonferenza (D) si tracciano le due tangenti (DA, DC), la congiungente il punto esterno col centro è bisettrice dell'angolo che queste formano ($\widehat{ADC}$).

Quindi è $\widehat{AOD} = \widehat{ADO}$ per cui il triangolo AOD è isoscele: $AO = AD$.

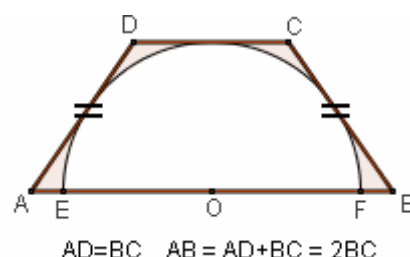
Analogamente si dimostra che è isoscele il triangolo BOC: $OB = BC$.

Dalle due uguaglianze di cui sopra segue

$$AB = AO + OB = AD + BC, \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO

**In un trapezio ISOSCELE
circoscritto ad una semicirconferenza,
la base maggiore è il doppio del lato obliquo,
e quindi il lato obliquo è la metà della base maggiore**



10.5 - LA FORMULA DI ERONE

Questa celebre formula **esprime l'area di un triangolo, in funzione delle misure dei suoi lati**.

Sia ABC un triangolo qualunque.
Adottando una simbologia molto efficace, e molto utilizzata, indichiamo con:

- a la misura del lato opposto al vertice A,
- b la misura del lato opposto al vertice B,
- c la misura del lato opposto al vertice C.

Il nostro obiettivo è di esprimere l'area S del triangolo in funzione delle tre misure a, b, c.

A tale scopo, proponiamoci innanzitutto di determinare la misura dell'altezza CH relativa alla base AB.

Posto AH = x, avremo:

$CH^2 = b^2 - x^2$ (Pitagora su AHC),
ma anche:

$CH^2 = a^2 - (c - x)^2$ (Pit. su BHC).

Sarà dunque, per la proprietà transitiva,

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$

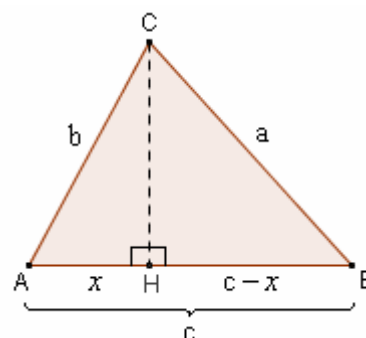
e da questa equazione potremo ricavare x:

$$b^2 - \cancel{x^2} = a^2 - c^2 + 2cx - \cancel{x^2}$$

$$2cx = b^2 - a^2 + c^2$$

$$x = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$$

Ora che abbiamo determinato AH = x, andiamo a calcolare CH applicando Pitagora al triangolo rettangolo AHC (vedi colonna qui a fianco) →



$$CH = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{(b^2 - a^2 + c^2)^2}{4c^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4b^2c^2 - (b^2 - a^2 + c^2)^2}{4c^2}} = \frac{1}{2c} \sqrt{4b^2c^2 - (b^2 - a^2 + c^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{(2bc + (b^2 - a^2 + c^2))(2bc - (b^2 - a^2 + c^2))} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{(2bc + b^2 - a^2 + c^2)(2bc - b^2 + a^2 - c^2)} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)} =$$

Ponendo a questo punto $a+b+c = \text{perimetro} = 2p$ potremo scrivere

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)} = \frac{1}{2c} \sqrt{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)} =$$

$$= \frac{1}{2c} \sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c} \cdot 4 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

E' quindi

$$S = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Abbiamo così costruito la bella

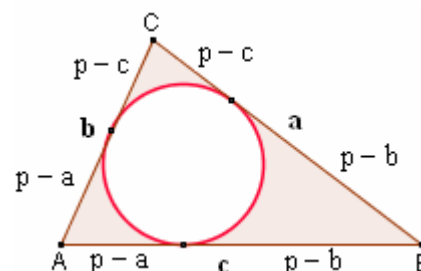
FORMULA DI ERONE (area di un triangolo in funzione dei lati):
 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ a, b, c misure dei lati; p SEMIperimetro

Ad **ESEMPIO**,
l'area di un triangolo
di lati 7, 8 e 9 cm,
e quindi
di semiperimetro
(7+8+9)/2=12 cm,
misura cm²

$$\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}.$$

$$\text{ovvero} \\ \text{cm}^2 \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}.$$

A PROPOSITO
Detti A, B, C i vertici di un triangolo,
a, b, c i lati rispettivamente opposti,
e indicato con p il SEMIperimetro
del triangolo,
le distanze dei punti di contatto
della circonferenza inscritta
dai tre vertici A, B, C
valgono rispettivamente
p-a, p-b, p-c,
come indicato in figura:
dimostra questo bell' enunciato! →



10.6 - IL RAGGIO DEL CERCHIO INSCRITTO IN UN TRIANGOLO, ESPRESSO IN FUNZIONE DEI LATI

Sia ABC un triangolo qualunque,
e siano a, b, c le misure dei suoi lati.

**Indichiamo con r la misura del raggio del cerchio inscritto.
Il nostro obiettivo è di esprimere r in funzione di a, b, c.**

Innanzitutto, osserviamo che, detta S l'area di ABC, è

$$\begin{aligned} S &= S(BCO) + S(ACO) + S(ABO) = \\ &= \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{(a + b + c) \cdot r}{2} = \frac{\text{perimetro} \cdot r}{2} \end{aligned}$$

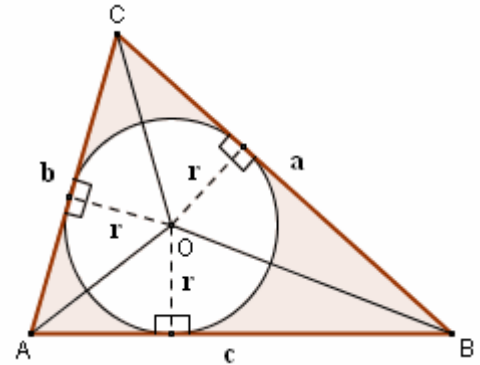
Ora, dalla formula

$$S = \frac{\text{perimetro} \cdot r}{2}$$

ricaviamo, invertendo:

$$r = \frac{2S}{\text{perimetro}} = \frac{2S}{a + b + c}$$

che è sostanzialmente la formula cercata,
vista la possibilità, volendo,
di esprimere l'area S in funzione dei lati a, b, c tramite la Formula di Erone.



10.7 - IL RAGGIO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO AD UN TRIANGOLO, ESPRESSO IN FUNZIONE DEI LATI

Sia ABC un triangolo qualunque,
e siano a, b, c le misure dei suoi lati.

**Indichiamo con R la misura del raggio
del cerchio circoscritto.
Il nostro obiettivo è di esprimere R in funzione di a, b, c.**

Nella figura, abbiamo disegnato il diametro AD: $AD = 2R$.

Osserviamo inoltre che l'angolo $\widehat{ACD}$ è retto
perché inscritto in una semicirconferenza.

Abbiamo anche tracciato l'altezza CH relativa alla base AB,
e posto, per comodità,
 $CH = h$.

I due angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ sono uguali perché sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco;
allora i due triangoli CHB, ACD sono simili (entrambi rettangoli, e con un angolo acuto uguale).

Vale dunque la proporzione

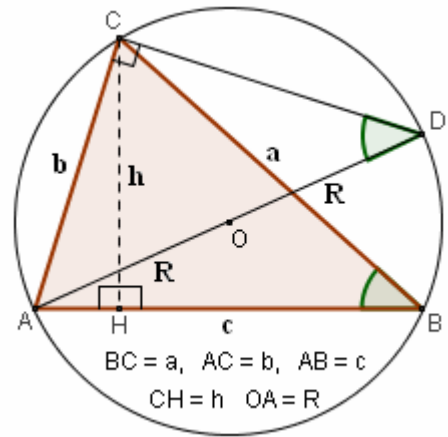
$$\begin{aligned} CH : AC &= BC : AD \\ h : b &= a : 2R \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$2R = \frac{ab}{h} = \frac{ab}{h} \cdot \frac{c}{c} = \frac{abc}{ch} = \frac{abc}{2 \cdot \frac{ch}{2}} = \frac{abc}{2S} \rightarrow R = \frac{abc}{4S}$$

La formula cercata è, in definitiva,

$$R = \frac{abc}{4S}$$



RIPASSO dei Complementi di Geometria, ed ESERCIZI geometrici vari

Alcuni problemi sui poligoni regolari si trovano a pagina 267

- 1) Scrivi, nella figura a fianco, le misure dei lati dei vari poligoni regolari inscritti nel cerchio di raggio R

- 2) Scrivi la formula $\ell_n \rightarrow \ell_{2n}$ e servitene per ricavare, a partire da $\ell_3 = R\sqrt{3}$, ℓ_6 (dal valore ben noto!) e ℓ_{12}

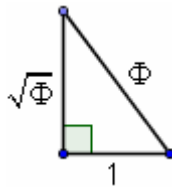
- 3) Si dice “sezione aurea” di un segmento AB ...



- 5) Dimostra che, indicato con Φ il numero

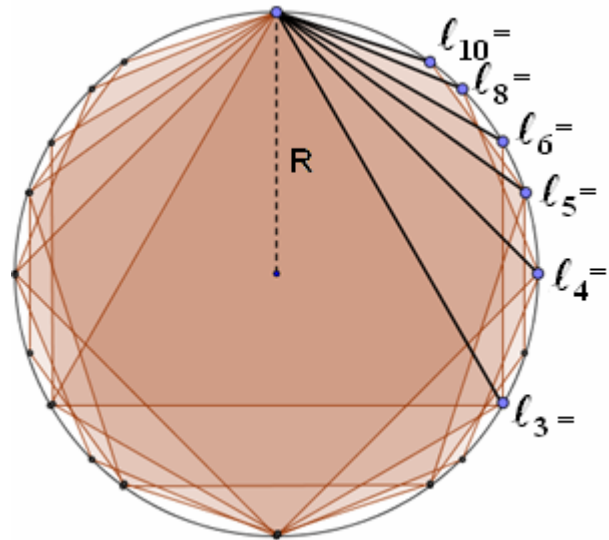
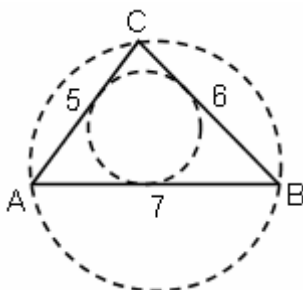
$$\Phi = \frac{\text{intero segmento}}{\text{sezione aurea}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

se un triangolo rettangolo ha un cateto uguale a 1 e l'altro cateto uguale a $\sqrt{\Phi}$, la sua ipotenusa misurerà Φ .



- 7) A pagina 229, occupandoci del decagono regolare inscritto, abbiamo dimostrato che in un triangolo isoscele con gli angoli di 36° , 72° e 72° la base è uguale alla sezione aurea del lato obliquo. Serviti di questo risultato e di quanto dimostrato all'esercizio 6 per provare che in un triangolo con gli angoli di 108° , 36° e 36° il lato più corto è uguale alla sezione aurea di quello più lungo.

- 9) Un triangolo ha i tre lati che misurano 5, 6 e 7. Quanto misurano i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta?

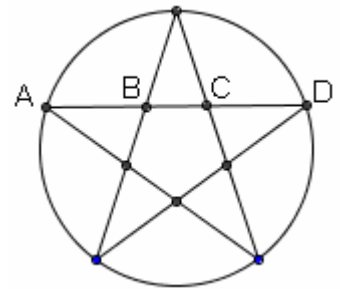


- 4) Se la lunghezza di un segmento è ℓ , la sua sezione aurea misura ...

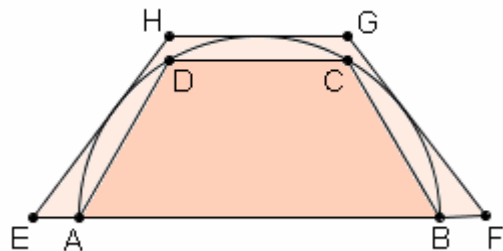
Ricavala, a partire dalla proporzione scritta all'esercizio 3)

- 6) Dimostra che qualsiasi segmento è la sezione aurea della somma del segmento stesso con la propria sezione aurea.

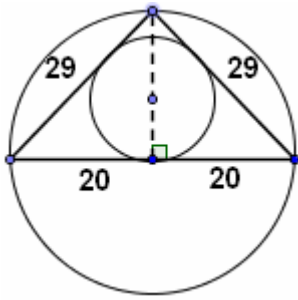
- 8) Serviti degli esercizi 6) e 7) per dimostrare che in questa figura (dove i 5 archi di circonferenza sono tutti uguali fra loro)



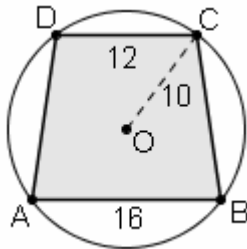
- BC è la sezione aurea di AB ,
- AB è la sezione aurea di AC ,
- e AC a sua volta è la sezione aurea di AD .



- 10) Il raggio di una semicirconferenza misura 5 cm; $ABCD$ è un trapezio inscritto, $EFGH$ un trapezio circoscritto, e le basi minori di entrambi i trapezi misurano 6 cm. Determina il lato obliquo di ciascuno dei trapezi.



- 11) Un triangolo isoscele ha la base di 40 cm e il lato obliquo di 29 cm.
Determina la sua area con la formula di Erone, poi fai nuovamente il calcolo dopo aver determinato l'altezza. Quanto misurano i raggi del cerchio inscritto e del cerchio circoscritto?

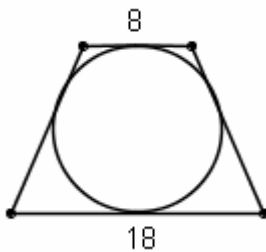


- 12) Da <http://mathcentral.uregina.ca>:

Question from Abby, a student:

An isosceles trapezoid whose bases have lengths 12 and 16 is inscribed in a circle of radius 10.

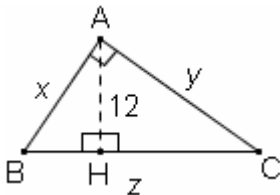
The center of the circle lies in the interior of the trapezoid. Find the area of the trapezoid.



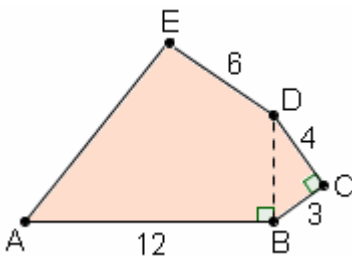
- 13) Da <http://gmatclub.com>:

A circle is inscribed in an isosceles trapezoid with bases 8 and 18. What is the area of the circle?

A. 36 pi B. 49 pi C. 64 pi D. 81 pi (pi = "pi greco")



- 14) Determina i tre lati x, y, z di un triangolo ABC, rettangolo in A, sapendo che il suo perimetro misura 60 cm e l'altezza relativa all'ipotenusa 12 cm.



- 15) Il poligono ABCDE della figura (osserva i due angoli retti) ha area uguale a $6(6 + \sqrt{30})$. Quanto misura il lato AE?

- 16) (*Impegnativo!*)

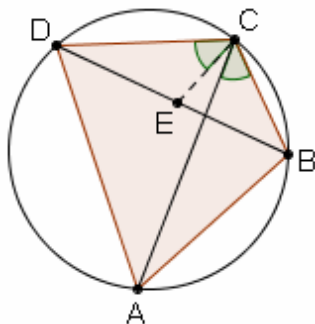
Il "**Teorema di Tolomeo**" afferma:

"in un quadrilatero ABCD inscrivibile in una circonferenza, vale la relazione

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

ossia, la somma dei prodotti dei lati opposti è uguale al prodotto delle diagonali".

La dimostrazione si può effettuare in più modi, fra cui il seguente: si prende, sulla diagonale BD, il punto E tale che $\widehat{BCA} = \widehat{DCE}$. Si hanno così le coppie di triangoli simili $ABC \sim DEC$ (perché?) e $BCE \sim ACD$ (perché?), e allora ...



QUALCHE RISPOSTA

9) $r = \frac{2}{3}\sqrt{6}$, $R = \frac{35}{24}\sqrt{6}$ 10) lato obliquo trapezio inscritto = $cm \ 2\sqrt{5}$; lato obliquo trapezio circoscritto = $cm \ \frac{17}{3}$

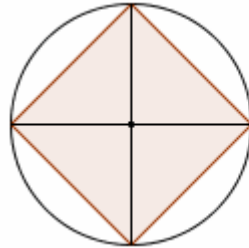
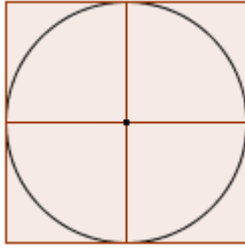
11) $r = cm \ \frac{60}{7}$; $R = cm \ \frac{841}{42}$

12) 196 13) A 14) 15, 20, 25 cm 15) Ci sono due possibilità: può misurare 11 o 17 16) $\Rightarrow$

10.8 - AREA DEL CERCHIO, LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA IL NUMERO “PI GRECO” π

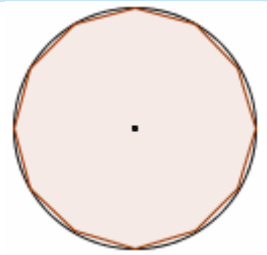
Un cerchio è *minore del quadruplo*
del quadrato che ha per lato il raggio ...

... ma è *maggiore del doppio*
di questo quadrato.



Qual è il numero *esatto* che ci dice
“quante volte il quadrato che ha per lato il raggio è contenuto nell’intero cerchio”?
Insomma, qual è il numero *esatto* che esprime
“il rapporto fra il cerchio e il quadrato che ha per lato il raggio”?

Possiamo avvicinarci al valore di questo numero se consideriamo un cerchio di raggio 1
(per il quale, quindi, l’area del quadrato costruito sul raggio sarà $1^2 = 1$)
e calcoliamo, ad esempio, l’area di un poligono regolare inscritto con molti lati.
Tale area approssimerà bene (per difetto) l’area del cerchio,
e ci darà quindi una buona approssimazione (per difetto) del numero cercato.



Fra l’altro, in calcoli di questo tipo ci può tornare molto utile la formula $\ell_n \rightarrow \ell_{2n}$
(par. 10.2): a partire ad esempio dall’esagono regolare inscritto, che ha 6 lati ($n=6$)
ognuno dei quali, come è noto, ha lunghezza uguale a quella del raggio, quindi nel nostro caso 1 ($\ell_n = \ell_6 = 1$)
possiamo ricavare il lato – perciò, poi, anche l’apotema e l’area – del dodecagono regolare inscritto ($n=12$),
poi da questo il lato del poligono regolare inscritto di 24 lati ($n=24$), ecc. ecc.
Ad esempio, preso un poligono regolare di 24 lati, inscritto in un cerchio di raggio 1,
si vede col calcolo che la sua area è uguale a 3,1058285...;

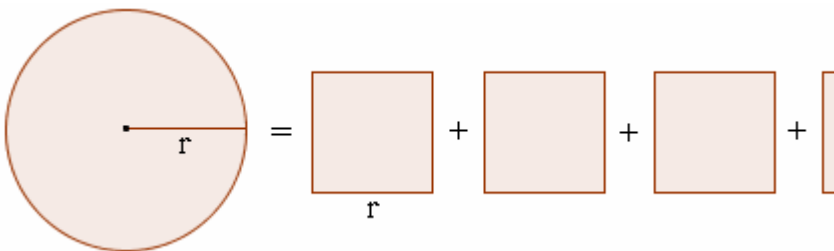
se passiamo al poligono regolare inscritto di 48 lati otteniamo che la sua area vale 3,1326286...

**Studi più approfonditi (appassionanti, ma non facili!) portano a stabilire che, in definitiva,
il numero che esprime il rapporto fra un cerchio e il quadrato che ha per lato il raggio
è un numero irrazionale un po’ maggiore di 3,14.**

Questo numero è stato chiamato dai matematici π (“pi greco”).

Dunque

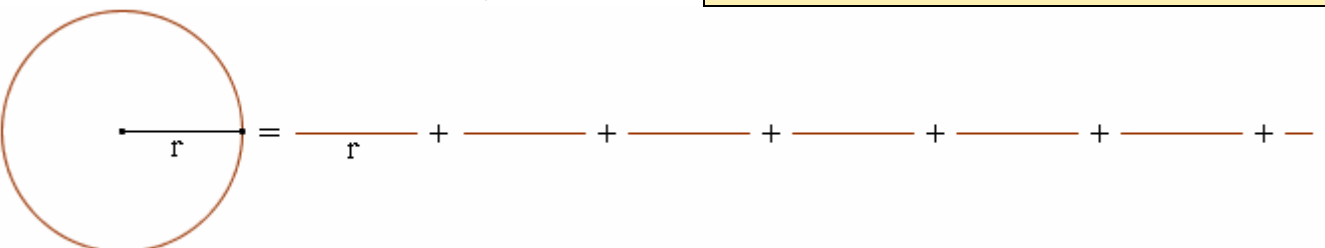
$$\text{Area cerchio} = \pi \cdot \text{raggio}^2 \quad (S = \pi r^2)$$



Per quanto riguarda la lunghezza della **circonferenza**, si ha

$$\text{Lunghezza circonferenza} = 2\pi \cdot \text{raggio} \quad (L = 2\pi r)$$

ossia, la circonferenza è uguale
a circa 6,28 volte il suo raggio
(o anche: a circa 3,14 volte il suo diametro).



ESERCIZIO AL COMPUTER

Utilizza un *foglio elettronico* per calcolare,
partendo da $\ell_6 = 1$, i valori di ℓ_{12} , ℓ_{24} , ℓ_{48} , ...
e quelli dei SEMIperimetri dei rispettivi poligoni;
tali semiperimetri approssimeranno π .

Un'approssimazione più precisa di π (con 50 cifre dopo la virgola) è:

$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ \dots$

Comunque π , essendo irrazionale (come fu dimostrato dal matematico francese Lambert nel 1761), ha dopo la virgola infinite cifre, e la successione delle cifre non presenta un "periodo" (= gruppo che si ripete).

Anzi è stato dimostrato (Lindemann, tedesco, 1882) che π è addirittura "trascendente", il che significa che non esiste alcuna equazione a coefficienti razionali, di cui π possa essere soluzione.

Importante conseguenza di questo fatto è l'impossibilità di effettuare la "quadratura del cerchio", tanto a lungo inutilmente perseguita nell'antichità, ossia di costruire, utilizzando esclusivamente la riga e il compasso per un numero finito di volte, un quadrato la cui estensione sia esattamente uguale all'estensione di un cerchio assegnato.

ALCUNE FORMULE CHE COINVOLGONO π IN GEOMETRIA

- | | |
|---|--|
| $\square$ AREA CERCHIO = πr^2 | $\square$ LUNGHEZZA CIRCONFERENZA = $2\pi r$ |
| $\square$ VOLUME SFERA = $\frac{4}{3}\pi r^3$ | $\square$ AREA SUPERFICIE SFERICA = $4\pi r^2$ |

ALCUNE FAMOSE E BELLE FORMULE PER IL CALCOLO DEL VALORE DI π

- | | |
|--|--|
| $\square$ $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots = \frac{\pi}{4}$ (Leibniz) | $\square$ $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots = \frac{\pi}{2}$ (Wallis) |
| $\square$ $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{17 \cdot 19} + \dots = \frac{\pi}{8}$ | $\square$ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ (Eulero) |

In queste ultime formule, si hanno delle "somme infinite" (nel senso di: "somme di infiniti addendi") o dei "prodotti infiniti" (nel senso di: "prodotti di infiniti fattori") e prendendo un certo numero di termini a partire da quello iniziale (esempio: i primi 5) si ottiene un valore approssimato di π , con l'approssimazione che diventa via via più precisa quanto più si fa alto il numero dei termini considerati.

Su π si potrebbero dire tantissime cose.

Se l'argomento ti incuriosisce, puoi fare una ricerca su Internet, dove ad esso sono dedicati tantissimi siti.

Potresti cominciare da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Se vuoi fare delle ricerche su siti Inglesi, tieni presente che **in lingua inglese π si dice "pi" (pronuncia: pai).**

π è spesso coinvolto in formule che attengono alla Fisica o alla Probabilità, e in questioni matematiche di livello superiore.

Da tempo, con l'uso dei computer, è stato calcolato un numero colossale di cifre dopo la virgola di π .

Già nel 1997 erano state trovate più di 1000 miliardi di cifre dopo la virgola!

La ricerca di ulteriori cifre dopo la virgola di π prosegue, ma ormai, dato il colossale numero di cifre già noto, si tratta più che altro di una sfida matematico-tecnica e di un'occasione per utilizzare e mettere alla prova i supercomputer.

Da Wikipedia:

la più pressante questione aperta su π riguarda il fatto che sia o meno "normale", cioè se la frequenza con cui è presente ogni sequenza di cifre sia la stessa che ci si aspetterebbe se le cifre fossero completamente casuali.

Questo, nel caso sia vero, deve essere vero in ogni base, non solo in base 10.

Non sappiamo molto, attualmente, a riguardo.

QUESITO (presente su parecchi siti Internet)

Una corda lunga quanto la circonferenza terrestre (cioè all'incirca 40000 km) si trova distesa lungo l'equatore.

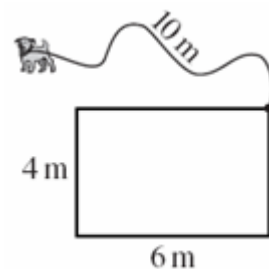
Si prende questa corda, la si taglia, se ne aggiunge 1 metro e la si redistribuisce attorno all'equatore in modo che la sua distanza dalla superficie terrestre si mantenga costante. Quale dei seguenti tre animali può passare di misura nello spazio interposto tra la corda e la superficie: un elefante, un gatto o una formica? ➡



QUESITI SU CERCHI E CIRCONFERENZE, TRATTI DA GARE MATEMATICHE

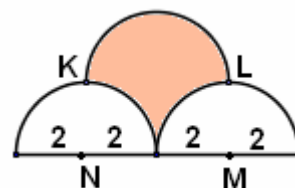
Ispirato a un quesito del Kangourou des Mathématiques

- 1) Una corda di 10 metri ha un'estremità fissata a un angolo di una casa rettangolare di lati 6 metri e 4 metri. Un cane ha il suo collare agganciato all'altra estremità della corda. Qual è l'area della superficie che può percorrere il cane?
- A) $44\pi \text{ m}^2$ B) $68\pi \text{ m}^2$ C) $88\pi \text{ m}^2$ D) $176\pi \text{ m}^2$ E) $112\pi \text{ m}^2$



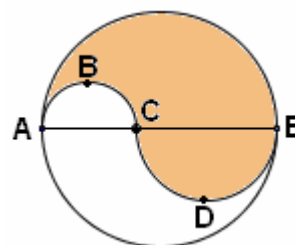
Kangourou des Mathématiques 2005

- 2) La figura mostra tre semicerchi di raggio 2. KLMN è un rettangolo. Qual è l'area della parte ombreggiata?
- A) 2π B) 7 C) $2\pi + 1$ D) 8 E) $2\pi + 2$



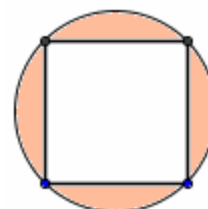
Olimpiadi matematiche colombiane 1998

- 3) Il diametro AE è diviso dal punto C nel rapporto 2:3. I due semicerchi ABC e CDE dividono la regione circolare in due parti: una superiore, ombreggiata, e una inferiore non ombreggiata. Il rapporto fra l'area della regione superiore e quella della regione inferiore è:
- A) 2:3 B) 1:1 C) 3:2 D) 9:4 E) 5:2



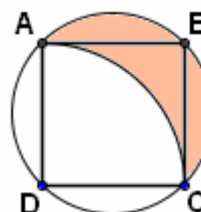
*University of New Brunswick,
Junior High School Mathematics Competition 1990*

- 4) Quale frazione dell'area del cerchio rappresenta la regione ombreggiata esterna al quadrato?
- A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{\pi-2}{\pi}$ D) $\frac{1}{3}$ E) Dipende dal raggio del cerchio



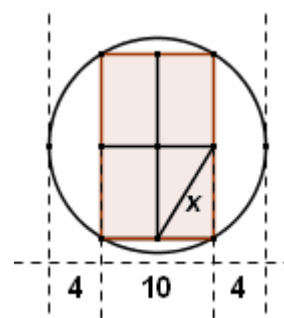
Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi

- 5) Nella figura, il lato del quadrato misura 1. Qual è l'area della regione ombreggiata?
- A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $1 - \frac{\pi}{4}$ E) $1 - \frac{\pi}{2}$



Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi

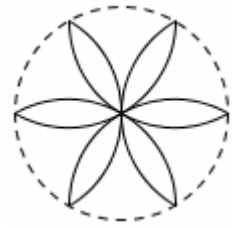
- 6) Quanto vale la lunghezza x nella figura?
- A) $\sqrt{116}$ B) $4\sqrt{10}$ C) 9 D) 12 E) 18



Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi

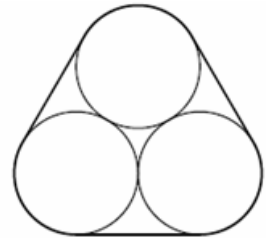
- 7) All'interno di un cerchio, mantenendo la stessa apertura del compasso, è stato disegnato un fiore.
Se il contorno del fiore ha lunghezza 2, qual è il raggio del cerchio?

A) $\frac{1}{2\pi}$ B) $\frac{1}{4\pi}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{8}$

*British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2010*

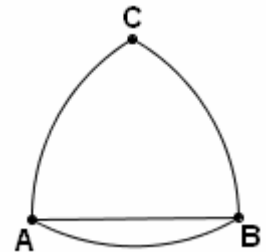
- 8) Tre monete circolari di raggio 1 cm sono a due a due tangenti. Una banda elastica le allaccia strettamente. Trovare la lunghezza in centimetri della banda.

A) 12 B) 6 C) $6 + 2\pi$ D) 4π E) $2\sqrt{3} + 2\pi$

*Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi*

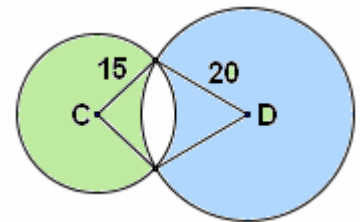
- 9) Nella figura,
 $\widehat{AB}$ è un arco di circonferenza di centro C,
 $\widehat{BC}$ è un arco di circonferenza di centro A,
 $\widehat{AC}$ è un arco di circonferenza di centro B.
 Se il segmento AB misura 1, qual è l'area della figura?

A) $2\sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{3}}$ B) $3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\pi(\sqrt{3} + 5)$ D) $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$ E) $\pi - 5\frac{\sqrt{3}}{2}$

*British Columbia Colleges**Junior High School Mathematics Contest Preliminary Round 1997*

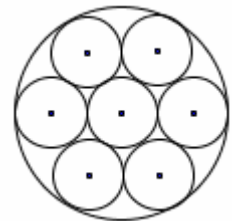
- 10) Nel diagramma, un cerchio di centro C e raggio 15 è parzialmente sovrapposto a un altro cerchio, di centro D e raggio 20. Di quante unità quadrate è più grande la regione ombreggiata di destra rispetto a quella di sinistra?

A) 400π B) $400\pi - 400$ C) $175\pi - 400$ D) 175π E) $225\pi - 400$

*British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2010*

- 11) Una grande finestra circolare contiene sette finestrelle identiche, come in figura. Se la circonferenza della maggiore è di 3 metri, allora la somma delle lunghezze dei contorni di tutti e otto i cerchi è:

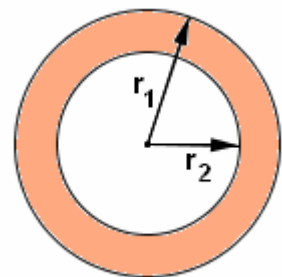
A) $\frac{7\pi}{2}$ B) 7π C) $\pi(3 + 3\sqrt{3})$ D) 7 E) 10

*University of New Brunswick,**Junior High School Mathematics Competition 1991*

- 12) Le due regioni ombreggiata e non ombreggiata nella figura hanno la stessa area.

Qual è il rapporto $\frac{r_1}{r_2}$ fra il raggio maggiore e il minore?

A) $\frac{\pi}{1}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{1}$ D) $\frac{4}{\pi^2}$ E) $\frac{\sqrt{2}-1}{1}$



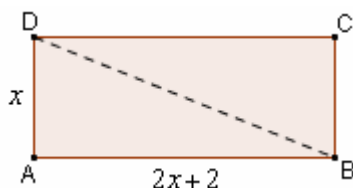
PROBLEMI GEOMETRICI

PROBLEMI GEOMETRICI DI 1° GRADO - ESEMPI SVOLTI

- In un rettangolo, la base supera di 2 cm il doppio dell'altezza e il perimetro è di 34 cm. Trovare l'area e la diagonale.

Facciamo il **disegno**, cercando di restare più fedeli possibile ai dati del problema.

In questo caso, ad esempio, occorrerà disegnare la base in modo che sia lunga più del doppio dell'altezza ...



Accanto ad disegno, **scriviamo tutti i dati**, sia quelli geometrici che quelli numerici.

E scriviamo anche, con accanto dei punti interrogativi, quali sono le **richieste del problema**.

ABCD rettangolo

$AB = 2AD + 2 \text{ cm}$

$2p(ABCD) = 34 \text{ cm}$

$S(ABCD) = ? \quad BD = ?$

Valgono le solite indicazioni generali date in relazione ai problemi di soggetto qualsiasi: **la risoluzione di un problema a una incognita si può suddividere in 3 fasi 1), 2), 3)**

1) Pongo la x :

$$\boxed{AD = x}$$

♥ La x non deve per forza coincidere con una delle richieste del problema; **va scelta in modo che sia poi facile esprimere gli altri segmenti in gioco, per mezzo di x**

2) Esprimo gli altri segmenti in gioco per mezzo ("in funzione") di x :

$$\boxed{AB = 2x + 2}$$

♥ **E' ESTREMAMENTE UTILE**

riportare sul disegno, in matita,

sia la x che le varie espressioni contenenti x via via ricavate.

3) Imposto l'equazione risolvente :

$$\boxed{2(2x + 2) + 2x = 34}$$

$$4x + 4 + 2x = 34$$

$$6x = 30$$

$$x = 5$$

♥ **L'equazione risolvente si imposta utilizzando un dato che non sia mai stato sfruttato fino a quel momento (nel nostro caso, il perimetro).**

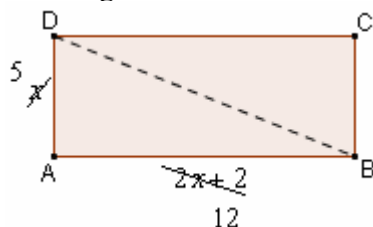
Se ci servissimo, per l'equazione risolvente, di un'informazione già utilizzata prima, ci ritroveremmo fra le mani un'equazione *indeterminata*!

Quindi

$AD = 5 \text{ cm}$,

$AB = 2x + 2 = 10 + 2 = 12 \text{ cm}$ (NOTA 1)

Converrà a questo punto riportare sulla figura i valori ottenuti!



$$\boxed{S = AB \cdot AD = 12 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2} \quad (\text{NOTA 2})$$

$$\boxed{BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}} \quad (\text{NOTA 3})$$

NOTA 1

A stretto rigore, l'unità di misura andrebbe indicata in tutti gli anelli della catena e non solo nell'ultimo, scrivendo quindi, in questo caso,

$$AB = (2x + 2) \text{ cm} = (10 + 2) \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

Tuttavia noi, per brevità, la scriveremo solo alla fine.

NOTA 2

L' "area" si può indicare con A oppure con S (il termine "superficie" è usato, seppure impropriamente, anche per indicare l' "area di una superficie").

A rigore, "superficie" indica invece l'entità **geometrica**, "area" il **numero** che esprime la misura dell'estensione di una superficie.

NOTA 3

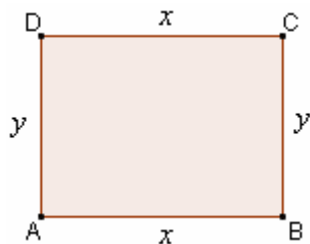
Qui abbiamo applicato il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABD.

Certo, **sovente sono possibili più risoluzioni alternative!**

Anche nel nostro caso: il dato *perimetro* = 34 ci diceva che la somma *base+altezza* era 17, quindi avremmo potuto, ad es., porre

base = x ; *altezza* = $17 - x$ da cui l'equazione risolvente: $x = 2(17 - x) + 2$; ... $x = 12$ eccetera

- Trovare le dimensioni di un rettangolo nel quale il perimetro supera di 10 cm il triplo dell'altezza, e la differenza fra il triplo della base e il doppio dell'altezza è 12 cm.

Disegno**Dati**

ABCD rettangolo
 $2p(ABCD) = 3AD + 10 \text{ cm}$
 $3AB - 2AD = 12 \text{ cm}$
 $AB = ? \quad AD = ?$

Questa volta i dati sono tali che, comunque si ponga la x , sarebbe poi un po' scomodo esprimere l'altro segmento in gioco per mezzo di x . In questi casi è preferibile PORRE PIU' INCOGNITE e impostare un SISTEMA, costituito da TANTE EQUAZIONI, QUANTE SONO LE INCOGNITE POSTE.

$$\begin{aligned} AB &= DC = x \\ AD &= BC = y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 3y + 10 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

Risolvendo ora il sistema, otteniamo:

$$2 \cdot \begin{cases} 2x - y = 10 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 20 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$(1) - (2) \begin{cases} x = 8 \end{cases}$$

$$(1) \quad 2 \cdot 8 - y = 10; \quad 16 - y = 10; \quad y = 6$$

Quindi

$$AB = DC = 8 \text{ cm}$$

$$AD = BC = 6 \text{ cm}$$

♥ La risoluzione in più incognite è consigliabile quando, comunque si ponga la x , è poi difficoltoso o se non altro scomodo esprimere per mezzo della x scelta, le altre quantità in gioco.

In tal caso, si pongono due o più incognite, e si scrive un sistema, nel quale LE EQUAZIONI SIANO TANTE QUANTE LE INCOGNITE PRESENTI.

L'eventualità che il numero delle equazioni, indipendenti fra loro, che si possono impostare, sia diverso dal numero delle incognite, è assai rara nei problemi "scolastici".

Volendo, avremmo anche potuto risolvere con una incognita sola: se si osservano i dati

$$2p(ABCD) = 3AD + 10 \text{ cm}$$

$$3AB - 2AD = 12 \text{ cm}$$

si capisce che nell'ultima uguaglianza si può isolare con un paio di passaggi AB, ottenendo

$$3AB = 2AD + 12 \text{ cm}$$

$$AB = \frac{2AD + 12 \text{ cm}}{3}$$

per cui, se si pone ora $AD = x$,

si ha $AB = \frac{2x + 12}{3}$

e si può scrivere dunque l'equazione risolvibile

$$2p(ABCD) = 3AD + 10 \text{ cm}$$

$$2 \cdot \frac{2x + 12}{3} + 2x = 3x + 10$$

con la quale si trova $x = AD = 6$.

Se confrontiamo i due metodi di risoluzione, vediamo che per *questo* particolare problema, pur essendo possibile risolvere con 1 sola incognita, la risoluzione con più incognite e quindi col sistema risulta essere più comoda, anche per la possibilità di risolvere il sistema col simpatico metodo di riduzione.

In generale, comunque, di fronte a un problema geometrico la risoluzione con una incognita sola è preferibile, perché di norma è più rapida, e perché mette maggiormente in risalto le interrelazioni fra le varie quantità.

Tranne, ribadiamolo, in quei casi in cui sia eccessivamente laborioso esprimere tutte le quantità in gioco, in funzione di una sola di esse.

□ PROBLEMI GEOMETRICI DI PRIMO GRADO

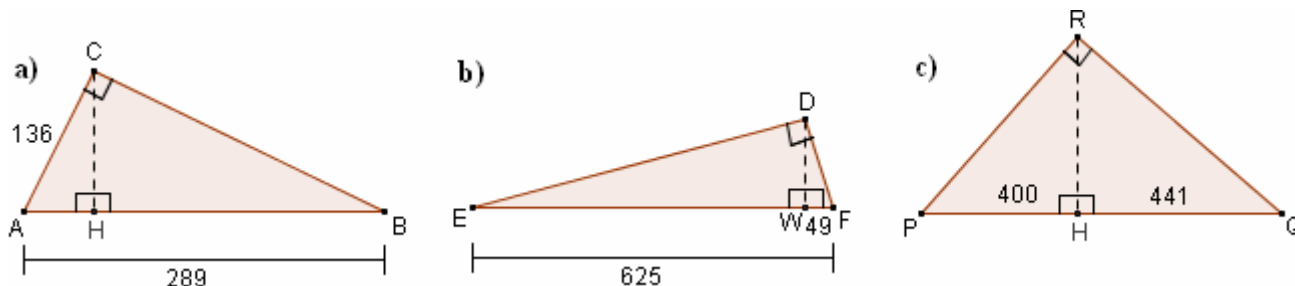
- 1) ➡ In un triangolo isoscele il lato obliquo è $\frac{5}{6}$ della base, e la differenza fra base e lato obliquo è di 3 cm. Quanto misura il perimetro? E l'area?
- 2) In un triangolo isoscele, di perimetro 72 cm, il lato obliquo supera la base di 6 cm. Determina i tre lati.
- 3) Di un triangolo si conosce il perimetro (48 cm), e si sa che due dei lati hanno per somma 27 cm e per rapporto $\frac{4}{5}$. Quanto misura ciascuno dei tre lati?
- 4) ➡ In un triangolo isoscele, la somma del triplo della base col doppio del lato obliquo misura 82 cm mentre è di 19 cm la diff. fra il triplo del lato obliquo e il doppio della base. Determina il perimetro.
- 5) In un triangolo isoscele il lato obliquo è inferiore di 4 cm rispetto alla base. Il perimetro è di cm 64. Trovare i lati, l'area, l'altezza relativa al lato obliquo.
- 6) In un triangolo rettangolo i cateti sono uno $\frac{3}{4}$ dell'altro, e la loro somma misura cm 21. Quanto misura il perimetro?
- 7) In un triangolo isoscele DEF, di base EF, si ha $EF + DE = m\ 11$, e $2EF + 3DE = m\ 27$. Determina i lati del triangolo e la sua area.
- 8) Se il perimetro di un quadrato aumentasse di 8 cm, l'area aumenterebbe di 36 cm^2 . Quanto misura il lato del quadrato?
- 9) In un triangolo PQR i due angoli più ampi sono rispettivamente il doppio e il quintuplo del più piccolo. Quanto misurano i tre angoli?
- 10) In un triangolo ABC si sa, riguardo agli angoli interni, che $3\hat{A} + 2\hat{B} = 195^\circ$ e che $4\hat{B} - 3\hat{C} = 30^\circ$. Quanto misurano i tre angoli?
- 11) Determinare perimetro e area di un rombo del quale si conoscono la somma delle diagonali (62 cm) e la loro differenza (34 cm).
- 12) Un trapezio isoscele ha la base minore uguale al lato obliquo. Il perimetro del trapezio misura 52 cm, e la somma della quinta parte del lato obliquo con la metà della base maggiore vale 13 cm. Determinare le misure dei quattro lati e dell'area.
- 13) ABCD è un trapezio rettangolo.
La base maggiore AB supera di 4 cm la somma di altezza e lato obliquo; questi differiscono di 8 cm, mentre la differenza fra base maggiore e lato obliquo è di 9 cm.
Determinare il perimetro e l'area.
- 14) Di un trapezio isoscele si conoscono:
l'area (44 cm^2), l'altezza (4 cm) e il rapporto fra le due basi ($\frac{4}{7}$). Quanto vale il perimetro?
- 15) Un parallelogrammo ha il perimetro di 2 m; un lato supera l'altro di 22 cm.
Quanto misurano i due lati?
Sapendo inoltre che la proiezione del lato magg. sul minore vale 11 cm, determinare l'area della figura.
- 16) Un rombo, nel quale le diagonali sono una $\frac{3}{4}$ dell'altra, ha il perimetro di 60 cm.
Quanto misura l'area?
- 17) Un trapezio isoscele è circoscritto ad un cerchio.
Il suo perimetro è di cm 52, mentre la differenza fra le basi è di cm 10.
Determinare i lati e l'area del trapezio, nonché il raggio del cerchio inscritto.
(Occorre ricordare la proprietà che caratterizza ogni quadrilatero circoscritto a una circonferenza)
- 18) Un trapezio isoscele è circoscritto ad un SEMIcerchio.
Sapendo che la somma delle basi misura 38 cm, e che il lato obliquo supera di 13 cm la base minore, determinare i lati del trapezio, e il diametro del semicerchio.
(Ricordare la proprietà che caratterizza il trapezio isoscele circoscritto a una semicirconferenza)

SOLUZIONI

- 1) 48 cm; 108 cm^2 2) 20 cm, 26 cm, 26 cm 3) 12 cm, 15 cm, 21 cm 4) 50 cm
 5) lato obliquo = cm 20, base = cm 24, area = $\text{cm}^2\ 192$, $h = \text{cm}\ 19,2$ 6) $2p = 36\text{ cm}$
 7) $EF = m\ 6$, $DE = DF = m\ 5$, $S = m^2\ 12$ 8) 8 cm 9) $22^\circ 30'$, 45° , $112^\circ 30'$ 10) 15° , 75° , 90°
 11) 100 cm, 336 cm^2 12) 10 cm, 10 cm, 10 cm, 22 cm, 128 cm^2 13) 50 cm, 80 cm^2 14) 32 cm
 15) 61 cm e 39 cm; 2340 cm^2 16) 216 cm^2
 17) 13 cm, 13 cm, 18 cm, 8 cm, 156 cm^2 , 6 cm 18) 17 cm, 17 cm, 34 cm, 4 cm; 16 cm

□ PROBLEMI CON APPLICAZIONE DEI TEOREMI DI EUCLIDE E PITAGORA

- 1) Determinare tutti i segmenti che compaiono nelle seguenti figure, senza mai utilizzare il Teorema di Pitagora.



- 2) ➡ In un triangolo rettangolo i cateti misurano rispettivamente 65 cm e 156 cm. Utilizzare il Teorema di Pitagora per calcolare la misura dell'ipotenusa, dopodiché determinare le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e dell'altezza relativa all'ipotenusa mediante i teoremi di Euclide.
- 3) Senza mai utilizzare il teorema di Pitagora, determinare il perimetro di un triangolo rettangolo sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa misura m 24 e una delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa m 18.
- 4) Sapendo che le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo misurano cm 4,5 e cm 8, trovare i lati, l'altezza relativa all'ipotenusa e l'area del triangolo, senza mai utilizzare Pitagora.
- 5) Dato il triangolo rettangolo di cateti a , b , determinare le misure: dell'ipotenusa, delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, dell'altezza relativa all'ipotenusa.
- 6) Determinare i lati, l'altezza relativa all'ipotenusa e l'area di un triangolo rettangolo, conoscendo le proiezioni a , b dei cateti sull'ipotenusa.
- 7) In un triangolo rettangolo, un cateto è inferiore di 10 cm all'ipotenusa, mentre la sua somma con l'ipotenusa dà un segmento lungo 40 cm. Determinare l'altro cateto, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, e l'altezza relativa all'ipotenusa.
- 8) ➡ Un trapezio rettangolo ha la base minore uguale all'altezza. Il lato obliquo supera di 2 cm la base minore, mentre la differenza fra le due basi è di 8 cm. Sapresti determinare i quattro lati? (In questo problema si può applicare il Teorema di Pitagora per impostare l'equazione risolvente)
- 9) Se in un triangolo rettangolo le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa sono, rispettivamente, una inferiore di 6 cm e l'altra maggiore di 8 cm rispetto all'altezza relativa all'ipotenusa, quanto misurano i lati del triangolo? (Si può utilizzare il II° Teorema di Euclide per impostare l'equazione risolvente)
- 10) Il cateto maggiore di un triangolo rettangolo supera di 4 cm la sua proiezione sull'ipotenusa; quest'ultima, a sua volta supera di 5 cm il cateto maggiore. Determinare i lati del triangolo e, successivamente, le misure dei raggi dei due cerchi inscritto e circoscritto.
- 11) Sapendo che la mediana CM relativa all'ipotenusa AB di un triangolo rettangolo ABC supera di 18 cm la propria proiezione HM sull'ipotenusa, e che l'altezza CH relativa all'ipotenusa misura 24 cm, determinare perimetro e area di ABC .
- 12) ➡ Trovare il perimetro di un triangolo isoscele di area 108 cm^2 , sapendo che il lato è $\frac{5}{8}$ della base. (In questo problema si può applicare il teorema di Pitagora per esprimere un segmento in funzione di x ; l'equazione risolvente non è di primo grado, ma è comunque di risoluzione immediata)
- 13) In un triangolo rettangolo ABC le proiezioni BH , HC dei cateti sull'ipotenusa differiscono di 7 cm. Determinare l'ipotenusa BC sapendo che $AH^2 - BH^2 = 63 \text{ cm}^2$. (In questo problema si può applicare il II° Teor. di Euclide per esprimere un segmento in funzione di x)

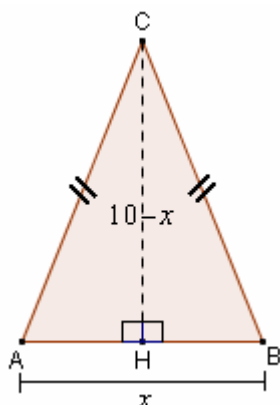
SOLUZIONI

- | | |
|---|---|
| 1) a) $AH = 64$, $HB = 225$, $CH = 120$, $CB = 255$ | 2) 169 cm, 25 cm, 144 cm, 60 cm |
| b) $DF = 175$, $EW = 576$, $DW = 168$, $ED = 600$ | 3) m 120 |
| c) $RH = 420$, $PQ = 841$, $PR = 580$, $RQ = 609$ | 4) 12,5 cm; 7,5 cm; 10 cm; 6 cm; $37,5 \text{ cm}^2$ |
| 5) $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ | 6) $a + b$, $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$ |
| 7) 20 cm, 9 cm, 16 cm, 12 cm | 8) 15, 15, 23 e 17 cm |
| | 9) 30, 40, 50 cm |
| 10) 15, 20, 25 cm; $r = 5 \text{ cm}$; $R = 12,5 \text{ cm}$ | 11) 120 cm; 600 cm^2 |
| | 12) 54 cm |
| | 13) 25 cm |

PROBLEMI GEOMETRICI DI 2° GRADO - ESEMPI SVOLTI

- In un triangolo isoscele la somma di base e altezza è 10 cm, e l'area è di 12 cm².
Trovare il perimetro.

Disegno



Dati e richieste del problema

$$\begin{aligned} CA &= CB \\ CH &\perp AB \\ AB + CH &= 10 \text{ cm} \\ S(ABC) &= 12 \text{ cm}^2 \\ 2p(ABC) &= ? \end{aligned}$$

Risoluzione

1) Pongo la x : $AB = x$

2) Esprimo gli altri segmenti che mi servono in funzione di x :

$$CH = 10 - x$$

3) Imposto l'equazione risolvente:

$$\frac{x(10-x)}{2} = 12 \quad (\text{area} = 12)$$

$$x(10-x) = 24$$

$$10x - x^2 = 24$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$(x-6)(x-4) = 0$$

$$x = 6 \vee x = 4$$

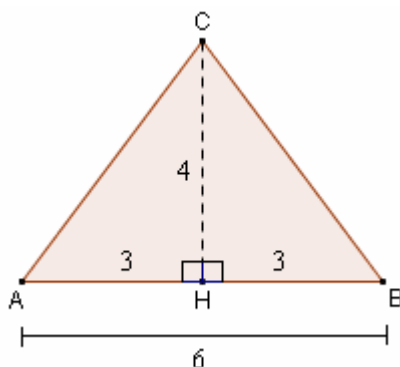
In questo caso il problema, che ha un'equazione risolvente di 2° grado, possiede *due* soluzioni, ma non sempre è così:

- a volte è $\Delta = 0$, quindi le soluzioni sono coincidenti, è come se ce ne fosse una sola;
- a volte è $\Delta < 0$, e il problema è impossibile;
- altre volte l'equazione ha, sì, due soluzioni, ma poi ... una di esse è "non accettabile", da scartare (potrebbero essere anche entrambe non accettabili ...)

Negli esercizi proposti potrai sperimentare una casistica molto varia.

Perciò si hanno due possibilità, ci sono due distinti triangoli che risolvono il problema:

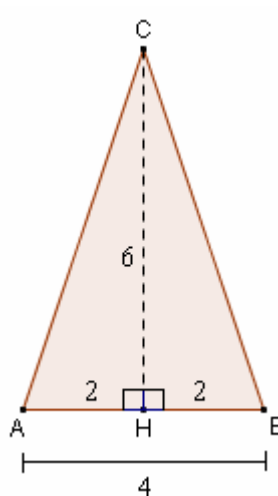
$$\begin{aligned} AB &= 6 \text{ cm,} \\ CH &= 10 - 6 = 4 \text{ cm} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{CH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$2p = 5 + 5 + 6 = 16 \text{ cm}$$

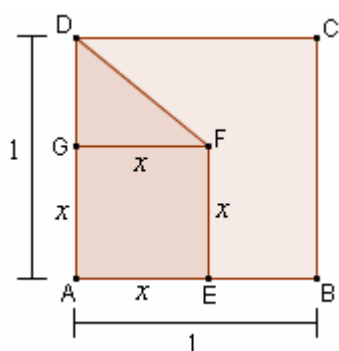
$$\begin{aligned} AB &= 4 \text{ cm,} \\ CH &= 10 - 4 = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{CH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \\ &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2p &= 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 4 = \\ &= 4\sqrt{10} + 4 = 4(\sqrt{10} + 1) \text{ cm} \end{aligned}$$

- Un quadrato ABCD ha lato unitario.
 All'interno del lato AB è stato preso un punto E costruendo poi, internamente ad ABCD, un altro quadrato AEFG; infine si è congiunto F con D.
 L'area del trapezio AEFD risulta essere $\frac{3}{8}$ dell'area di ABCD.
 Quanto misura AE?



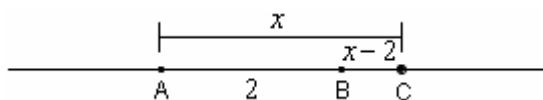
ABCD quadrato
 $AB = BC = CD = DA = 1$
 AEFG quadrato
 $S(AEFD) = \frac{3}{8} \cdot S(ABCD)$
 AE = ?

$$AE = EF = FG = GA = x; \quad S(AEFD) = \frac{(AD + EF) \cdot AE}{2} = \frac{(1 + x) \cdot x}{2}$$

$$\text{Equazione risolvente: } \frac{(1+x) \cdot x}{2} = \frac{3}{8} \cdot 1^2; \quad \frac{x+x^2}{2} = \frac{3}{8}; \quad 4x + 4x^2 = 3; \quad 4x^2 + 4x - 3 = 0; \quad x_{1,2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right\rangle$$

La soluzione negativa è evidentemente da scartare (si dice anche che è NON ACCETTABILE).

- Su di una retta r ci sono due punti, A e B, a distanza 2 l'uno dall'altro.
 Alla retta appartiene anche un terzo punto C, per il quale si ha $2CA^2 + CB^2 = 8$. Dove si trova C?



$AB = 2$
 $2CA^2 + CB^2 = 8$
 Dove si trova C?

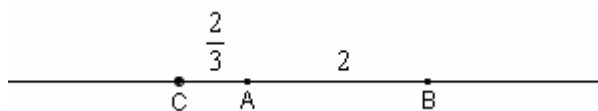
$$AC = x, \quad AB = 2, \quad CB = x - 2$$

$$\text{Equazione risolvente: } 2x^2 + (x-2)^2 = 8; \quad 2x^2 + x^2 - 4x + 4 = 8; \quad 3x^2 - 4x - 4 = 0; \quad x_{1,2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{array} \right\rangle$$

La soluzione $x = 2$ corrisponde alla situazione in cui C coincide con B, è sovrapposto a B:
 in effetti, in questo caso è $CA = AB = 2$ e $CB = 0$,

quindi si ha proprio $2CA^2 + CB^2 = 2 \cdot 2^2 + 0^2 = 8 + 0 = \boxed{8}$.

Ma PER QUESTO PROBLEMA ANCHE LA SOLUZIONE NEGATIVA E' ACCETTABILE:
 essa corrisponde infatti al punto C posizionato A SINISTRA del punto A



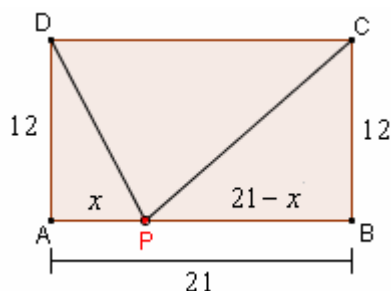
$$\text{e in questo caso si ha ancora } 2CA^2 + CB^2 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + 2\right)^2 = 2 \cdot \frac{4}{9} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} + \frac{64}{9} = \frac{72}{9} = \boxed{8}$$

In definitiva, di fronte alle soluzioni trovate per un problema, bisogna sempre chiedersi se siano accettabili oppure no: si tratta di andare a vedere quali sono, per il problema, le limitazioni alle quali è soggetta la nostra "x"; e a volte, anche una soluzione negativa può avere una "interpretazione", e magari, per taluni problemi, risultare accettabile!

Approfondimento: ➡



- Un rettangolo ABCD ha base AB = 21 cm e altezza AD = 12 cm.
Determinare, sul segmento AB, un punto P **IN MODO CHE** risulti: $PD^2 + PC^2 = 569 \text{ cm}^2$.



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$

$$AB = 21 \text{ cm}, AD = 12 \text{ cm}$$

? P su AB **in modo che** $PD^2 + PC^2 = 569 \text{ cm}^2$
CONDIZIONE

Attenzione! Questo è un problema "D.O.C"!



I problemi di questa tipologia, nei quali è richiesto di **determinare un punto** (su di un segmento, o una semiretta, o una retta, o una circonferenza, ecc. ecc.)

IN MODO CHE sia verificata una certa **CONDIZIONE**, sono particolarmente importanti.

Sono anche, fortunatamente, problemi “strutturalmente facili”, ossia la loro risoluzione consiste sempre in un medesimo **procedimento “standard”**.

Si tratta di:

- 1) **PORRE** l'incognita x
- 2) **ESPRIMERE** per mezzo di x , tutte le quantità che compaiono nella **CONDIZIONE**
- 3) **SOSTITUIRE** nella **CONDIZIONE** le espressioni trovate, ottenendo così l'equazione risolvibile.

Nel nostro caso:

- 1) è richiesto di localizzare la posizione che deve occupare il punto P, sul segmento AB, affinché ecc.ecc. E' chiaro che la posizione di P è individuata quando si conosca la sua distanza da una qualsiasi delle due estremità di AB. Quindi, porremo come incognita AP oppure PB.

Ad esempio, possiamo **porre** $AP = x$.

- 2) Ora dobbiamo **esprimere** per mezzo di x i due segmenti PD e PC, o meglio i loro quadrati. Con Pitagora su APD e BPC, otteniamo:

$$\begin{aligned} PD^2 &= AP^2 + AD^2 = x^2 + 144 \\ PC^2 &= PB^2 + BC^2 = (21 - x)^2 + 144 \end{aligned}$$

- 3) Non ci resta che **sostituire** le espressioni trovate nella condizione $PD^2 + PC^2 = 569 \text{ cm}^2$ ed ecco la nostra l'equazione risolvibile:

$$x^2 + 144 + (21 - x)^2 + 144 = 569$$

$$x^2 + 144 + 441 - 42x + x^2 + 144 = 569$$

$$2x^2 - 42x + 729 = 569$$

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 320}}{2} = \frac{21 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{21 \pm 11}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 16 \end{array} \right.$$

Dunque, affinché risulti $PD^2 + PC^2 = 569 \text{ cm}^2$, dev'essere $AP = 5 \text{ cm}$ o in alternativa $AP = 16 \text{ cm}$.

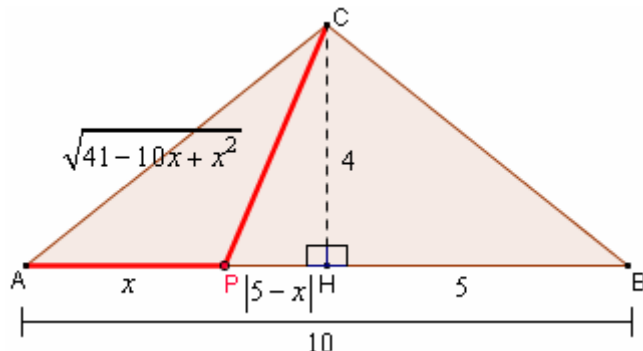
Come istruttiva verifica, calcola i valori di PD^2 e di PC^2 nell'ipotesi che sia $AP = 5 \text{ cm}$: constaterai che si ha proprio $PD^2 + PC^2 = 569 \text{ cm}^2$. E analogamente supponendo $AP = 16 \text{ cm}$.

Il fatto che si siano trovate due soluzioni, corrispondenti a due posizioni di P alla medesima distanza da una delle estremità di AB, era prevedibile considerando l'evidente “simmetria” del problema: prese due posizioni di P, una a una certa distanza da A e l'altra a distanza uguale, ma da B, i valori delle lunghezze dei due segmenti PD e PC si scambiano, quindi la somma dei quadrati di tali valori resta invariata.

Fin dall'inizio si poteva quindi capire che questo problema, nel caso ammettesse una soluzione, doveva necessariamente averne anche una seconda, “gemella” rispetto alla prima.

- Sulla base $AB = 10$ cm di un triangolo isoscele ABC , la cui altezza CH misura 4 cm, determinare un punto P **in modo che** risulti $PA^2 + 5PC^2 = 129$ cm²

Disegno



Dati e richieste del problema

$$CA = CB$$

$$AB = 10 \text{ cm}$$

$$CH = 4 \text{ cm } (CH \perp AB)$$

? P su AB **in modo che**

$$PA^2 + 5PC^2 = 129 \text{ cm}^2$$

Risoluzione

1) **PONGO** la x : $PA = x$

2) **ESPRIMO** gli altri segmenti che mi servono in funzione di x :

$$AH = \frac{AB}{2} = 5$$

$$PH = |5 - x| \text{ (NOTA)}$$

$$PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \sqrt{|5 - x|^2 + 4^2} \\ = \sqrt{25 - 10x + x^2 + 16} = \sqrt{41 - 10x + x^2}$$

3) **SOSTITUISCO** nella relazione data per impostare l'equazione risolvente:

$$x^2 + 5(41 - 10x + x^2) = 129$$

$$x^2 + 205 - 50x + 5x^2 = 129$$

$$6x^2 - 50x + 76 = 0; \quad 3x^2 - 25x + 38 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 456}}{6} = \frac{25 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{25 \pm 13}{6} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{19}{3} \right\}$$

Quindi può essere $PA = 2$ cm oppure $PA = \frac{19}{3}$ cm

Facciamo la **verifica**.

Con $PA = 2$ avremmo

$$PH = 3 \text{ e } PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \text{ da cui}$$

$$PA^2 + 5PC^2 = 2^2 + 5 \cdot 5^2 = 4 + 5 \cdot 25 = 4 + 125 = 129, \text{ ok}$$

Con $PA = \frac{19}{3}$ avremmo

$$PH = \frac{19}{3} - 5 = \frac{4}{3}$$

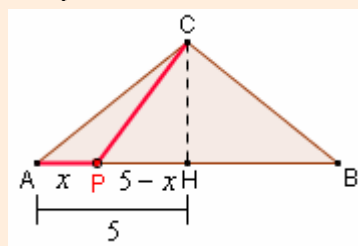
$$PC = \sqrt{PH^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 16} = \sqrt{\frac{160}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{10}, \text{ da cui}$$

$$PA^2 + 5PC^2 = \left(\frac{19}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{160}{9} = \dots = \frac{1161}{9} = 129, \text{ ok}$$

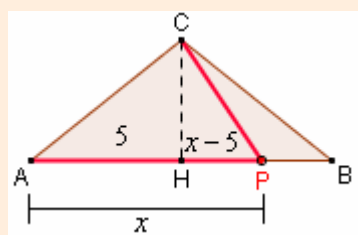
NOTA

Certamente ti chiederai perché abbiamo introdotto il **valore assoluto** scrivendo $PH = |5 - x|$ anziché $PH = 5 - x$.

Il fatto è che noi **non sappiamo se il punto P** , affinché sia verificata l'uguaglianza richiesta, **deve trovarsi a sinistra di H oppure a destra di H** . Nel primo caso avremmo



mentre nel secondo caso sarebbe



Quindi, in pratica, il valore corretto per il segmento PH si ottiene facendo la differenza fra 5 e x “dal maggiore al minore”, o anche: facendo la differenza fra 5 e x e, nel caso si ottenga un numero negativo, mutando questo risultato in positivo; ma ciò equivale, appunto, a fare $|5 - x|$ (o, il che è lo stesso, $|x - 5|$).

Notiamo tuttavia che in *questo* particolare problema il segmento in questione è utilizzato esclusivamente “al quadrato”, e siccome

$$|5 - x|^2 = |x - 5|^2 = (x - 5)^2 = (5 - x)^2$$

se anche uno studente dimenticasse di mettere le stanghette di valore assoluto, farebbe giusto lo stesso.

□ PROBLEMI GEOMETRICI DI SECONDO GRADO

- 1) ➡ Determinare base e altezza di un rettangolo di area 60 cm^2 sapendo che la somma dell'altezza col triplo della base dà 27 cm .
- 2) ➡ In un triangolo isoscele ABC, di base AB, il perimetro misura 16 cm , e la somma dei quadrati costruiti sui tre lati misura 86 cm^2 . Determinare i lati e l'area di ABC.
- 3) Un quadrato ABCD ha il lato che misura $2a$.
All'interno dei lati del quadrato, procedendo sempre nello stesso senso (ad es., in senso antiorario) prendi quattro segmenti: AE ; $BF = 2 \cdot AE$; $CG = 3 \cdot AE$; $DH = 4 \cdot AE$.
Quanto deve misurare il segmento AE affinché l'area del quadrilatero irregolare EFGH misuri $2a^2$?
- 4) Da un foglio rettangolare lungo 12 cm e largo 9 cm , si ritaglia, lungo ciascuno dei 4 lati, una striscia di larghezza x .
Quanto deve valere x se si vuole che l'area del rettangolo ottenuto dopo il ritaglio sia di 54 cm^2 ?
- 5) ➡ Nel trapezio rettangolo ABCD il lato obliquo BC misura 10 cm e la base minore CD 16 cm .
La somma dell'altezza con la base maggiore vale 30 . Determinare l'area del trapezio.
(In questo problema si può applicare il teorema di Pitagora per impostare l'equazione risolvente)
- 6) Determinare il lato obliquo $AC = BC$ di un triangolo isoscele ABC di perimetro 36 cm , in modo che (vedi pag. 248 per un esempio di problema di questo tipo) si abbia: $AB^2 + AC^2 = 269 \text{ cm}^2$.
- 7) Sul diametro $AB = 10 \text{ cm}$ di una semicirconferenza, determinare un punto P in modo che, tracciata da P la perpendicolare ad AB fino ad incontrare la semicirconferenza in Q, il quadrato costruito sul segmento PQ abbia l'area di 16 cm^2 .
- 8) In un trapezio rettangolo in cui base maggiore e altezza misurano entrambe 4 cm , la somma dei quadrati dei quattro lati vale $\text{cm}^2 58$. Trovare la base minore.
- 9) In un triangolo isoscele il lato supera l'altezza relativa alla base di 8 cm , e a sua volta la base supera il lato di 11 cm . Trovare le misure della base e del lato obliquo.
- 10) In un trapezio di area 96 cm^2 la base minore è doppia dell'altezza.
Determinare le due basi, sapendo che la loro differenza è di 8 cm .
- 11) Un rettangolo ABCD ha la base AB lunga 14 cm , mentre l'altezza AD misura 8 cm .
Si chiede di determinare, sulla retta AB, un punto P in modo che si abbia: $3AP^2 + PC^2 = 292 \text{ cm}^2$.
- 12) In un trapezio isoscele ABCD, con la base maggiore AB doppia dell'altezza, la base minore misura $2a$, e la somma dei quadrati dei quattro lati vale $118a^2$. Determinare il perimetro.
- 13) Internamente ad un segmento $AB = 10k$, determinare un punto P (con $AP < PB$) tale che, costruendo su AP e su PB rispettivamente il quadrato APCD e il quadrato PBEF (entrambi dalla stessa parte rispetto ad AB), l'area del pentagono irregolare ABEFD misuri $64k^2$.
- 14) La somma dei cateti di un triangolo rettangolo misura $27b$, e l'area $63b^2$. Determinare i cateti.
- 15) Dividere un segmento di lunghezza $12a$ in due parti tali che la somma dei quadrati costruiti su ciascuna di esse sia $80a^2$.
- 16) In un trapezio circoscrivibile ad una circonferenza i lati obliqui misurano rispettivamente 9 e 11 cm .
Determinare le basi sapendo che la somma del quadrato di una di esse col triplo del quadrato dell'altra vale $\text{cm}^2 300$.
- 17) Risolvere il problema precedente sostituendo al posto del dato " $\text{cm}^2 300$ " il dato " $\text{cm}^2 800$ ".
- 18) Determinare il perimetro di un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $20a$, nel quale l'altezza CH relativa all'ipotenusa supera di $4a$ il segmento AH.
- 19) E' data una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$.
Si vuole determinare, su AB, un punto P in modo che, alzata da P la perpendicolare al diametro fino ad incontrare la semicirconferenza in C, valga la relazione

$$CA^2 + CP^2 = \frac{19}{25}r^2.$$
 (Indicazione: congiungere C con le estremità del diametro;
essendo il triangolo ABC rettangolo in C perché ..., si potranno applicare i teoremi di Euclide)

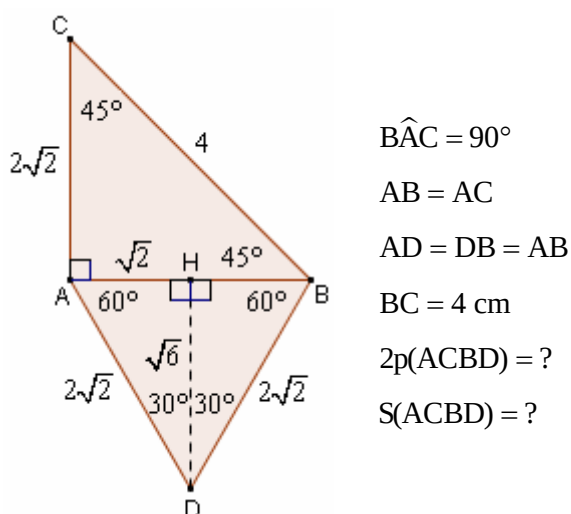
- 20) Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di diametro $2r$.
Determinarne la base minore, sapendo che la somma dei quadrati dei quattro lati misura $7r^2$.
- 21) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di diametro $2r$.
Determinarne la base minore, sapendo che questa è uguale alla quinta parte della base maggiore.
- 22) Un trapezio isoscele è inscritto in una circonferenza di diametro $2r$. Determinarne le basi sapendo che esse hanno distanze dal centro una doppia dell'altra, e che la differenza dei loro quadrati misura $\frac{4}{3}r^2$.

SOLUZIONI

- 1) base = 4 cm e altezza = 15 cm oppure base = 5 cm e altezza = 12 cm
- 2) lato obliquo = 5 cm, base = 6 cm, area = 12 cm^2 ,
oppure lato obliquo = $\text{cm } \frac{17}{3}$, base = $\text{cm } \frac{14}{3}$, area = $\text{cm}^2 \frac{28}{9}\sqrt{15}$
- 3) $a/3$ oppure $a/2$
- 4) 1,5 cm (si trova anche un'altra soluzione, $x = 9$, evidentemente non accettabile)
- 5) area = 152 cm^2 (base maggiore = cm 22, altezza = cm 8),
oppure area = 120 cm^2 (base maggiore = cm 24, altezza = cm 6)
- 6) $AC = 13 \text{ cm}$ oppure $AC = 15,8 \text{ cm}$
- 7) $AP = 2 \text{ cm}$ oppure $AP = 8 \text{ cm}$
- 8) Può misurare 1 cm oppure 3 cm
- 9) Porre altezza = x ;
altezza = 5 cm, base = 24 cm, lato obliquo = 13 cm,
oppure: altezza = 21 cm, base = 40 cm, lato obliquo = 29 cm
- 10) Posto $x =$ altezza, si trova:
 $x = -8$ (soluzione ovviamente non accettabile, in quanto non avrebbe senso un'altezza negativa)
oppure $x = 6$ (da cui: base minore = 12 cm, base maggiore = 20 cm)
- 11) Posto $AP = x$, si trova: $x = 8 \vee x = -1$
In questo caso anche la soluzione negativa è accettabile: corrisponde ad una situazione in cui il punto P si trova, non sul segmento AB, ma sul suo prolungamento dalla parte di A.
Il testo del problema richiedeva che il punto P si trovasse sulla RETTA AB, non sul SEGMENTO AB.
Se il testo avesse invece parlato del SEGMENTO AB, la soluz. negativa non sarebbe stata accettabile.
- 12) Posto $x =$ altezza, si trova $x = -\frac{7}{2}a$ (non accettabile) oppure $x = 4a$ (da cui: $2p = 20a$)
- 13) Posto $AP = x$, si trova $x = 3k$ (l'altra soluzione $x = 12k$ non è accettabile, perché P andrebbe a cadere fuori dal segmento AB, mentre il testo dice che deve cadere all'interno).
- 14) Indicata con x la misura incognita di uno dei cateti, si trova
 $x = 6b$ (e quindi: altro cateto = $21b$) oppure $x = 21b$ (e quindi: altro cateto = $6b$)
Perciò, in questo caso, sebbene l'equazione risolvente abbia due soluzioni distinte, in pratica esiste un solo triangolo che risolve il problema: quello i cui cateti misurano $6b$ e $21b$.
- 15) Le due parti misurano: una $4a$ e l'altra $8a$.
- 16) Si trova un'equazione risolvente con $\Delta = 0$, quindi con due soluzioni coincidenti (se si preferisce: una sola soluzione). Le basi misurano 15 cm e 5 cm.
- 17) L'equazione risolvente ammette due soluzioni distinte, da cui si traggono come valori per le basi
 $5(3 - \sqrt{5})$, $5(1 + \sqrt{5})$
in quanto l'altra coppia $5(3 + \sqrt{5})$, $5(1 - \sqrt{5})$ non è accettabile, essendo $5(1 - \sqrt{5}) < 0$.
- 18) $AH = 2a$, $CH = 6a$, $HB = 18a \rightarrow 2p(ABC) = 4a(5 + 2\sqrt{10})$
oppure $AH = 4a$, $CH = 8a$, $HB = 16a \rightarrow 2p(ABC) = 4a(5 + 3\sqrt{5})$
- 19) $AP = \frac{r}{5}$ 20) base min. = r 21) base min. = $\frac{2}{3}r$ 22) base magg. = $\frac{4}{3}r\sqrt{2}$, base min. = $\frac{2}{3}r\sqrt{5}$

PROBLEMI CON TRIANGOLI RETTANGOLI PARTICOLARI - ESEMPI SVOLTI

- Sul lato AB del triangolo ABC, rettangolo in $\hat{A}$ e isoscele, si costruisce il triangolo equilatero ABD. E' noto che $BC = 4$ cm ; si desidera determinare perimetro e area del quadrilatero ACBD.



Innanzitutto, il triangolo ABC, essendo rettangolo e isoscele, ha gli angoli acuti di 45° .

$$AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm, e allora anche } AD = DB = 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Tracciata l'altezza DH di ABD, avremo $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ cm}$

ed essendo AHD un triangolo rettangolo "particolare" ($90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$) sarà: $HD = AH\sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \text{ cm}$.

Ora $2p(ACBD) = 4 + 3 \cdot 2\sqrt{2} = 4 + 6\sqrt{2} = 2(2 + 3\sqrt{2}) \text{ cm}$ e, per quanto riguarda l'area,

$$S(ACBD) = S(ABC) + S(ABD) = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} = 2 \cdot 2 + \sqrt{12} = 4 + 2\sqrt{3} = 2(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

- Un triangolo ABC ha i due angoli di vertice A e B che misurano 45° e 30° rispettivamente. Si sa che il perimetro del triangolo misura $2a(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$. Quanto misura la sua area?

Tracciando l'altezza CH relativa ad AB il triangolo ABC ne risulta spezzato in due triangoli rettangoli "particolari" ...

Per questo problema, è necessario porre una incognita, e conviene scegliere $CH = x$.

Si avrà

$$AH = CH = x,$$

$$\text{poi } AC = x\sqrt{2} \text{ (AHC : } 90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$$

$$\text{e } CB = 2x, HB = x\sqrt{3} \text{ (CHB : } 90^\circ, 30^\circ, 60^\circ)$$

Equazione risolvente:

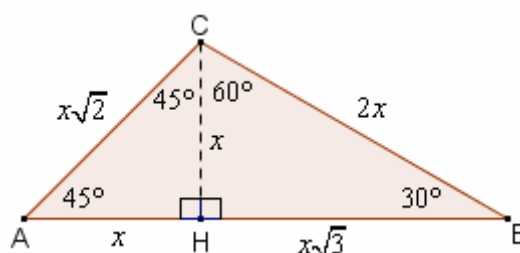
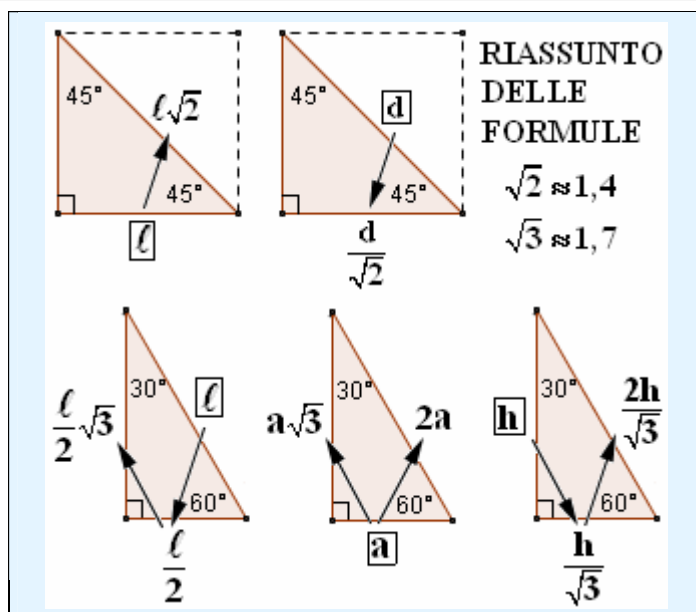
$$x\sqrt{2} + x + x\sqrt{3} + 2x = 2a(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2});$$

$$x\sqrt{2} + x\sqrt{3} + 3x = 2a(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2});$$

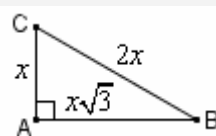
$$x(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3) = 2a(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\text{da cui } CH = 2a, AB = 2a + 2a\sqrt{3} = 2a(1 + \sqrt{3})$$

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{2a(1 + \sqrt{3}) \cdot 2a}{2} = 2a^2(1 + \sqrt{3})$$



Un errore che si può commettere in problemi di questo tipo è di esprimere tutti e tre i lati di un triangolo rettangolo "particolare" con l'uso delle formule, poi applicare Pitagora per impostare l'equazione risolvente. Purtroppo però l'equazione così ottenuta ... non porta da nessuna parte perché è indeterminata! Infatti le formule stesse sono state ricavate tramite il teorema di Pitagora, quindi il procedimento equivale a riutilizzare la stessa informazione per due volte!!!



$$x^2 + (x\sqrt{3})^2 = (2x)^2$$

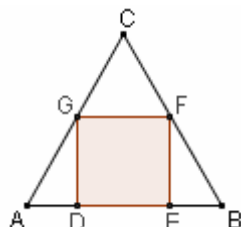
$$x^2 + 3x^2 = 4x^2$$

$$4x^2 = 4x^2 \text{ INDETERMINATA! } \odot$$

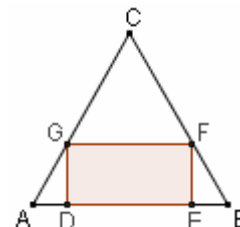
❑ **PROBLEMI CON TRIANGOLI RETTANGOLI “PARTICOLARI”** ($90^\circ/30^\circ/60^\circ$, $90^\circ/45^\circ/45^\circ$)

- 1) ➡ Nel triangolo ABC è $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, e l'altezza CH misura cm 6. Trova perimetro e area di ABC.
- 2) Un trapezio isoscele ABCD ha gli angoli adiacenti alla base maggiore AB uguali a 60° , e $AD = DC = CB = 10$ cm. Determinarne perimetro e area.
- 3) Calcolare perimetro e area di un trapezio rettangolo ABCD, in cui altezza e base minore sono uguali, l'angolo acuto $\hat{B}$ misura 30° , e la diagonale minore AC è lunga $a\sqrt{6}$.
- 4) ➡ Sapendo che in un triangolo di area $8k^2\sqrt{3}$ due lati sono uno il doppio dell'altro e formano un angolo di 120° , determinare il terzo lato.
- 5) Il triangolo isoscele ABC ha la base maggiore AB che supera di 1 cm il lato obliquo. Determina i lati di ABC, sapendo che la somma delle aree dei tre triangoli equilateri costruiti sui suoi lati vale $\text{cm}^2 \frac{43}{2}\sqrt{3}$.
- 6) ➡ Sul lato AB di un triangolo equilatero ABC si prende il punto P tale che sia $AP = 2PB$. Da P si traccia poi la parallela al lato BC, fino ad incontrare il lato AC in Q. Determinare il lato del triangolo equilatero in modo che la diagonale del trapezio BCQP misuri $a\sqrt{7}$.

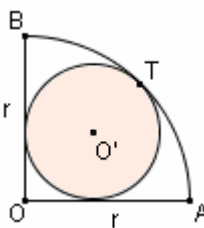
- 7) Quanto misura il lato del quadrato inscritto (vedi figura) in un triangolo equilatero di lato 1 m?



- 8) In un triangolo equilatero di lato unitario, si inscrive (vedi figura) un rettangolo la cui base è doppia dell'altezza. Quanto misura l'area del rettangolo?



- 9) Dato un segmento AB di lunghezza a, determinare al suo interno un punto P in modo che, costruiti (dalla stessa parte rispetto ad AB) i due triangoli equilateri APC e PBD, e congiunto C con D, il triangolo CPD risulti $\frac{3}{16}$ del triangolo equilatero di lato AB.
- 10) Disegna un triangolo equilatero ABC il cui lato misuri ℓ . In ABC inscrivi un rettangolo DEFG (la base DE del rettangolo è una parte del segmento AB; F sta su BC, G sta su CA). Traccia le diagonali DF, EG del rettangolo e indica con O il punto in cui si tagliano. Determina ora il segmento $AD = x$ in modo che la somma dei quadrati dei lati del triangolo DOG misuri $\ell^2/2$.
- 11) Sulla diagonale AC di un quadrato ABCD, di lato $4a$, determinare un punto P in modo che il quadrilatero ABPD sia equivalente ad un triangolo equilatero, avente il lato uguale al lato del quadrato.
- 12) All'interno di un quadrato ABCD di lato ℓ si disegna il triangolo equilatero ABE. La diagonale AC del quadrato taglia il segmento BE in F. Quanto misurano i due segmenti FB, FE?
- 13) Quanto misura il raggio di un cerchio, inscritto in un quadrante (= quarta parte di cerchio: vedi figura) di raggio r?



♥ Controlla sempre se il valore della soluzione da te trovata è “plausibile”, cioè se può andar d'accordo con le misure nella figura, tenendo conto che $\sqrt{2} \approx 1,4$ e $\sqrt{3} \approx 1,7$

- 14) E' dato un triangolo equilatero ABC di lato ℓ . Sul lato AB si prenda un punto P tale che, dette H e K le proiezioni di P su CA e su CB rispettivamente, il triangolo PHK sia equivalente a $\frac{1}{6}$ di ABC.

SOLUZIONI

- 1) $2p = \text{cm } 6(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$; $S = \text{cm}^2 6(\sqrt{3} + 3)$ 2) $2p = \text{cm } 50$, $S = \text{cm}^2 75\sqrt{3}$
- 3) $2p = a(3 + 5\sqrt{3})$; $S = \frac{3}{2}a^2(2 + \sqrt{3})$ 4) $4k\sqrt{7}$ 5) $CA = CB = 5$ cm, $AB = 6$ cm
- 6) $3a$ 7) lato quadrato = $m(2\sqrt{3} - 3)$ 8) $S = \frac{3}{4}(2 - \sqrt{3})$ 9) $AP = \frac{1}{4}a \vee AP = \frac{3}{4}a$
- 10) $x = \frac{4}{13}\ell \vee x = 0$ (soluz. "degenere", quest'ultima, che sta alla nostra discrezione di accettare o scartare)
- 11) $AP = a\sqrt{6}$ 12) $FB = \ell(\sqrt{3} - 1)$; $FE = \ell(2 - \sqrt{3})$ 13) $r(\sqrt{2} - 1)$ 14) $AP = \frac{1}{3}\ell \vee AP = \frac{2}{3}\ell$

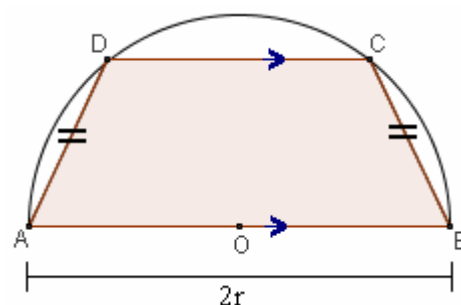
PROBLEMI GEOMETRICI CON EQUAZIONE RISOLVENTE IRRAZIONALE

ESEMPIO SVOLTO

- In una semicirconferenza di diametro $2r$,
 inscrivere un trapezio isoscele di perimetro $\frac{19}{4}r$.

Si può interpretare come un “problema IN MODO CHE”:

“in una semicirconferenza di diametro $2r$,
 inscrivere un trapezio isoscele
 in modo che il perimetro di tale trapezio misuri $\frac{19}{4}r$ ”.



Ma *che cosa* domanda, in definitiva, il problema?

Che cosa intende che noi dobbiamo determinare?

Beh, il problema ci richiede di determinare un segmento, noto il quale sia

individuato in modo univoco quel trapezio isoscele inscritto, il cui perimetro valga proprio $\frac{19}{4}r$.

L'incognita dev'essere dunque “un elemento che individui la figura”,
 ossia un segmento a partire dal quale la figura sia tracciabile senza alcuna ambiguità.

*Nel caso dei problemi sulla semicirconferenza, l'esperienza mostra che
 è conveniente, di norma, porre come incognita un segmento giacente sul diametro.*

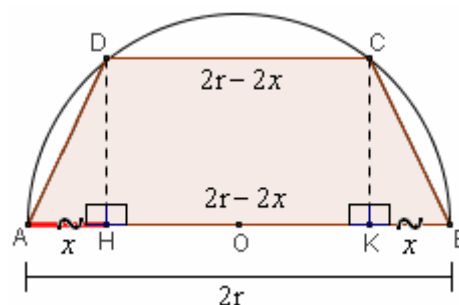
Ad esempio, **un'ottima scelta è porre $AH = x$** .

Ora si tratta di esprimere, in funzione della x scelta,
 i segmenti che compaiono nel perimetro
 (a parte, ovviamente, AB che è già noto e vale $2r$).

Abbiamo subito

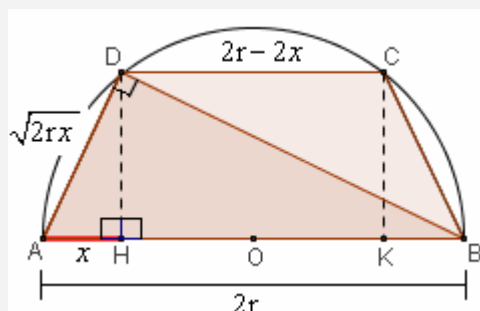
$DC = HK = AB - (AH + KB) = AB - 2AH = 2r - 2x$,
 e così la base minore è “sistemata”.

Per quanto riguarda il **lato obliquo**,
 possiamo procedere in **due modi**:



I° modo

Tracciamo la congiungente DB .

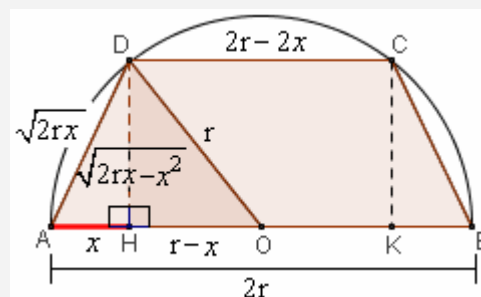


$\hat{A}DB = 90^\circ$ perché inscritto in una semicirconferenza!
 Dunque il triangolo ADB è rettangolo,
 DH ne è l'altezza relativa all'ipotenusa,
 e possiamo applicare il 1° Teorema di Euclide
 ottenendo:

$$AD = \sqrt{AB \cdot AH} = \sqrt{2r \cdot x}$$

II° modo

Tracciamo il raggio OD .



Dapprima, con Pitagora su OHD , otteniamo :

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{OD^2 - OH^2} = \sqrt{r^2 - (r - x)^2} = \\ &= \sqrt{\cancel{r^2} - \cancel{r^2} + 2rx - x^2} = \sqrt{2rx - x^2} \end{aligned}$$

poi, nuovamente con Pitagora ma su AHD ,

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{2rx - x^2})^2} = \\ &= \sqrt{\cancel{x^2} + 2rx - \cancel{x^2}} = \\ &= \sqrt{2rx} \end{aligned}$$

Bene!

In un modo o nell'altro, si trova dunque sempre $AD = \sqrt{2rx}$.

Scriviamo ora l'**equazione risolvente**:

$$AB + DC + 2AD = \frac{19}{4}r \quad \underbrace{2r}_{AB} + \underbrace{2r - 2x}_{DC} + 2\underbrace{\sqrt{2rx}}_{AD} = \frac{19}{4}r$$

$$\boxed{4r - 2x + 2\sqrt{2rx} = \frac{19}{4}r} \quad \text{equazione risolvente (irrazionale)}$$

$$16r - 8x + 8\sqrt{2rx} = 19r$$

$$8\sqrt{2rx} = 3r + 8x$$

$$(8\sqrt{2rx})^2 = (3r + 8x)^2$$

$$128rx = 9r^2 + 48rx + 64x^2$$

$$64x^2 - 80rx + 9r^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{40r \pm \sqrt{1600r^2 - 576r^2}}{64} = \frac{40r \pm \sqrt{1024r^2}}{64} = \frac{40r \pm 32r}{64} = \begin{cases} \frac{8r}{64} = \frac{1}{8}r \\ \frac{72}{64}r > r \text{ non accettabile} \end{cases}$$

ACCETTABILITA' GEOMETRICA

La soluzione $x = \frac{72}{64}r = \frac{9}{8}r$ non è geometricamente accettabile, perché maggiore del raggio r .

Quando poniamo un'incognita in un problema, dovremmo sempre pensare ai “confini” (molti scrivono “limiti”, con scelta a mio avviso infelice perché questa parola è solitamente usata, in matematica, con un altro significato) **cui è soggetta l'incognita stessa.**

Nel nostro caso, abbiamo posto $x = AH$ e, dato che il punto “mobile” H può, evidentemente, “viaggiare” soltanto fra l'estremo A e il centro O , dovrà essere $0 \leq x \leq r$.

(Osserviamo per inciso che un'eventuale soluzione $x = 0$ o $x = r$ andrebbe valutata con attenzione, per decidere se accettarla o meno, perché corrisponderebbe a una figura “degenere”)

ACCETTABILITA' ALGEBRICA

Resta ora ancora aperta la questione legata all'equazione irrazionale.

E' noto che nel caso di un'equazione irrazionale con radicali di indice pari, le soluzioni trovate alla fine potrebbero essere non accettabili.

Sottoponiamo dunque la soluzione “sopravvissuta” $x = r/8$ alla “verifica di accettabilità”, sostituendola nell'equazione di partenza per stabilire se effettivamente la soddisfa:

$$4r - 2x + 2\sqrt{2rx} = \frac{19}{4}r$$

$$\text{Con } x = \frac{1}{8}r: \quad 4r - 2 \cdot \frac{1}{8}r + 2\sqrt{2r \cdot \frac{1}{8}r} = \frac{19}{4}r; \quad 4r - \frac{1}{4}r + 2\sqrt{\frac{1}{4}r^2} = \frac{19}{4}r;$$

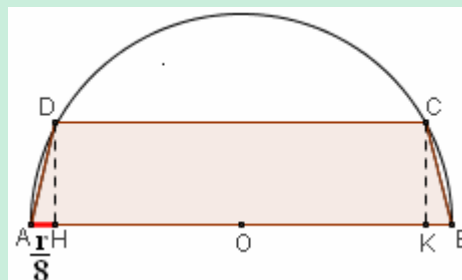
$$4r - \frac{1}{4}r + 2 \cdot \frac{1}{2}r = \frac{19}{4}r; \quad 4r - \frac{1}{4}r + r = \frac{19}{4}r; \quad \frac{19}{4}r = \frac{19}{4}r \quad \boxed{\text{OK}}$$

♥ LA “VERA” VERIFICA (figura qui a destra)

Va detto che, indipendentemente dal fatto che l'equazione risolvente sia o non sia irrazionale, **la verifica più completa e sicura della soluzione trovata per un qualsivoglia problema, geometrico o non, andrebbe fatta** (ed è sempre molto utile e istruttivo)

andando a calcolare, per il valore di x trovato, le varie quantità in gioco, al fine di stabilire se effettivamente la richiesta del problema è soddisfatta.

Nel nostro caso, tale verifica “globale” consiste nel disegnare nuovamente la figura, prendendo $AH = r/8$, e nel calcolare le corrispondenti misure dei lati di $ABCD$, per controllare che il suo perimetro abbia proprio il valore desiderato.

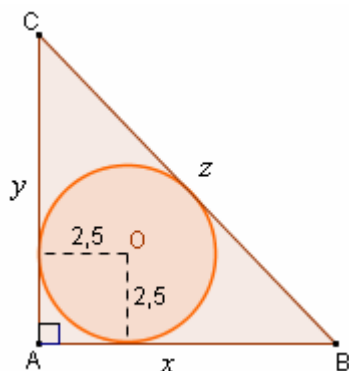


... si trova: base min. = $\frac{7}{4}r$, lato obliquo = $\frac{r}{2}$

e il perimetro è proprio $\frac{19}{4}r$, **OK !!!**

PROBLEMI RISOLUBILI CON UN SISTEMA - ESEMPIO SVOLTO

- Determinare i lati di un triangolo rettangolo sapendo che il suo perimetro è 30 cm, e che il raggio del cerchio inscritto misura cm 2,5.



$$\begin{aligned}\widehat{BAC} &= 90^\circ \\ 2p(ABC) &= 30 \text{ cm} \\ r &= 2,5 \text{ cm} \\ AB = ? \quad AC = ? \quad BC = ?\end{aligned}$$

La risoluzione con più incognite, e quindi col sistema, è consigliata quando non è semplice esprimere tutte le quantità in gioco mediante una sola di esse; specialmente se si prevede che il sistema impostato sarà poi algebricamente facile da risolvere.

Converrà utilizzare 3 incognite: $AB = x$, $AC = y$, $BC = z$

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x + y = z + 2 \cdot 2,5 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

In un triangolo rettangolo, la somma dei cateti supera l'ipotenusa di un segmento uguale al diametro del cerchio inscritto

La terza condizione (qui si hanno 3 incognite: possibilmente, si devono porre 3 condizioni) è in questo caso la *relazione pitagorica*!

$$(1) \begin{cases} x + y = z + 5 \\ (z + 5) + z = 30; \quad 2z = 25; \quad z = \frac{25}{2} \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{25}{2} \\ x + y = \frac{25}{2} + 5; \quad x + y = \frac{35}{2} \\ x^2 + y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2; \quad x^2 + y^2 = \frac{625}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{25}{2} \\ x + y = \frac{35}{2} \\ (x + y)^2 - 2xy = \frac{625}{4}; \quad \left(\frac{35}{2}\right)^2 - 2xy = \frac{625}{4}; \quad \frac{1225}{4} - 2xy = \frac{625}{4}; \quad -2xy = -\frac{600}{4}; \quad xy = 75 \end{cases}$$

Equazione per determinare due numeri sapendo che la loro somma è $s = \frac{35}{2}$ e il loro prodotto è $p = 75$:

$$t^2 - \frac{35}{2}t + 75 = 0; \quad 2t^2 - 35t + 150 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{4} = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{35 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{30}{4} = \frac{15}{2} \\ \frac{40}{4} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 25/2 \\ x = 15/2 \\ y = 10 \end{cases} \vee \begin{cases} z = 25/2 \\ x = 10 \\ y = 15/2 \end{cases}$$

quindi, in definitiva,
i cateti misureranno cm 10 e cm $15/2 = 7,5$
e l'ipotenusa cm $25/2 = 12,5$

Le **equazioni** che formano il sistema devono, in generale, essere **tante quante le incognite**.

In caso contrario il sistema sarà, almeno in generale,

- *impossibile* se si hanno più equazioni che incognite,
- *indeterminato* se si hanno più incognite che equazioni.

Ma nei problemi “scolastici” la norma è, ribadiamolo, che si abbiano tante equazioni quante incognite.

Attenzione, nello scrivere il sistema, a non “riciclare” due volte la stessa informazione:

in tal caso, infatti, c'è da aspettarsi che il sistema risulti *indeterminato*.

❑ PROBLEMI GEOMETRICI CON EQUAZIONE RISOLVENTE IRRAZIONALE

- 1) Un rettangolo è inscritto in una semicirconferenza di raggio 1.
 - a) Esprimi l'area del rettangolo in funzione della lunghezza x della semibase
 - b) Determina x in modo che l'area del rettangolo stesso valga 1
 - c) Esprimi il perimetro del rettangolo in funzione della lunghezza x della semibase
 - d) Determina x in modo che il perimetro del rettangolo stesso valga 4
 - e) Quanto misura il lato del QUADRATO inscritto nella semicirconferenza?
- 2) ⇨ In un triangolo isoscele la somma di base e altezza è 11 cm, e il perimetro è di 18 cm. Trovare l'area.
- 3) Una circonferenza di centro O ha diametro $AB = 2r$; una seconda circonf. ha come diametro AO. Si determini sul diametro AO della circonferenza minore un punto P tale che, tracciata per P la perpendicolare ad AO, sulla quale la circonferenza minore stacca la corda CD e la maggiore stacca la corda EF, si abbia $CD + EF = 2r$.
- 4) Due circonferenze di ugual raggio (di misura $5a$), hanno i centri che distano $14a$ l'uno dall'altro. Determina la misura del lato di un quadrato, avente due lati paralleli alla retta dei centri, due vertici su una delle due circonferenze e due vertici sull'altra.
- 5) ⇨ In una semicirconferenza di raggio r , inscrivere un trapezio isoscele di perimetro $4r$ (soluzione "strana" ...)
- 6) ⇨ In una semicirconferenza di raggio unitario, inscrivere un trapezio isoscele di area unitaria (poni $x = \text{proiezione del lato obliquo sulla base maggiore}$; equazione irrazionale, poi di 4° grado; Ruffini + risoluzione grafica)

❑ PROBLEMI GEOMETRICI RISOLUBILI TRAMITE UN SISTEMA DI EQUAZIONI

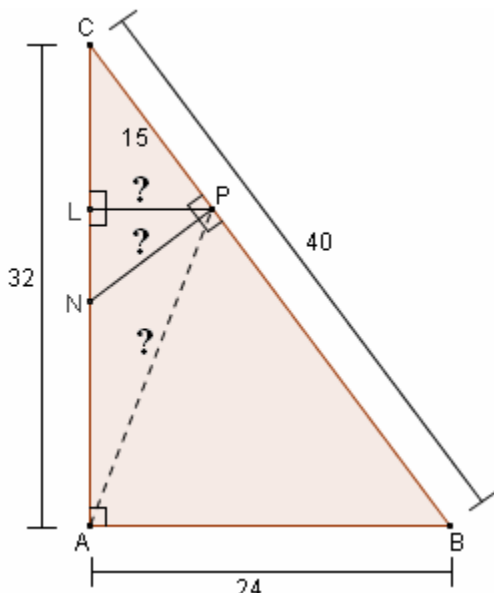
- 7) ⇨ Determinare i lati di un triangolo rettangolo in cui la somma dei cateti misura $23a$ e l'area $60a^2$.
- 8) Determinare i lati di un triangolo rettangolo in cui il perimetro misura 60ℓ e l'ipotenusa 26ℓ .
- 9) Determinare i lati di un triangolo rettangolo sapendo che la sua area misura 84cm^2 mentre l'ipotenusa è lunga 25 cm .
- 10) Determinare i lati di un triangolo rettangolo conoscendo il raggio r del cerchio inscritto ($r = 4\text{ cm}$) e il raggio R del cerchio circoscritto ($R = 10\text{ cm}$).
- 11) ⇨ Determinare i lati di un triangolo rettangolo conoscendone il perimetro (60 cm) e l'altezza relativa all'ipotenusa (12 cm).
- 12) ⇨ Determinare i lati di un triangolo ABC rettangolo in A sapendo che, dette AH e AM l'altezza e la mediana relative all'ipotenusa, il perimetro e l'area del triangolo AHM sono rispettivamente di $\text{cm } 56$ e di $\text{cm}^2 84$.
- 13) ⇨ Determinare i cateti di un triangolo rettangolo sapendo che la sua ipotenusa e la sua altezza relativa all'ipotenusa misurano, rispettivamente, $2\sqrt{5}$ e $\frac{4}{5}\sqrt{5}$.
- 14) Determinare le misure dei lati di un triangolo rettangolo la cui area misura 54cm^2 e nel quale è inscritto un cerchio di raggio 3 cm .

SOLUZIONI

- 1) a) $S = 2x\sqrt{1-x^2}$ b) $x = \sqrt{2}/2$ c) $2p = 4x + 2\sqrt{1-x^2}$ d) $x = 3/5 \vee \underbrace{x=1}_{\substack{\text{soluzione} \\ \text{"degenere"}}$ e) lato quadrato $= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- 2) $S = 15\text{ cm}^2$ oppure $S = 12\text{ cm}^2$ 3) $r/5$; r (soluz. "degenere") 4) Lato quadrato $= 6a$ oppure $8a$
- 5) L'unica soluz. è il "trapezio degenere" le cui due basi coincidono col diametro, e avente altezza nulla.
- 6) $x = 1 \vee$ (risol. grafica) $x \approx 0,16$
- 7) $8a, 15a, 17a$ 8) $10\ell, 24\ell, 26\ell$ 9) $7\text{ cm}, 24\text{ cm}, 25\text{ cm}$ 10) $12\text{ cm}, 16\text{ cm}, 20\text{ cm}$
- 11) $15\text{ cm}, 20\text{ cm}, 25\text{ cm}$ 12) $\text{cm } 30, \text{cm } 40, \text{cm } 50$ oppure: $\text{cm } 5\sqrt{2}, \text{cm } 35\sqrt{2}, \text{cm } 50$
- 13) Le misure dei cateti sono: 2 e 4 14) $9, 12, 15\text{ cm}$

PROBLEMI CON LE SIMILITUDINI - ESEMPI SVOLTI

- a) In un triangolo rettangolo ABC i due cateti AB e AC misurano rispettivamente 24 cm e 32 cm. Sull'ipotenusa BC si prende un segmento CP = 15 cm e per P si tracciano:
- la perpendicolare ad AC, fino ad incontrare AC in L
 - e la perpendicolare a BC, fino ad incontrare AC in N.
- Quanto misurano i tre segmenti PL, PN, PA?



$\widehat{BAC} = 90^\circ$
 $AB = 24 \text{ cm}$
 $AC = 32 \text{ cm}$
 $CP = 15 \text{ cm}$
 $PL \perp AC$
 $PN \perp BC$

$PL = ?$
 $PN = ?$
 $PA = ?$

TIENI SEMPRE PRESENTE CHE

♥ In due triangoli simili,
 sono corrispondenti
 ("omologhi")
 due lati che stiano opposti
 ad angoli uguali,
 o allo stesso angolo

$$BC_{\text{Pitagora}} = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = \sqrt{576 + 1024} = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm}$$

(Vedi anche l'approfondimento sulle TERNE PITAGORICHE di pag. 205)

LPC ~ ABC (rettangoli, $\widehat{C}$ in comune)

PL : AB = PC : BC
 (un lato
 sta al suo corrispondente,
 come un altro lato
 sta al suo corrispondente)

$$PL : 24 = 15 : 40$$

$$\boxed{PL} = \frac{24^3 \cdot 15^3}{40^3} = \boxed{9 \text{ cm}}$$

oppure **PL : PC = AB : BC**
 (un lato sta a un altro lato
 - sempre nello stesso triangolo -
 come il corrispondente del primo
 sta al corrispondente del secondo)

$$PL : 15 = 24 : 40$$

$$\boxed{PL} = \frac{15^3 \cdot 24^3}{40^3} = \boxed{9 \text{ cm}}$$

NOTA

Nei due triangoli considerati, i due lati PL ed AB si corrispondono perché sono i due cateti minori, oppure: perché stanno opposti allo stesso angolo

PNC ~ ABC (rettangoli, $\widehat{C}$ in comune)

PN : AB = PC : AC
 (un lato
 sta al suo corrispondente,
 come un altro lato
 sta al suo corrispondente)

$$PN : 24 = 15 : 32$$

$$\boxed{PN} = \frac{24^3 \cdot 15}{32^3} = \boxed{\frac{45}{4} \text{ cm}}$$

oppure **PN : PC = AB : AC**
 (un lato sta a un altro lato
 - sempre nello stesso triangolo -
 come il corrispondente del primo
 sta al corrispondente del secondo)

$$PN : 15 = 24 : 32$$

$$\boxed{PN} = \frac{15 \cdot 24^3}{32^3} = \boxed{\frac{45}{4} \text{ cm}}$$

NOTA

Nei due triangoli considerati, i due lati PN ed AB si corrispondono perché sono i due cateti minori, oppure: perché stanno opposti allo stesso angolo

Per quanto riguarda PA, lo ricaveremo con Pitagora su APL, dopo aver calcolato AL:

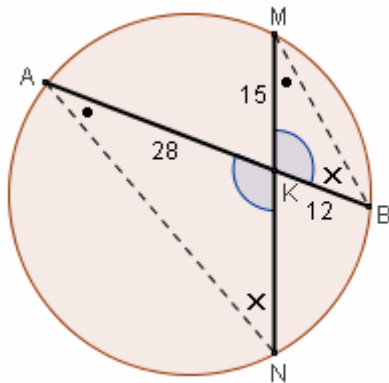
$$CL = \sqrt{PC^2 - PL^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$AL = AC - CL = 32 - 12 = 20 \text{ cm}$$

$$\boxed{PA} = \sqrt{AL^2 + PL^2} = \sqrt{20^2 + 9^2} = \sqrt{400 + 81} = \boxed{\sqrt{481} \text{ cm}}$$

♥ Il simbolo
 "simile con"
 è un serpentello:
 ~

- b) Due corde AB, MN di una stessa circonferenza si intersecano nel punto K.
Determinare la lunghezza della corda MN sapendo che $AK = m\ 28$, $KB = m\ 12$ e $KM = m\ 15$.



$$AK = m\ 28$$

$$KB = m\ 12$$

$$KM = m\ 15$$

$$MN = ?$$

Tracciamo i due segmenti AN e BM e **consideriamo i due triangoli AKN, MKB**.

Essi sono simili, in quanto

- $\hat{A} = \hat{M}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\widehat{BN}$
- $\hat{N} = \hat{B}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\widehat{AM}$
- $\hat{AKN} = \hat{MKB}$ perché opposti al vertice (oppure per differenza rispetto a 180° nei due triangoli)

Quindi

$$NK : KB = AK : KM$$

(un lato
sta al suo corrispondente,
come un altro lato
sta al suo corrispondente;
vedi NOTA)

$$NK : 12 = 28 : 15$$

$$\boxed{NK} = \frac{12^4 \cdot 28}{15^4} = \boxed{m\ \frac{112}{5}}$$

oppure

$$NK : AK = KB : KM$$

(un lato
sta a un altro lato
- sempre nello stesso triangolo -
come il corrispondente del primo
sta al corrispondente del secondo;
vedi NOTA)

$$NK : 28 = 12 : 15$$

$$\boxed{NK} = \frac{28 \cdot 12^4}{15^4} = \boxed{m\ \frac{112}{5}}$$

$$\text{Dopodiché, } \boxed{MN} = MK + NK = 15 + \frac{112}{5} = \boxed{m\ \frac{187}{5} = m\ 37,4}$$

NOTA

Nei due triangoli considerati,
i due lati NK e KB
si corrispondono
perché stanno opposti
ad angoli uguali
(i due angoli “puntino”).

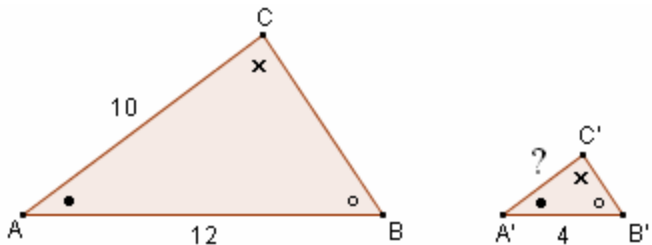
Analogamente
sono corrispondenti
(sinonimo: “omologhi”)
AK e KM,
opposti ad angoli “crocetta”.

OSSERVAZIONE GENERALE, DI CARATTERE “PRATICO”

L'abbiamo già detto, ma lo ripetiamo perché è davvero importante.

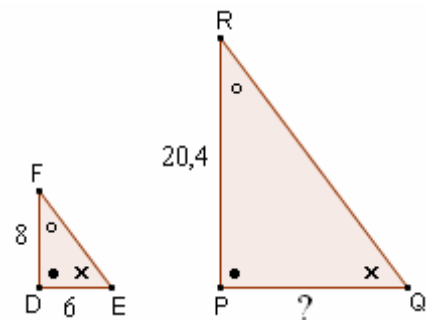
Nell'operare con le proporzioni, conviene tenere presente che spesso si può risparmiare molto tempo.

Sovente si dimentica cosa significa, nel concreto, avere DUE RAPPORTI UGUALI!



Osservando che $A'B'$ è la terza parte di AB ,
avremo subito che $A'C'$ sarà la terza parte di AC ,

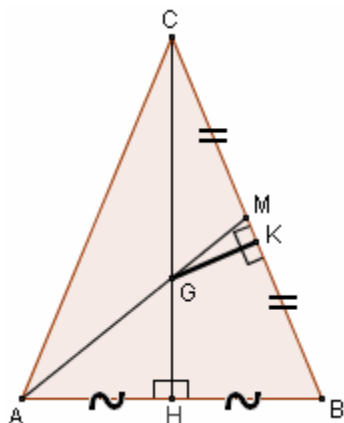
$$\text{cioè } A'C' = \frac{10}{3} !$$



Così come DE è $\frac{3}{4}$ di FD ,
il lato PQ sarà $\frac{3}{4}$ di PR .

$$\text{Quindi } PQ = \frac{3}{4} \cdot 20,4 = 15,3$$

c) Quanto misura la distanza del baricentro dal lato obliquo in un triangolo isoscele di perimetro 72 cm, nel quale il lato obliquo supera la base di 6 cm?



$$\begin{aligned} CA &= CB = \\ &= AB + 6 \text{ cm} \\ 2p(ABC) &= 72 \text{ cm} \\ AH &= HB \\ BM &= MC \\ GK &\perp BC \\ GK &= ? \end{aligned}$$

Un baricentro si indica preferibilmente con la lettera G (da "Gravity center", centro di gravità). Infatti il punto di incontro delle mediane di un triangolo viene chiamato "baricentro" (dal termine greco *báros* = peso) perché coincide col "baricentro fisico" del triangolo, ossia col punto di applicazione della risultante delle forze peso agenti sulle varie parti del triangolo, se questo fosse realizzato in materiale rigido. Ritagliando un triangolo nel cartoncino, se ne disegni le mediane, e poi appoggi il triangolo (collocandolo orizzontalmente) sopra un piccolo sostegno piazzato in corrispondenza del punto di incontro delle mediane stesse, vedrai che il triangolo sta in equilibrio. Provac!

Inizialmente è necessario porre un'incognita, per determinare, tramite un'equazioncina, base e lato obliquo.

$$AB = x, \quad CA = CB = x + 6$$

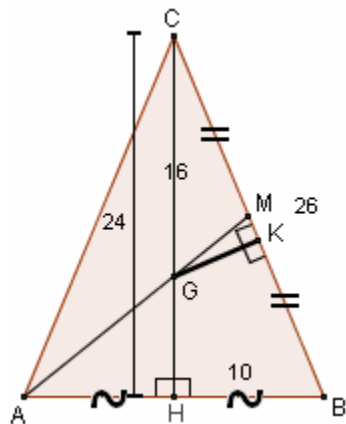
$$2p = 72 \text{ cm}$$

$$x + 2(x + 6) = 72$$

$$x + 2x + 12 = 72; \quad 3x = 60; \quad x = 20$$

$$AB = 20 \text{ cm}, \quad CA = CB = 26 \text{ cm}, \quad AH = HB = 20/2 = 10 \text{ cm}$$

$$CH = \sqrt{CB^2 - HB^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} \stackrel{\text{NOTA}}{=} \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$



Ora $CKG \sim CHB$ (rettangoli, $\hat{HCB}$ in comune)

quindi potremo determinare GK sfruttando questa similitudine, a patto però di riuscire prima a stabilire la misura del segmento CG.

Ma a tale scopo basta ricordare la nota proprietà del baricentro:

"il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, delle quali quella contenente il vertice è doppia dell'altra".

$$\text{Pertanto: } CG = \frac{2}{3}CH = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16 \text{ cm}$$

$$CKG \sim CHB$$

$$GK : HB = CG : CB; \quad GK : 10 = 16 : 26; \quad \boxed{GK = \frac{10 \cdot 16}{26} = \frac{80}{13} \text{ cm}}$$

NOTA

Un modo brillante

per svolgere il calcolo sarebbe qui di scomporre la differenza di quadrati in

"somma delle basi moltiplicato

la loro differenza":

$$\sqrt{26^2 - 10^2} =$$

$$= \sqrt{(26+10)(26-10)} =$$

$$= \sqrt{36 \cdot 16} =$$

$$= \sqrt{36} \cdot \sqrt{16} =$$

$$= 6 \cdot 4 = 24$$

PROBLEMI CON LE SIMILITUDINI: LE TIPOLOGIE PIU' COMPLICATE

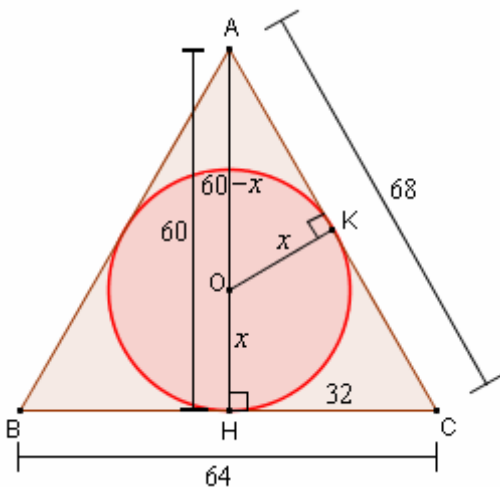
A volte, per risolvere un problema con le similitudini, non è sufficiente impostare una proporzione che abbia noti tre termini su quattro, come negli esempi precedenti: questa è la situazione più elementare, ma non sempre si presenta. Vediamo allora qualche problema più complesso.

Distingueremo fra:

- ♪ problemi in cui la similitudine viene utilizzata per impostare l'equazione risolvente
- ♪ problemi in cui la similitudine viene utilizzata per esprimere un segmento in funzione di x

PROBLEMI IN CUI LA SIMILITUDINE VIENE UTILIZZATA PER IMPOSTARE L'EQUAZIONE RISOLVENTE

- d) Trovare il raggio del cerchio inscritto in un triangolo isoscele di base 64 cm e lato obliquo 68 cm, senza utilizzare la formula per il raggio del cerchio inscritto in un triangolo (che poi sarebbe $r = \text{doppia area/perimetro}$)



$$BC = 64 \text{ cm}$$

$$AB = AC = 68 \text{ cm}$$

$$r = ?$$

$$HC = 64 / 2 = 32 \text{ cm}$$

$$AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{68^2 - 32^2} = \sqrt{(68 + 32)(68 - 32)} = \sqrt{100 \cdot 36} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ cm}$$

$$OK = OH = x \rightarrow AO = 60 - x$$

$\triangle AOK \sim \triangle AHC$ (rettangoli, $\angle CAH$ in comune)

$$OK : HC = AO : AC$$

$$x : 32 = (60 - x) : 68$$

La proporzione scritta, che contiene x due volte, costituisce l'equazione risolvente.

Possiamo liberarci istantaneamente dai denominatori applicando la "proprietà fondamentale":
"una proporzione è corretta se e solo se il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi"

$$32(60 - x) = 68x$$

$$8 \cancel{32} (60 - x) = 17 \cancel{68} x$$

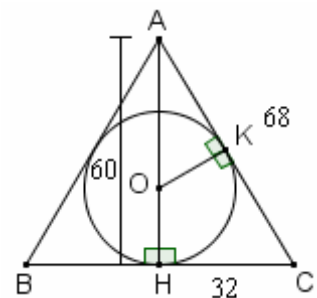
$$480 - 8x = 17x$$

$$5 \cancel{25} x = 96 \cancel{480}$$

$$x = \text{cm } \frac{96}{5} (= \text{cm } 19,2)$$

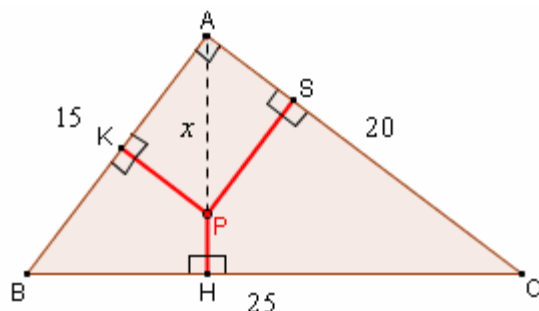
A dire il vero, questo problema avrebbe potuto essere risolto anche senza porre alcuna incognita, bensì impostando una proporzione nella quale fossero noti 3 fra i 4 termini. Infatti, a ben guardare ... quanto misura CK? Poi...

In effetti, a seconda di come si imposta la risoluzione, può darsi che un problema possa rientrare in più d'una delle tipologie che stiamo analizzando.



**PROBLEMI IN CUI LA SIMILITUDINE VIENE UTILIZZATA
PER ESPRIMERE UN SEGMENTO IN FUNZIONE DI x**

- e) Sull'altezza relativa all'ipotenusa BC di un triangolo rettangolo ABC i cui cateti misurano 15 cm e 20 cm, determinare un punto P in modo che la somma delle sue distanze dai tre lati del triangolo rettangolo sia 15,2 cm.



$$\widehat{BAC} = 90^\circ$$

$$AB = 15 \text{ cm}$$

$$AC = 20 \text{ cm}$$

$$AH \perp BC$$

$$PK \perp AB, \quad PS \perp AC$$

$$? P \text{ su } AH / PH + PK + PS = \text{cm } 15,2$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ cm} \quad (\text{formula altezza relativa all'ipotenusa} = \frac{\text{prodotto cateti}}{\text{ipotenusa}})$$

$$AP = x; \quad PH = 12 - x$$

Ci proponiamo ora di esprimere PK in funzione di x .

A tale scopo, sfrutteremo la similitudine

$$\boxed{AKP \sim ABC}$$

(infatti $AKP \sim AHB$ e a sua volta $AHB \sim ABC$)

$$\boxed{PK : AB = AP : BC}$$

$$PK : 15 = x : 25$$

$$PK = \frac{15x}{25} = \frac{3}{5}x \quad (\text{NOTA})$$

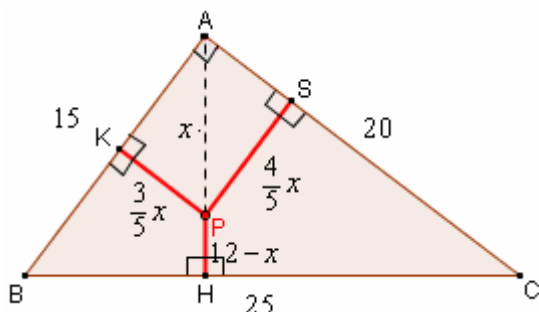
Poi esprimiamo PS in funzione di x .

$$\boxed{ASP \sim ABC} \quad (ASP \sim AHC \sim ABC)$$

$$\boxed{PS : AC = AP : BC}$$

$$PS : 20 = x : 25$$

$$PS = \frac{20x}{25} = \frac{4}{5}x$$



Possiamo a questo punto scrivere l'equazione risolvante:

$$PH + PK + PS = 15,2$$

$$\boxed{12 - x + \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}x = 15,2}$$

$$60 - 5x + 3x + 4x = 76$$

$$2x = 16 \quad x = 8 \quad \boxed{AP = 8 \text{ cm}}$$

♥ NOTA

Avremmo anche potuto procedere
MOLTO PIU' RAPIDAMENTE!

Noi vogliamo mettere in relazione PK
(cateto minore nel triangolo rettangolo AKP)
con x (ipotenusa nello stesso triangolo).

Ma essendo i due triangoli AKP e ABC simili,
questa relazione sarà la medesima relazione
che lega cateto minore e ipotenusa *in ABC*!

E siccome in ABC

le misure di cateto minore e ipotenusa
sono 15 e 25,

quindi il cateto minore è $15/25$

ossia $3/5$ dell'ipotenusa,

lo stesso avverrà anche nel triangolo AKP;
dunque, immediatamente,

$$PK = \frac{3}{5} AP = \frac{3}{5} x$$

❏ PROBLEMI CON LE SIMILITUDINI

A) Problemi in cui la similitudine viene utilizzata semplicemente per fare dei calcoli, senza equazione (NOTA)

NOTA – *Un'equazione potrà eventualmente intervenire in altre fasi della risoluzione del problema, ma quando si sfrutterà la similitudine fra due triangoli per scrivere una proporzione, non sarà necessario impiegare un'incognita.*

1) $\Rightarrow$

E' dato il rettangolo ABCD, in cui la base AB misura 12a e l'altezza AD misura 5a. Sia P un punto, sulla diagonale AC, tale che $PC = 2AP + 4a$; tracciata per P la perpendicolare ad AC che incontri AB in S, si chiede di determinare il perimetro del triangolo APS.

- 2) In un triangolo isoscele ABC, nel quale il lato obliquo supera di 3 cm la base AB e la somma dei quadrati dei tre lati vale 594 cm^2 , si tracci, a partire da A, una semiretta che formi con la base AB un angolo uguale all'angolo $\hat{C}$, e che tagli il lato BC in D. Trovare il perimetro del triangolo ABD.
- 3) Quanto misura la distanza del baricentro dal lato obliquo in un triangolo isoscele di base 2b e altezza h?
- 4) In una semicirconferenza di diametro $AB = \text{cm } 20$, si conducano due corde uguali $AC = BD = \text{cm } 16$, e sia E il loro punto di intersezione. Quant'è la distanza di E dal centro O della semicirconferenza?
- 5) E' dato il triangolo EFG, rettangolo in E, i cui cateti EF e GE misurano rispettivamente cm 18 e 24. Sull'ipotenusa FG si prenda un punto K, che divida l'ipotenusa stessa in parti proporzionali (vedi NOTA) ai numeri 4 e 11 ($KG < KF$). Da K si conduca la perpendicolare ad FG fino ad incontrare in T il cateto EG. Trovare l'area del quadrilatero EFKT e la misura del segmento FT.

NOTA - Dire che due segmenti a, b sono proporzionali ai due numeri m, n significa affermare che $a : m = b : n$ (oppure, indifferentemente, $a : b = m : n$).
Stesso significato ha la frase "due segmenti stanno fra loro come i numeri m, n".
Ad esempio, se due segmenti a, b sono proporzionali ai numeri 3 e 4, significa che $a : 3 = b : 4$, $a : b = 3 : 4$, il primo di questi segmenti è $\frac{3}{4}$ dell'altro.

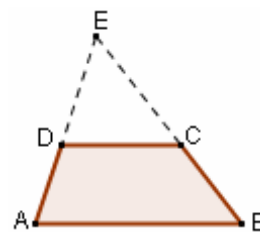
- 6) E' dato un triangolo rettangolo ABC (AB ipotenusa, BC cateto maggiore), tale che $AB = 15a$ e $BC = AC + 3a$. Si prolunghi il cateto AC, dalla parte di C, di un segmento $CD = 3AC$. Da C si tracci la parallela ad AB fino ad incontrare in E la congiungente BD. Trovare le misure di CE e di BE.
- 7) Nel triangolo ABC, inscritto in una semicirconferenza di diametro $AB = 20 \text{ cm}$, è $CA = \frac{3}{4} CB$. Preso su CA il punto D tale che $CD = CA/6$, per D si traccia la corda EF parallela al diametro. Quanto misura EF?
- 8) L'ipotenusa BC di un triangolo rettangolo ABC misura cm 3,5; il cateto AB è $\frac{3}{4}$ del cateto AC. Un punto P, sul cateto AB, lo divide in due parti che stanno fra loro come 2:5 ($AP < PB$). Tracciata per P la parallela a BC, che interseca AC in D, trovare il perimetro del triangolo APD.
- 9) In un trapezio rettangolo ABCD le basi AB e DC misurano rispettivamente 21b e 15b, e l'altezza AD misura 8b. Trovare le misure dei due segmenti in cui la diagonale AC è divisa dalla parallela a BC condotta dal vertice D.

SOLUZIONI

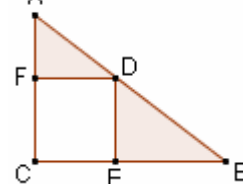
- 1) $15/2 a$ 2) 33,6 cm 3) $d = \frac{2bh}{3\sqrt{b^2 + h^2}}$ 4) 7,5 cm 5) 192 cm^2 ; $\text{cm } 2\sqrt{130}$
 6) $45a/4$; $3a\sqrt{97}/4$ 7) cm 12 8) 2,4 cm 9) $34b/7$; $85b/7$

B) Problemi in cui la similitudine viene utilizzata per impostare l'equazione risolvibile

- 10) In un trapezio le basi misurano $15k$ e $10k$, e i lati obliqui $7k$ e $9k$.
Trovare il perimetro del triangolo che ha per lati la base minore e i prolungamenti dei lati obliqui.

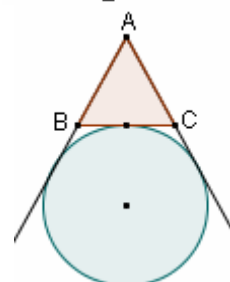


- 11) Dato un triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente 48 cm e 36 cm , trovare la misura del lato del quadrato inscritto, con due lati sui cateti (e un vertice sull'ipotenusa: vedi figura).



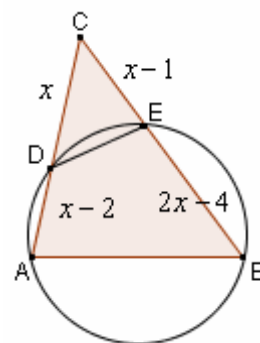
- 11') *Generalizzazione*: dato un triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente a e b , ecc. ecc.

- 12) $\Rightarrow$ Nel triangolo isoscele ABC, di base BC, l'area è di 108 cm^2 , e il lato obliquo misura 15 cm . Dopo aver determinato i lati del triangolo, trovare il raggio della circonferenza "ex-inscritta", tangente alla base del triangolo e ai prolungamenti dei lati obliqui.



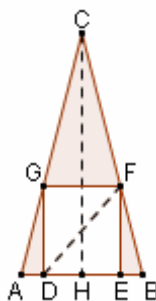
- 12') *Generalizzazione*: determinare il raggio della circonferenza supponendo che le misure di base e lato obliquo siano $2b$ ed ℓ rispettivamente.

- 13) $\Rightarrow$ Il lato AB di un triangolo è corda di una circonferenza, e il vertice C è esterno a tale circonferenza (vedi figura). I lati AC e BC intersecano la circonferenza rispettivamente in D e in E. Dopo aver dimostrato che i due triangoli ABC e DEC sono simili, determina x nell'ipotesi che sia $CD = x$, $DA = x - 2$, $CE = x - 1$, $EB = 2x - 4$.

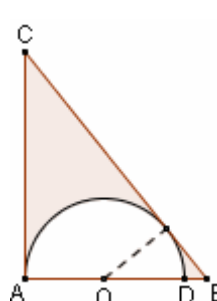
**C) Problemi in cui la similitudine viene utilizzata per esprimere un segmento in funzione di x**

- 14) $\Rightarrow$ In un triangolo isoscele, di base $AB = 1$ e altezza $CH = 2$, inscrivere un rettangolo DEFG, con DE su AB, di diagonale unitaria.
- 15) In un triangolo ABC, rettangolo in A, il raggio della semicirconferenza tangente all'ipotenusa, il cui diametro AD si trova sul cateto AB, è $\frac{4}{9}$ di AB. Sapendo inoltre che l'area del triangolo ABC vale $96a^2$, trovare la misura di AB.

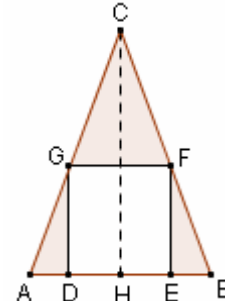
- 16) In un triangolo isoscele, la base è $\frac{5}{3}$ del lato del quadrato inscritto, con un lato sulla base, e il quadrato costruito sull'altezza supera l'area del triangolo di $150a^2$. Trovare la misura della base del triangolo e quella del lato del quadrato inscritto.



n.14



n.15



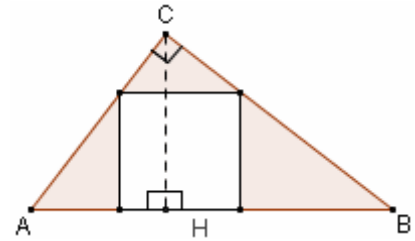
n.16

SOLUZIONI

- 10) $42k$ 11) $\text{cm} \frac{144}{7}$ 11') $\frac{ab}{a+b}$ 12) 18 cm oppure 36 cm 12') $\frac{b\sqrt{\ell^2 - b^2}}{\ell - b}$ 13) $x = 5$
- 14) $DE = \frac{3}{5}$ ed $EF = \frac{4}{5}$ oppure (caso "degenere") $DE = 1$ ed $EF = 0$ 15) $12a$ 16) $10a, 6a$

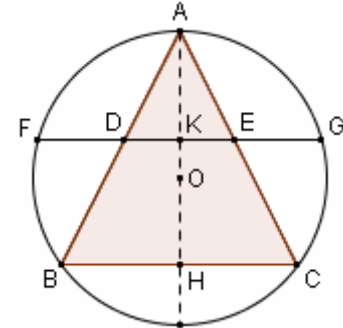
D) Problemi vari sulle similitudini

- 17) E' dato un triangolo rettangolo in cui i cateti misurano $6a$, $8a$.
Trovare la misura del lato del quadrato inscritto,
con un lato sull'ipotenusa (e due vertici sui cateti: vedi figura)



- 17') *Generalizzazione:*
supporre che le misure dei cateti siano a , b rispettivamente.

- 18) In una circonferenza di raggio r è inscritto un triangolo isoscele, la cui base BC è uguale all'altezza AH .



I) Trovare la misura di $BC = AH$

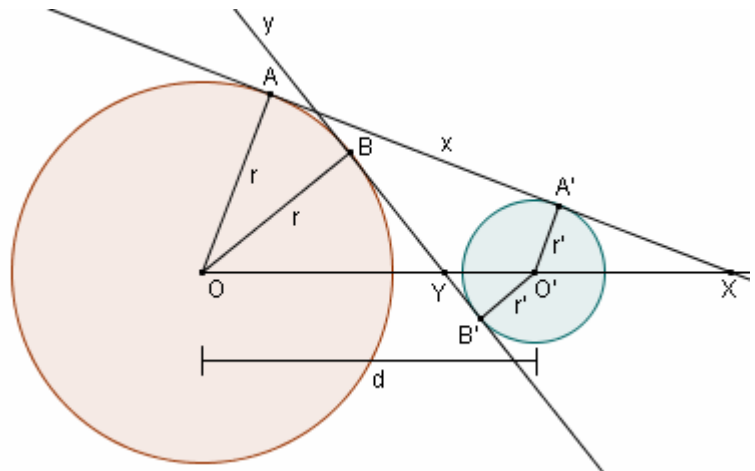
II) Determinare sul segmento AH un punto K in modo che, condotta per K la perpendicolare ad AH , che tagli AB in D , AC in E , e la circonferenza in F (dalla parte di D) e in G (dalla parte di E), sia verificata la relazione $DF + EG = r$ ➡

- 19) ➡

I centri O e O' di due circonferenze, di raggi r e r' rispettivamente (con $r > r'$) hanno distanza $OO' = d$ ($d > r + r'$).

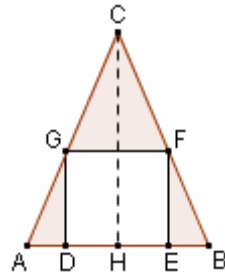
Una tangente comune x taglia il prolungamento del segmento OO' nel punto X ; un'altra tangente comune y taglia OO' internamente, in Y .

Determinare le misure dei segmenti OX ; $O'X$; OY ; $O'Y$; YX .



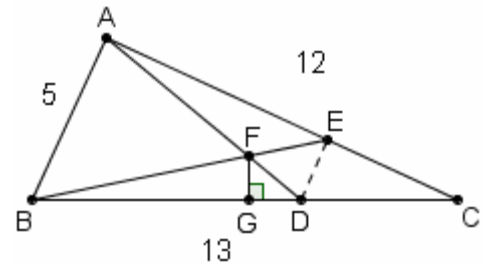
- 20) ➡

In un triangolo isoscele di area 9 cm^2 è inscritto un quadrato di lato 2 cm . Quanto misura la base del triangolo?



- 22)

Il triangolo ABC ha i lati di 5 , 12 e 13 cm . CD è la terza parte di BC , e CE è la terza parte di AC .



- 21) Se voglio che l'area di un triangolo raddoppi, per quale numero devo moltiplicare la lunghezza di tutti i lati?

- a) Dimostra che ABC è rettangolo
b) Dimostra che DE è parallela ad AB
c) Determina la lunghezza di DE
d) Dimostra che i due segmenti AD e BE si tagliano reciprocamente in due parti, una tripla dell'altra
e) Trova la misura della distanza FG di F da BC

SOLUZIONI

17) $\frac{120}{37}a$ 17') $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2}$ 18) I) $BC = AH = \frac{8}{5}r$ II) $AK = \frac{r}{5} \vee AK = r$

19) $OX = \frac{rd}{r-r'}$ $O'X = \frac{r'd}{r-r'}$ $OY = \frac{rd}{r+r'}$ $O'Y = \frac{r'd}{r+r'}$ $YX = \frac{2rr'd}{r^2-r'^2}$

20) La base del triangolo può misurare 3 cm oppure 6 cm 21) $\sqrt{2}$

- 22) a) ABC è rettangolo (in A) per l'inverso del Teorema di Pitagora, essendo $5^2 + 12^2 = 13^2$
b) 2° Criterio di Similitudine ... c) $DE = 5/3$ d) Anche i due triangoli ABF , DEF sono simili ...
e) $FG = 15/13$ (dopo aver tracciato ...)

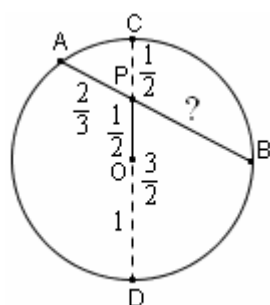
PROBLEMI SULLE APPLICAZIONI DELLE SIMILITUDINI

ESEMPI SVOLTI

- Una circonferenza ha centro O e raggio unitario.
Per un punto P passa una retta che interseca la circonferenza in A e B rispettivamente.
Supponendo che la misura del segmento PA sia $\frac{2}{3}$, trovare la misura di PB nell'ipotesi che sia

a) $PO = \frac{1}{2}$ b) $PO = \frac{3}{2}$

a)



$$PO = \frac{1}{2}$$

$$PC = OC - PO = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$PD = OD + PO = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

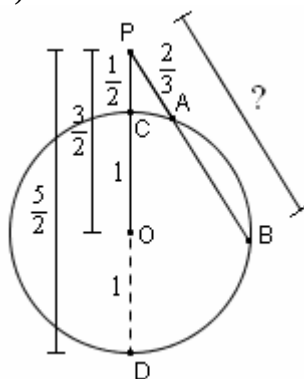
Teor. delle Due Corde:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$\frac{2}{3} \cdot PB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}, \quad \frac{2}{3} \cdot PB = \frac{3}{4}$$

$$PB = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

b)



$$PO = \frac{3}{2}$$

$$PC = PO - OC = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$PD = OD + PO = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

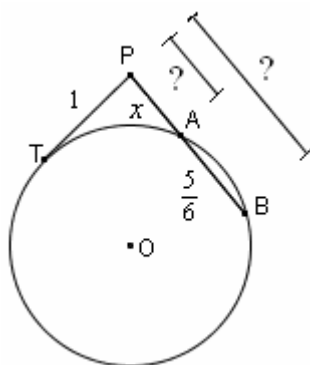
Teor. delle Due Secanti:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$\frac{2}{3} \cdot PB = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}, \quad \frac{2}{3} \cdot PB = \frac{5}{4}$$

$$PB = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$$

- Una circonferenza ha centro O e raggio unitario.
Un punto P è esterno ad essa.
Una tangente PT misura 1;
una retta per P taglia la circonferenza in A e in B,
e la corda AB misura $\frac{5}{6}$.
Determinare PA e PB.



$$PA = x \quad PB = PA + AB = x + \frac{5}{6}$$

Teor. Della Tangente e Secante:

$$PA \cdot PB = PT^2 \quad x \cdot \left(x + \frac{5}{6}\right) = 1^2$$

$$x_{1,2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{2} \text{ non accettabile} \end{array} \right. \quad \boxed{PA = \frac{2}{3}, \quad PB = \dots = \frac{3}{2}}$$

- Due corde AB, CD si tagliano in E. Se AE = cm 3, BE = cm 4 e CE = cm 5, quanto misura CD?
- In un cerchio due corde si intersecano. La prima, lunga 8 cm, è tagliata in metà dall'altra; questa è divisa dalla prima in due parti, che differiscono di 6 cm. Quanto misura la seconda corda?
- Da un punto esterno P si tracciano una tangente e una secante ad una circonferenza di raggio r. Sapendo che la tangente misura r e la secante misura 2r, determinare la lunghezza della corda che la circonferenza intercetta sulla secante e la distanza della secante dal centro.
- Un punto P ha distanza $d > r$ dal centro O di una circonferenza di raggio r. Quanto deve misurare una secante, condotta da P alla circonferenza, se si vuole che la corda staccata dalla circonferenza sulla secante misuri c?
- In un triangolo i cui lati misurano 6, 7 e 8 cm, si conduce la bisettrice relativa al lato maggiore. Determinare le lunghezze dei due segmenti in cui questo risulta suddiviso dalla bisettrice.
- In un triangolo in cui due lati misurano 42 cm e 56 cm, la bisettrice relativa al terzo lato lo divide in due parti, che differiscono di 10 cm.
 - Determinare il perimetro del triangolo;
 - dimostrare che è rettangolo;
 - determinare quindi la lunghezza della bisettrice tracciata.

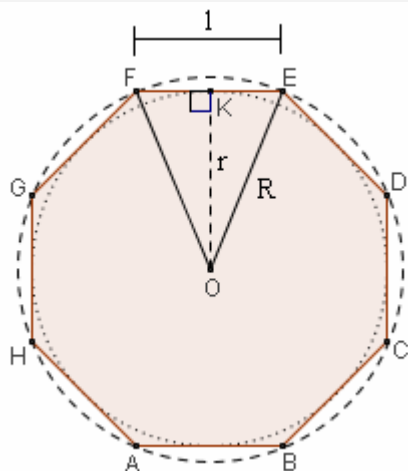
**R
I
S
P.**

- 1) $\text{cm } \frac{37}{5} = 7,4$ 2) 10 cm 3) $\frac{3}{2}r, \frac{\sqrt{7}}{4}r$ 4) $\frac{c + \sqrt{c^2 + 4(d^2 - r^2)}}{2}$ 5) $\text{cm } \frac{48}{13}, \text{cm } \frac{56}{13}$
6) a) $2p = \text{cm } 168$; b) il triangolo è rett. per l'inverso del teor. di Pitagora; c) bisettrice = $\text{cm } 24\sqrt{2}$

PROBLEMI SUI POLIGONI REGOLARI

ESEMPIO SVOLTO

- Considerato un ottagono regolare di lato unitario, calcolane:
il raggio del cerchio circoscritto, il raggio del cerchio inscritto, l'apotema, l'area



E' nota la formula $\ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

che lega il lato dell'ottagono regolare inscritto al raggio R della circonferenza circoscritta.

Invertendo la formula, avremo

$$R = \frac{\ell_8}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Questo valore si potrebbe razionalizzare:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{4-2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2};$$

sennonché, la frazione trovata non è molto più semplice e armoniosa dell'espressione di partenza! Ci terremo quella.

Ora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} OK &= \sqrt{OE^2 - EK^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4-2} - \frac{1}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}-1}{4}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \text{raggio cerchio inscritto} \\ &\hspace{15em} \text{apotema} \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'area, moltiplicheremo per 8 l'area del triangolino OEF la quale è data da

$$\frac{EF \cdot OK}{2} = 1 \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{4}, \text{ ottenendo quindi } S = 8 \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{4} = 2(1+\sqrt{2})$$

1) $\Rightarrow$

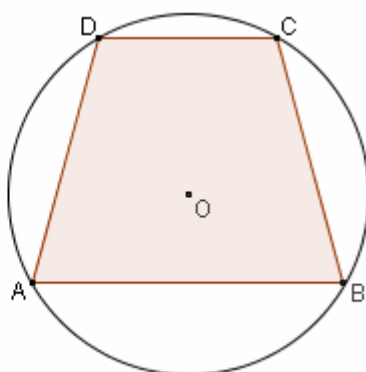
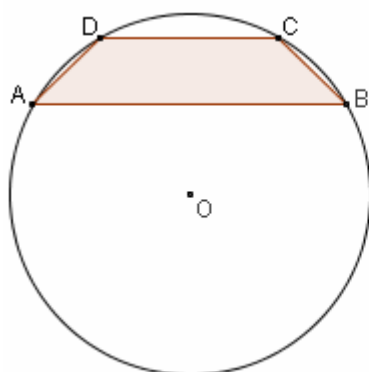
Un trapezio è inscritto in una circonferenza di raggio R.

Determinare il lato obliquo del trapezio,

sotto l'ipotesi che le sue basi siano uguali ai lati del triangolo equilatero inscritto e dell'esagono regolare inscritto.

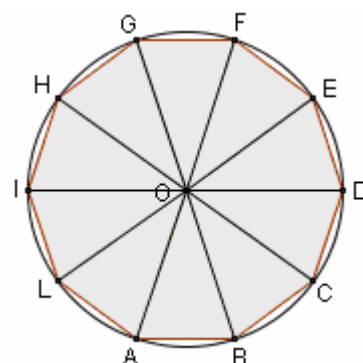
Distinguere i due casi:

- le due basi stanno, rispetto al centro, dalla stessa parte;
- le due basi stanno da parti opposte rispetto al centro.



- 2) Quanto vale il rapporto fra le aree dell'esagono regolare e del triangolo equilatero, inscritti nella stessa circonferenza?

- 3) Calcola l'area del decagono regolare inscritto in un cerchio di raggio unitario.



- 4) Calcola il rapporto fra l'area del triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza di raggio unitario, e l'area del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza. Fai poi lo stesso per i quadrati circoscritto e inscritto; e ancora, per gli esagoni circoscritto e inscritto.

**R
I
S
P.**

- 1) a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R$
b) $R\sqrt{2}$

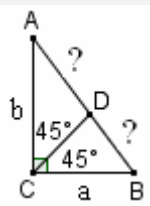
- 2) Vale 2. L'area dell'esagono è il doppio; lo si può stabilire col calcolo oppure anche (provaci ...) senza calcoli!

3) $\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

- 4) 4;
2;
4/3

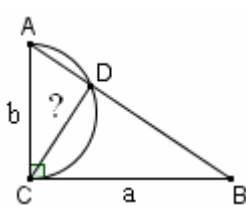
□ PROBLEMI GEOMETRICI VARI

1)



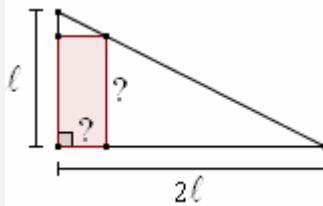
$AD = ?$
 $DB = ?$

2)



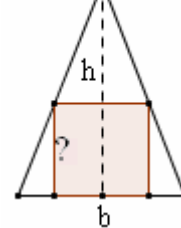
La semicirconf.
ha per diametro
un cateto.
 $CD = ?$

3)



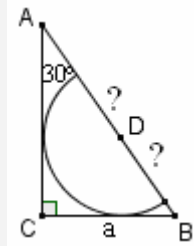
Area rettangolo = $\frac{3}{8}l^2$.
Sue dimensioni?

4)



base = b
altezza = h
Lato quadrato
inscritto?

5)



$\hat{A} = 30^\circ$, $CB = a$.
Raggio semicirconf.
con centro su AB,
tangente ai cateti?

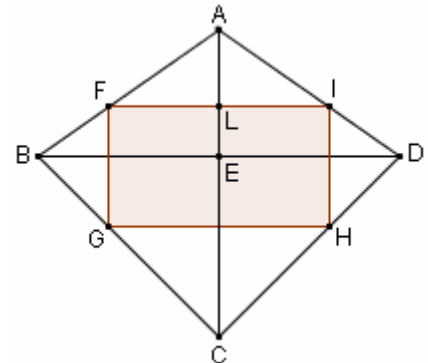
6) Un quadrilatero ABCD ha le seguenti caratteristiche:

- le sue diagonali AC e BD si tagliano perpendicolarmente (in E);
- $BE = ED$; $\hat{BAD} = 120^\circ$; $\hat{BCD} = 90^\circ$; $BC = a\sqrt{6}$

Un rettangolo FGHI, coi lati paralleli alle diagonali di ABCD, è inscritto in ABCD (= ha i vertici sui lati di ABCD); FI taglia AE in L.

Si chiede di determinare la lunghezza $AL = x$ in modo che:

- il perimetro di FGHI misuri $a(1 + 3\sqrt{3})$
- FGHI sia un quadrato

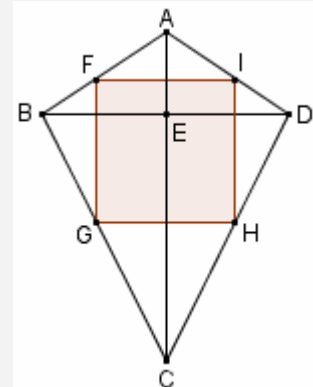


7) In un deltoide (NOTA) ABCD, le diagonali AC e BD si tagliano in E; è $EB = ED = 3a$, $EA = 2a$, $EC = 6a$.

Determinare la misura del lato del quadrato inscritto nel deltoide.

NOTA

Si dice "deltoide" o "aquilone" un quadrilatero avente due lati consecutivi uguali fra loro, e gli altri due lati pure uguali fra loro. In un deltoide le diagonali sono sempre perpendicolari.

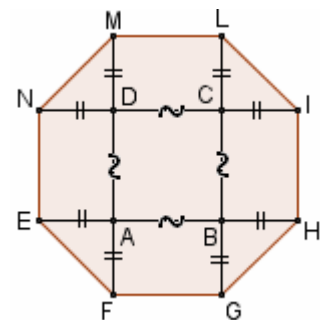


8) La figura mostra un quadrato ABCD i cui lati sono stati prolungati di otto segmenti uguali: $AE = AF = BG = BH = CI = CL = DM = DN$.

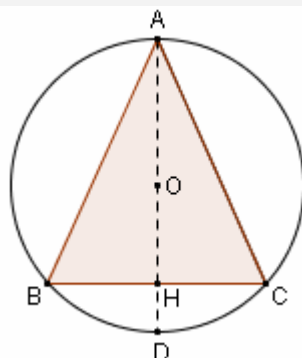
Determinare le misure del lato del quadrato e dei prolungamenti tracciati,

in modo che l'ottagono EFGHILMN abbia

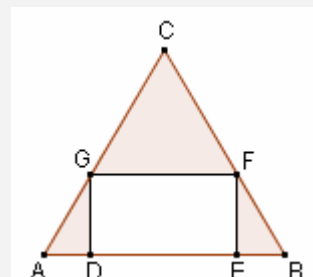
tutti e otto i lati uguali fra loro, e l'area di misura $36a^2(1 + \sqrt{2})$



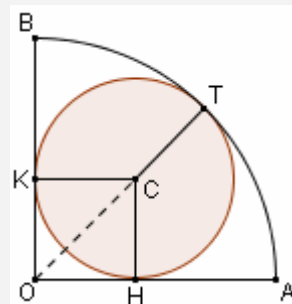
9) Determinare la base e l'altezza di un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di diametro 10 cm, sapendo che la somma base+altezza misura 16 cm.



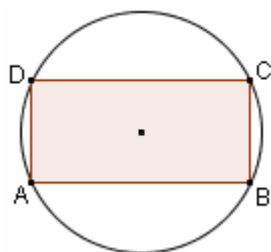
10) In un triangolo equilatero ABC di lato ℓ è inscritto un rettangolo DEFG, la cui area è la quarta parte dell'area di ABC. Determinare la base del rettangolo (valori irrazionali)



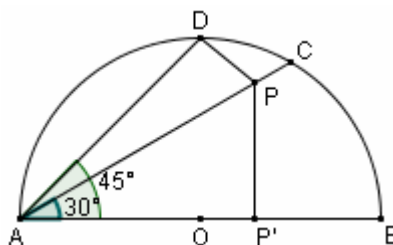
- 11) In un quadrante (=quarta parte di cerchio) OAB, di centro O e raggio r , è inscritta una circonferenza di centro C, tangente in H ad OA, in K ad OB, e in T all'arco $\widehat{AB}$.
- Trovare il raggio della circonferenza di centro C
 - Determinare, sul segmento OK, un punto P in modo che sia verificata la relazione $PK + PA = r\sqrt{2}$ (porre $OP = x$)
 - Supporre, questa volta, che P si trovi sul segmento KB. Determinare la posizione di P in modo che si abbia, ancora, $PK + PA = r\sqrt{2}$ (porre $OP = x$)



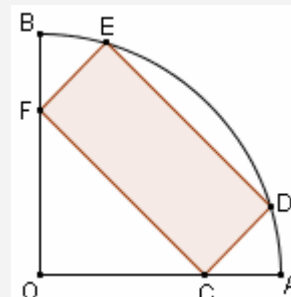
- 12) Quanto valgono i lati di un rettangolo di area r^2 , inscritto in una circonferenza di raggio r ?



- 13) In una semicirconferenza di diametro $2r$, a partire dall'estremo A del diametro AB, si traccino due corde: AC, tale che $\widehat{CAB} = 30^\circ$, e AD, tale che $\widehat{DAB} = 45^\circ$.
- Determinare le lunghezze di tali due corde
 - Determinare sulla semiretta AC un punto P tale che sia verificata la relazione $PD^2 + PP'^2 = 2r^2$ essendo P' la proiezione di P sulla retta AB.

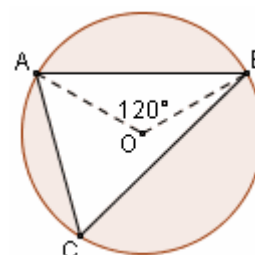


- 14) Un rettangolo è inscritto in un quadrante di raggio r , in modo tale che due dei suoi vertici stanno sui lati del quadrante, e gli altri due sull'arco di circonferenza (vedi figura). Sapendo che il perimetro del rettangolo misura $\frac{14}{5}r$, determinare la lunghezza $2x$ del lato che ha entrambi gli estremi sull'arco di circonferenza.



- 15) In un cerchio di centro O e raggio unitario è data la corda AB, cui corrisponde un angolo al centro di 120° . Determinare sulla circonferenza un punto C (situato, rispetto alla retta AB, dalla stessa parte di O), in modo che il perimetro del triangolo ABC misuri $\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$

Indicazione: porre come incognita AC; quanto misura $\widehat{ACB}$?



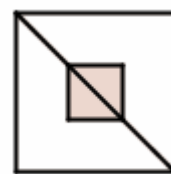
S
O
L
U
Z
I
O
N
I

- 1) $AD = \frac{b}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}$, $DB = \frac{a}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}$ 2) $CD = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 3) $\frac{3}{2}\ell$ e $\frac{1}{4}\ell$ opp. $\frac{1}{2}\ell$ e $\frac{3}{4}\ell$
 4) $\frac{bh}{b+h}$ 5) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}a$ 6) I) $x = \frac{a}{2}$ II) $x = \frac{4+\sqrt{3}}{13}a$ 7) $\frac{24}{7}a$ 8) lato q. $= 3a\sqrt{2}$, prolung. $= 3a$
 9) $b = h = 8\text{cm}$ opp. $b = \text{cm}\frac{48}{5}$ e $h = \text{cm}\frac{32}{5}$ 10) $\frac{\ell}{4}(2 \pm \sqrt{2})$
 11) a) $r(\sqrt{2}-1)$ b) $x = 0$ c) $x = \frac{6\sqrt{2}-4}{7}r$ 12) $\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}r$
 13) a) $AC = r\sqrt{3}$ $AD = r\sqrt{2}$ b) $AP = 0 \vee AP = \frac{4}{5}r(\sqrt{3}+1)$ 14) $\frac{6}{5}r$ 15) $AC = 1 \vee AC = 2$

QUESITI VARI DI ARGOMENTO GEOMETRICO, TRATTI DA GARE MATEMATICHE

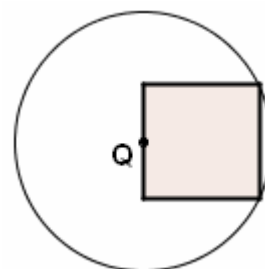
Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi

- 1) In figura, l'area del quadrato grande misura 1 m^2 .
Una delle sue diagonali è divisa in tre parti uguali.
La parte intermedia fra le tre è diagonale del quadrato ombreggiato.
Qual è l'area di quest'ultimo?
- A) $1/10 \text{ m}^2$ B) $1/9 \text{ m}^2$ C) $1/6 \text{ m}^2$ D) $1/4 \text{ m}^2$ E) $1/3 \text{ m}^2$



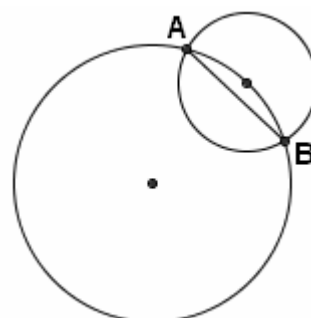
British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2009

- 2) Il punto Q sta nel centro di un cerchio di raggio 25 centimetri.
Si costruisce un quadrato con due vertici sulla circonferenza
e il lato che congiunge gli altri due vertici contenente il centro Q.
L'area del quadrato, in cm^2 , è:
- A) 125 B) $125\sqrt{5}$ C) 500 D) 250 E) $250\sqrt{5}$ C



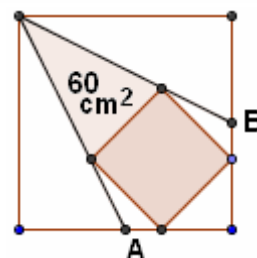
British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2006

- 3) La figura mostra due cerchi, di raggi 2 e 1 rispettivamente.
Il centro del cerchio più piccolo sta sulla circonferenza del più grande.
Allora la lunghezza della corda AB è
- A) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ B) $\frac{5\sqrt{34}}{17}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{15}{8}$ A



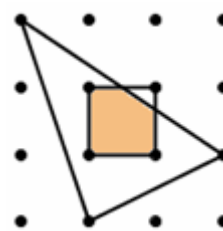
Fédération Française des Jeux Mathématiques-Trophée Lewis Carroll

- 4) Il triangolo centrale in figura ha un'area di 60 cm^2 .
A e B sono i punti medi di due lati del quadrato grande.
Quanto misura l'area del quadrato ombreggiato?
- A) 72 cm^2 B) 80 cm^2 C) 84 cm^2 D) 88 cm^2 E) 90 cm^2



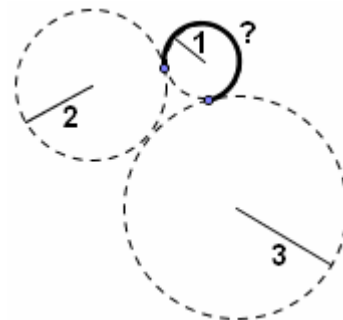
Kangourou 2002

- 5) Nella figura a lato, due punti comunque scelti,
purché adiacenti in orizzontale o in verticale, distano 1 metro.
Quanto vale (in metri quadrati) l'area della parte comune
al triangolo e al quadrato indicati?
- A) $\frac{9}{10}$ B) $\frac{15}{16}$ C) $\frac{8}{9}$ D) $\frac{11}{12}$ E) $\frac{14}{15}$



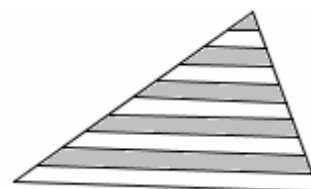
Kangourou 2008

- 6) Tre cerchi di raggi 1, 2 e 3 rispettivamente sono tangenti (figura).
Quanto vale la lunghezza dell'arco di circonferenza evidenziato
con la linea continua?
- A) $\frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{2\pi}{3}$



Kangourou 2010

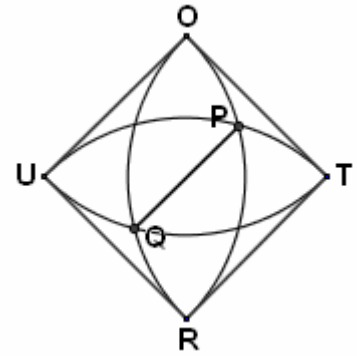
- 7) Dei segmenti paralleli alla base dividono gli altri due
lati di un triangolo in 10 parti uguali, come in figura.
Che percentuale della superficie del triangolo è ombreggiata?
- A) 41,75% B) 42,5% C) 45% D) 46% E) 47,5%



Kangourou 2008

- 8) Sia TOUR un quadrato di lato 1.
Si tracciano, come mostra la figura,
i quarti di cerchio di centri T, O, U e R.
Quanto misura PQ?

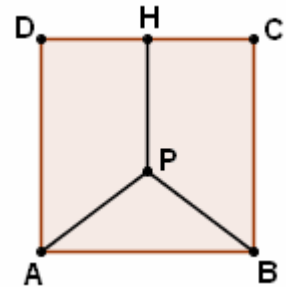
A) $2 - \sqrt{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{3} - 1$



Junior High School Mathematics Contest Preliminary Round 1998

- 9) Un punto P è interno a un quadrato ABCD di lato 16 cm.
P è equidistante da due vertici consecutivi,
e dal lato che ha per estremi i due vertici restanti.
La distanza PA vale

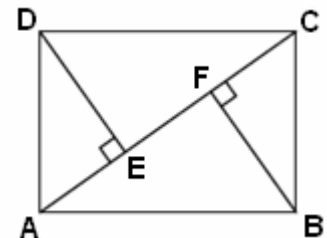
A) 8,5 B) $6\sqrt{3}$ C) 12 D) 8 E) 10



British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2008

- 10) Nella figura ABCD è un rettangolo con $AD = 1$,
e DE e BF entrambi perpendicolari alla diagonale AC.
Inoltre $AE = EF = FC$.
La lunghezza del lato AB è:

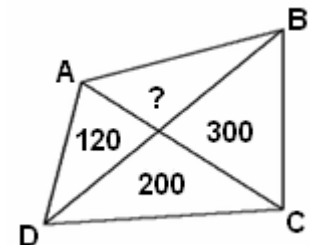
A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) 3



Olimpiadi della matematica messicane, problemi introduttivi

- 11) Un dolce ha forma di quadrilatero.
Lo si taglia lungo le diagonali in 4 parti.
Io ne mangio una, dopodichè si pesano le altre tre:
una di queste risulta di 120 grammi, un'altra di 200 e la terza di 300.
Quanti grammi pesava la parte che ho mangiato io?

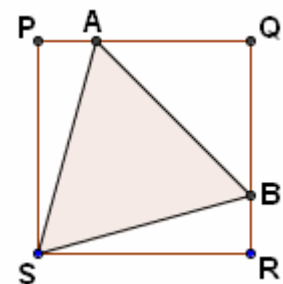
A) 120 B) 180 C) 280 D) 330 E) 550



British Columbia Secondary School Mathematics Contest 2010

- 12) PQRS è un quadrato e ABS un triangolo equilatero.
Trova il rapporto fra l'area del triangolo APS
e l'area del triangolo ABQ.

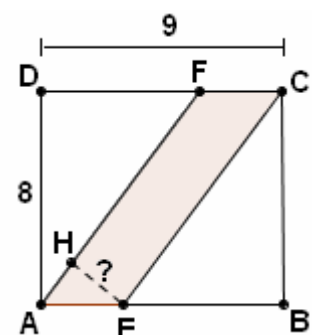
A) $1:\sqrt{3}$ B) $1:\sqrt{2}$ C) 1:2 D) 1:3 E) nessuno dei precedenti



The Calgary Mathematical Association -
Junior High School Mathematics Contest 2004

- 13) La figura mostra un rettangolo di dimensioni 9 cm e 8 cm,
diviso da due parallele in tre parti tutte con la stessa area.
Quanti cm distano le due parallele?

A) 2 B) 2,1 C) 2,2 D) 2,3 E) 2,4



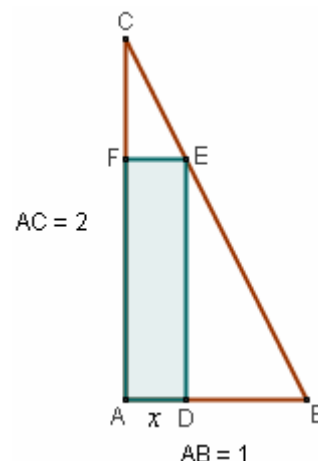
RISPOSTE 1B2C3A4B5D6D7C8E9E10A11B12C13E

□ PROBLEMI GEOMETRICI + GRAFICI DI FUNZIONI

ESERCITAZIONE 1 (la correzione completa è a pag. 275)

In un triangolo ABC, rettangolo in A, con $AB = 1$ cm e $AC = 2$ cm, è inscritto un rettangolo ADEF (con D su AB, E su BC, F su AC).

Poniamo $AD = x$.



- Come degenera la figura per $x = 0$?
Disegna la figura degenerare.
Che valore attribuiremo al perimetro di questo rettangolo degenerare?
- Stesse domande per $x = 1$.
- Secondo te, se facciamo variare x da 0 fino a 1 il perimetro di ADEF aumenta oppure diminuisce?
- In base alle considerazioni svolte al precedente punto c), sei in grado di stabilire quali sono il valore minimo e il valore massimo che il perimetro di ADEF può assumere?
- Esprimi il perimetro di ADEF in funzione di x . (Risposta: $y = 2p(x) = 4 - 2x$)
- Fai un grafico della funzione $y = 2p(x)$.
L'osservazione del grafico va d'accordo con la risposta data al punto d)?
- Per quale valore di x il perimetro di ADEF misura cm 3? (Risposta: $x = 1/2$)
- Risolvi graficamente l'equazione $2p(x) = 3$.
- Per quale valore di x il rettangolo ADEF è un quadrato?
- Esprimi in funzione di x la diagonale del rettangolo ADEF (Risposta: $y = d(x) = \sqrt{5x^2 - 8x + 4}$)
- Per quale valore di x tale diagonale misura 1 cm? (Risposta: $x = 1 \vee x = 3/5$)
- Come potresti stabilire per quale valore di x la diagonale è minima e per quale è massima?

ESERCITAZIONE 2

(le altre risposte sono a pag. 277)

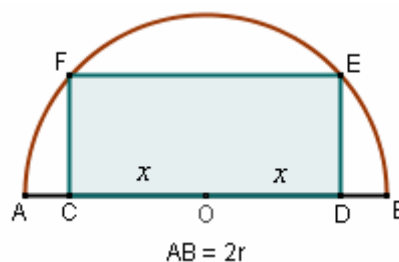
Riprendiamo la stessa situazione geometrica dell'Esercitazione 1: triangolo rettangolo ABC con $AB = 1$ cm e $AC = 2$ cm, rettangolo inscritto ADEF, $AD = x$. Questa volta punteremo la nostra attenzione sull'area anziché sul perimetro.

- Che valore attribuiremo all'area del rettangolo degenerare che si ottiene per $x = 0$?
- Stessa domanda per $x = 1$.
- Se facciamo variare x da 0 fino a 1, l'area di ADEF che variazione subisce?
- E' possibile stabilire quali sono i valori minimo e massimo che l'area di ADEF può assumere?
- Esprimi l'area di ADEF in funzione di x . (Risposta: $y = S(x) = 2x(1 - x)$)
- Fai un grafico di $y = S(x)$: otterrai un arco di parabola.
L'osservazione del grafico conferma la tua risposta al punto d)?
- Se ti chiedo per quali valori di x l'area vale $\text{cm}^2 1/3$, tu, pensando al problema geometrico, quanti valori ti aspetti?
L'osservazione del grafico conferma la tua risposta?
- Risolvi algebricamente l'equazione $S(x) = 1/3$. (Risposta: $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$)
- Se ti chiedo per quali valori di x l'area vale $\text{cm}^2 2$, quanti valori ti aspetti?
- Conferma algebricamente la risposta al punto precedente, risolvendo l'equazione di 2° grado $S(x) = 2$.

ESERCITAZIONE 3**(le altre risposte sono a pag. 277)**

**Disegna un rettangolo CDEF
inscritto in una semicirconferenza
di centro O e diametro AB = 2r.**

Indica la semibase OC = OD del rettangolo con x.



- a) Esprimi il perimetro del rettangolo in funzione di x,
con due metodi:

- tracciando OF e applicando Pitagora;
- tracciando FA, FB e applicando Euclide

(Risposta: $2p(x) = 4x + 2\sqrt{r^2 - x^2}$)

- b) Per quali valori di x il perimetro del rettangolo misura 4r?

(Risposta : $x = r, x = \frac{3}{5}r$)

- c) Per quali valori di x il perimetro del rettangolo misura 3r?

(Risposta : $x = \frac{6 - \sqrt{11}}{10}r$)

- d) Come degenera la figura se $x = 0$
e quanto misura, in questo caso, il perimetro del "rettangolo degenerare" ?

- e) Come degenera la figura se $x = r$
e quanto misura, in questo caso, il perimetro del "rettangolo degenerare" ?

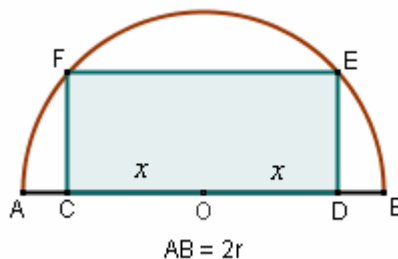
- f) Qual è il valore di x per cui si ottiene il rettangolo di perimetro minimo?
Quanto misura tale perimetro minimo?

- g) Qual è il valore di x per cui si ottiene il rettangolo di perimetro massimo?
Puoi rispondere a questa domanda tracciando, al computer, il grafico della funzione $y = 2p(x)$
(poni $r = 1$).
Quanto misura tale perimetro massimo?

ESERCITAZIONE 4**(le altre risposte sono a pag. 277)**

**Come nella precedente Esercitazione 3,
si considera un rettangolo CDEF
inscritto in una semicirconferenza
di centro O e diametro AB = 2r .**

Si indica la semibase OC = OD del rettangolo con x.



- a) Esprimi l'area del rettangolo in funzione di x.

(Risposta: $S(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$)

- b) Per quali valori di x l'area del rettangolo misura r^2 ?

(Risposta: $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$)

- c) Per quali valori di x l'area del rettangolo misura $\frac{24}{25}r^2$?

(Risposta: $x = \frac{3}{5}r \vee x = \frac{4}{5}r$)

- d) Come degenera la figura se $x = 0$? Quanto misura l'area del "rettangolo degenerare" ?

- e) Come degenera la figura se $x = r$? Quanto misura l'area del "rettangolo degenerare" ?

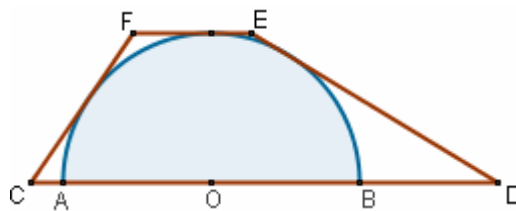
- f) Qual è il valore di x per cui si ottiene il rettangolo di area minima?
Quanto misura tale area minima?

- g) Qual è il valore di x per cui si ottiene il rettangolo di area massima?
Puoi rispondere a questa domanda tracciando, al computer, il grafico della funzione $y = S(x)$
(poni $r = 1$).
Quanto misura tale area massima?

ESERCITAZIONE 5**(le altre risposte sono a pag. 277)**

Un trapezio si dice "circoscritto ad una semicirconferenza" se:

- ♪ la sua base maggiore sta sulla retta del diametro;
- ♪ lati obliqui e base minore sono tangenti alla semicirconferenza (vedi figura).



a) Dimostra il

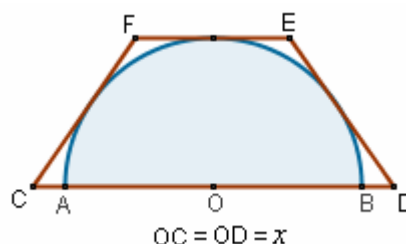
TEOREMA: *in un trapezio circoscritto ad una semicirconferenza, la base maggiore è uguale alla somma dei due lati obliqui.*

(Indicazione: congiungi il centro con gli estremi della base minore e dimostra che due certi triangoli così ottenuti sono isosceli).

b) A partire dal teorema precedente, giustifica il

COROLLARIO: *in un trapezio ISOSCELE circoscritto ad una semicirconferenza, il lato obliquo è metà della base maggiore.*

Considera ora un trapezio ISOSCELE CDEF,
di base maggiore CD,
circoscritto ad una semicirconferenza
di diametro noto $AB = 2r$.



c) Esprimi il perimetro $2p$ di CDEF in funzione della lunghezza x della semibase maggiore OD.

Risposta: $2p = 6x - 2\sqrt{x^2 - r^2}$

d) Determina la lunghezza x della semibase maggiore in modo che il perimetro del trapezio misuri $6r$.

Risposta: $x = \frac{5}{4}r \vee x = r$ (soluzione degenere)

e) Esiste, fra tutti gli infiniti trapezi isosceli circoscrivibili ad una semicirconferenza di raggio r , un trapezio di perimetro massimo?

f) ... e un trapezio di perimetro minimo?

g) Posto $y = f(x)$ = perimetro del trapezio di semibase magg. x , circoscritto ad una semicirconf. di raggio r , traccia al computer il grafico della funzione $y = f(x)$ (supponendo $r = 1$).

L'osservazione del grafico ti consentirà di verificare se le tue risposte ai quesiti e, f sono corrette.

ESERCITAZIONE 6**(le altre risposte sono a pag. 277)**

a) Considera, come nell'Esercitazione 5, un trapezio isoscele CDEF circoscritto ad una semicirconferenza di diametro noto $AB = 2r$, ed esprime l'area S in funzione della lunghezza x della semibase maggiore.

Risposta: $S = r(2x - \sqrt{x^2 - r^2})$

b) Determina x in modo che l'area del trapezio misuri $\frac{7}{4}r^2$ (Risposta: $x = \frac{13}{12}r \vee x = \frac{5}{4}r$)

c) Esiste, fra tutti gli infiniti trapezi isosceli circoscrivibili ad una semicirconferenza di raggio r , un trapezio di area massima?

d) ... e un trapezio di area minima?

e) Posto $y = g(x)$ = area del trapezio di semibase maggiore x , circoscritto ad una semicirconf. di raggio r , traccia al computer il grafico della funzione $y = g(x)$ (supponendo $r = 1$).

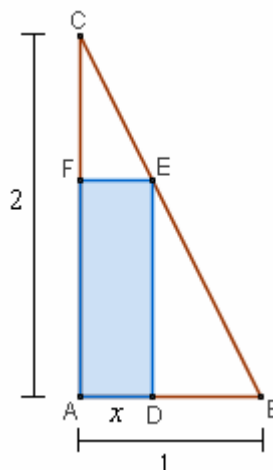
Verifica la correttezza delle risposte date ai precedenti punti c, d.

Il trapezio di area minima è lo stesso trapezio che (esercitazione precedente) aveva perimetro minimo?

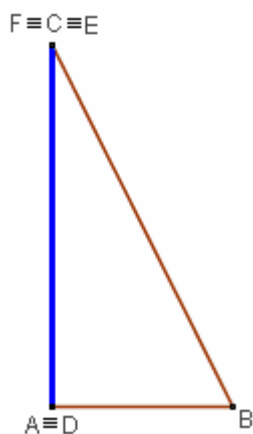
Svolgimento ESERCITAZIONE 1

In un triangolo ABC, rettangolo in A, con $AB = 1$ cm e $AC = 2$ cm, è inscritto un rettangolo ADEF (con D su AB, E su BC, F su AC).

Poniamo $AD = x$.



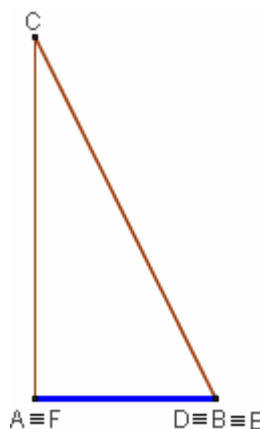
- a) Come degenera la figura per $x = 0$?
Disegna la figura degenerare.
Che valore attribuiremo al perimetro di questo rettangolo degenerare?



Per $x = 0$
il rettangolo si riduce
ad una coppia di
segmenti sovrapposti.

In questo caso “degenerare”,
in cui $AD = FE = 0$
e $AF = DE = 2$,
il perimetro
del rettangolo vale
 $2p(ADEF) = 0 + 0 + 2 + 2 =$
 $= 4$ cm

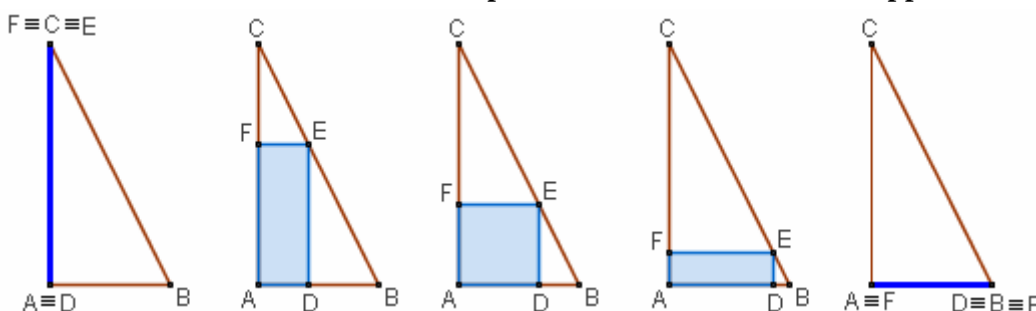
- b) Stesse domande per $x = 1$.



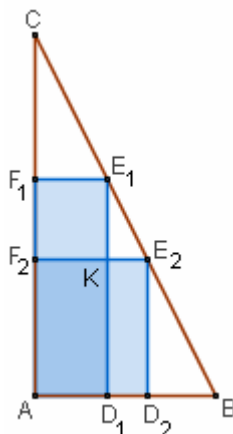
Anche per $x = 1$
il rettangolo si riduce
ad una coppia di
segmenti sovrapposti.

In questo caso “degenerare”,
in cui $AD = FE = 1$
e $AF = DE = 0$,
il perimetro
del rettangolo vale
 $2p(ADEF) = 1 + 1 + 0 + 0 =$
 $= 2$ cm

- c) Se facciamo variare x da 0 fino a 1, il perimetro di ADEF aumenta oppure diminuisce?



Sembra diminuire sempre ...
Ce ne convinciamo con sicurezza
se osserviamo che
ad ogni nuovo “fotogramma”
della sequenza,
le due altezze diminuiscono
PIU' di quanto nel frattempo
le due basi aumentino.



$$KE_1 > KE_2$$

Ma nel passaggio
da $AD_1E_1F_1$ a $AD_2E_2F_2$,

KE_1 rappresenta la diminuzione
di ciascuna delle due altezze

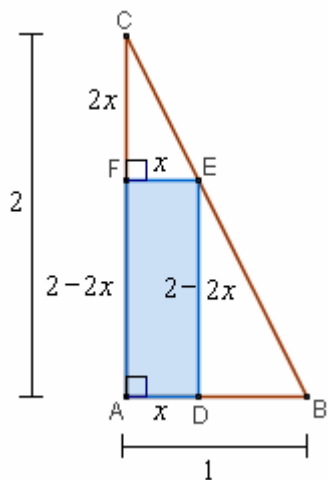
KE_2 rappresenta l'aumento
di ciascuna delle due basi

- d) In base alle considerazioni svolte al precedente punto c),
sei in grado di stabilire quali sono il valore minimo e il valore massimo
che il perimetro di ADEF può assumere?

Se il perimetro del rettangolo diminuisce sempre, al variare di x da 0 a 1, allora

Il valore massimo del perimetro si ha con $x = 0$ ($2p = 4$ cm) e il valore minimo con $x = 1$ ($2p = 2$ cm)

- e) Esprimi il perimetro di ADEF in funzione di x .



$FEC \sim ABC$ (rettangoli, $\hat{C}$ in comune)

quindi, così come $AC = 2AB$,
sarà anche $FC = 2FE = 2x$.

Perciò

$$AF = DE = 2 - 2x$$

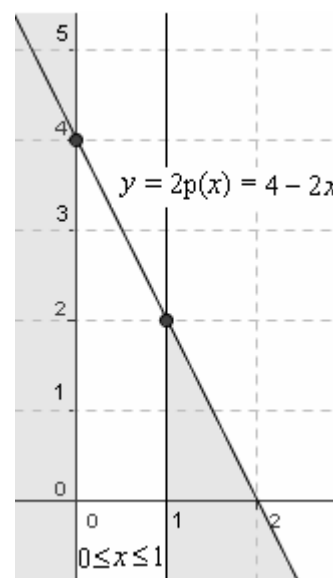
$$\begin{aligned} 2p(\text{ADEF}) &= 2AD + 2AF = \\ &= 2x + 2(2 - 2x) = 2x + 4 - 4x = \boxed{4 - 2x} \end{aligned}$$

- f) Fai un grafico della funzione $y = 2p(x)$.
L'osservazione del grafico va d'accordo
con la risposta data al punto d)?

Tracciamo il grafico della funzione $y = 4 - 2x$
la quale, limitatamente all'intervallo $0 \leq x \leq 1$,
esprime il perimetro del rettangolo ADEF.

Si tratta di una funzione "lineare" (= di 1° grado) $y = mx + q$,
con coefficiente angolare $m = -2$ e ordinata all'origine $q = 4$.

Il grafico è coerente con le nostre precedenti risposte:
al variare di x da 0 a 1, la y corrispondente
(che fornisce il valore del perimetro)
diminuisce sempre,
passando dal valore massimo $y = 4$ (con $x = 0$)
al valore minimo $y = 2$ (con $x = 1$).



- g) Per quale valore di x il perimetro di ADEF misura cm 3?

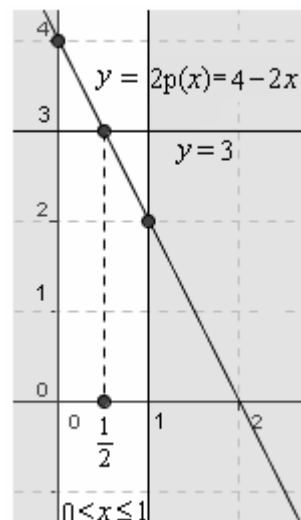
Basta porre $4 - 2x = 3$ e risolvere l'equazione:

$$-2x = -1; \quad x = \frac{1}{2}$$

- h) Risolvi graficamente l'equazione $2p(x) = 3$

$$\underbrace{4 - 2x}_{1^{\circ} \text{ m.}} = \underbrace{3}_{2^{\circ} \text{ m.}}$$

Il 2° membro è la funzione costante $y = 3$,
il cui grafico è una retta parallela all'asse x .

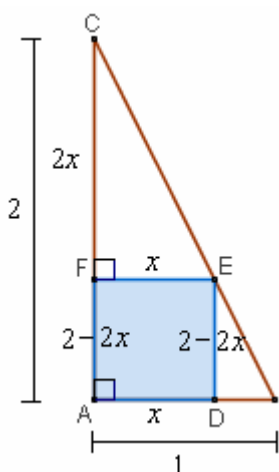


- i) Per quale valore di x il rettangolo ADEF è un quadrato?

Possiamo impostare l'equazione

$$\frac{AF}{2-2x} = \frac{FE}{x};$$

otteniamo $-3x = -2$, $x = \frac{2}{3}$



In alternativa, si poteva porre

$$\frac{2p}{4-2x} = 4x,$$

da cui $-6x = -4$, $x = \frac{2}{3}$

- j) Esprimi in funzione di x la diagonale del rettangolo ADEF

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{x^2 + (2-2x)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + 4 - 8x + 4x^2} = \sqrt{5x^2 - 8x + 4} \end{aligned}$$

- k) Per quale valore di x tale diagonale misura 1 cm?

$$\begin{aligned} \sqrt{5x^2 - 8x + 4} &= 1 \quad 5x^2 - 8x + 4 = 1; \quad 5x^2 - 8x + 3 = 0 \\ x &= 1 \vee x = 3/5 \quad (\text{entrambe accettabili; la 1ª è "sol. degenera"}) \end{aligned}$$

- l) Come potresti stabilire per quale valore di x la diagonale è minima e per quale è massima?

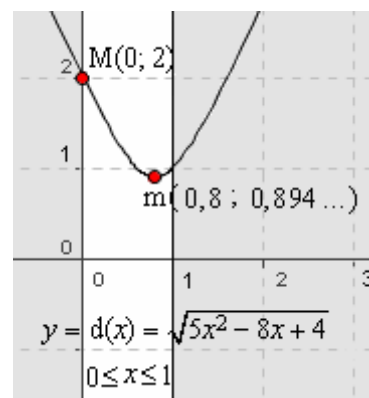
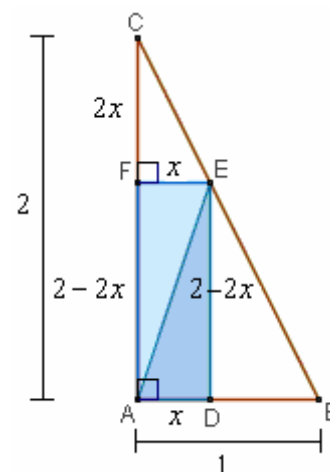
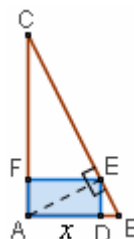
Si può tracciare al computer (vedi figura qui a destra) il grafico della funzione $y = d(x) = \sqrt{5x^2 - 8x + 4}$, che esprime la diagonale, e osservare questo grafico, oppure, se il software lo consente, servirsi del comando per la ricerca degli "estremi" (massimi o minimi).

D'altronde, si capisce che il radicale $\sqrt{5x^2 - 8x + 4}$ assume il suo valore minimo quando è minimo il suo radicando $5x^2 - 8x + 4$.

E qual è l'ascissa del vertice della parabola $y = 5x^2 - 8x + 4$? ...

Si può procedere anche per pura via geometrica.

- ♪ Si capisce che la diagonale è minima nella situazione in cui il punto E (che sta su BC) ha la minima distanza dal punto A, ossia quando la diagonale AE coincide con l'altezza relativa all'ipotenusa! Se calcoli tale altezza vedrai che vale $2/\sqrt{5} \approx 0,894$ e che il valore corrispondente di x è $4/5 = 0,8$, in pieno accordo col grafico.



- ♫ Allo stesso modo, è evidente che il punto del segmento BC con la massima distanza da A è l'estremo C, per il quale la distanza da A (= diag. del rettangolo "degenera") vale 2, e che corrisponde al valore $x = 0$.

RISPOSTE AI QUESITI DELLE ESERCITAZIONI DA 2 A 6

- 2) a) $S = 0$ b) $S = 0$ c) a partire dal valore 0 aumenta, tocca un massimo, poi diminuisce tornando a 0
- d) $m = \text{minimo} = 0$; per il massimo M non è così facile, lo sarà dopo aver fatto il grafico di cui al punto f): si vedrà che $M = 1/2$ (ordinata del vertice della parabola) g) 2 valori i) nessuno j) impossibile
- 3) d) $2p = 2r$ e) $2p = 4r$ f) $x = 0$, $2p_{\min} = 2r$ g) $x = 0,9r$ circa, $2p_{\max} = 4,5r$ circa
- 4) d) $S = 0$ e) $S = 0$ f) area minima $S = 0$ per $x = 0$ oppure $x = r$ g) $x = 0,7r$ circa, $S_{\max} = r^2$
- 5) e) no, dando a x valori molto alti il perimetro assume valori alti a piacere
- f) sì, è quello che si ottiene per $x \approx 1,06r$, e il suo perimetro è $\approx 5,66r$
- 6) c) no d) sì e) no, non è lo stesso. L'area minima si ha per $x \approx 1,15r$ ed è $\approx 1,73r^2$