I RADICALI

1. DEFINIZIONE DI RADICE (esercizi a pag. 18)

**Si dice "radice quadrata" (cubica, quarta, quinta, ...) di un numero reale $a \ge 0$,
quel numero reale $b \ge 0$ che elevato al quadrato (al cubo, alla quarta, alla quinta, ...)
dà come risultato a**.

(1) $\boxed{\textbf{DEFINIZIONE:}\ \sqrt[n]{a} = b \overset{def.}{\Leftrightarrow} b^n = a \quad (a,b \ge 0)}$ $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ *si legge*: *"se e solo se, per definizione"*

**Quindi L'OPERAZIONE DI ESTRAZIONE DI RADICE
È L'OPERAZIONE INVERSA DELL'ELEVAMENTO A POTENZA.**

Esempi:

$\sqrt[4]{81} = 3$ perché $3^4 = 81$; $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$ perché $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$; $\sqrt[2]{0,09} = 0,3$ perché $(0,3)^2 = 0,09$

- Un simbolo del tipo $\sqrt[n]{a}$ viene chiamato "**radicale**".
  Vale a dire, "radice" è il *risultato*,
  "radicale" è il *simbolo* dell'operazione di estrazione di radice.
- Il numero **n** viene detto "**indice**".
  Il numero **a** viene detto "**radicando**".

INDICE ↖ $\sqrt[n]{a}$ ↘ RADICANDO

RADICALE

- L'indice n è un numero naturale, maggiore o uguale a 1.
  Se l'indice vale 1, la radice è uguale al radicando:

(2) $\boxed{\sqrt[1]{a} = a}$

Domanda: *ma non è estremamente banale (e privo di interesse) un radicale con indice* 1?
… Sì, senz'altro è banale! Ma *non* è privo di interesse, perché
i radicali con indice 1 si rivelano assai utili ai fini di un'esposizione più sintetica della teoria.

- **L'indice 2 viene di norma sottinteso.** Ossia, anziché scrivere $\sqrt[2]{a}$ si usa scrivere $\sqrt{a}$:

(3) $\boxed{\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}}$ La convenzione è davvero vantaggiosa,
dato che la radice quadrata è di gran lunga la più utilizzata

Ancora qualche esempio:

$\sqrt[3]{1000} = 10$ perché $10^3 = 1000$; $\sqrt{25} = 5$ perché $5^2 = 25$;

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ perché $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$; $\sqrt[4]{0,0016} = 0,2$ perché $(0,2)^4 = 0,0016$

Osserviamo (gli esempi riportati lo illustrano bene) che

♪ se il radicando è maggiore di 1 il valore della radice è *minore* del radicando stesso
ma (IMPORTANTE!)

♫ se invece è minore di 1 (compreso fra 0 e 1) il valore della radice è *maggiore* del radicando stesso.

2. DUE IDENTITA' VERAMENTE FONDAMENTALI

Dalla definizione data di estrazione di radice si traggono direttamente e immediatamente le *identità*:

(4) $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$ $\qquad \left(\sqrt[\cancel{n}]{a}\right)^{\cancel{n}} = a$ Indice ed esponente sono uguali:
la radice e la potenza, operazioni inverse l'una dell'altra,
si "compensano", quindi si possono semplificare

(5) $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a}$ $\qquad \sqrt[\cancel{n}]{a^{\cancel{n}}} = a$ Anche qui, potenza e radice, operazioni inverse fra loro,
si "compensano", da cui la semplificazione

Dovremo tenerle sempre presenti, quali "pietre miliari" del nostro discorso.
In particolare, le utilizzeremo nel corso della dimostrazione di alcuni teoremi.

3. RADICANDO E RISULTATO POSITIVI. MA PERCHE' ?

E' importante ribadire che in questa nostra sistemazione teorica
SIA IL RADICANDO a CHE LA RADICE b SONO NUMERI POSITIVI O NULLI: $a \geq 0$, $b \geq 0$.

A ben riflettere, tale impostazione potrebbe essere contestata.
Ascoltiamo come ragiona Giannino il contestatore.

LE DUE OBIEZIONI DI GIANNINO

Siccome l'operazione di estrazione di radice viene pensata come l'inversa dell'elevamento a potenza, secondo me, che sono Giannino:

I) quando l'*indice* è *dispari*,
è logico che si possa anche estrarre la radice di un numero negativo:
ad esempio, trovo del tutto giustificato scrivere $\sqrt[3]{-8} = -2$,
perché in effetti $(-2)^3 = -8$;

II) quando l'*indice* è *pari* e il *radicando positivo*,
è logico che l'operazione ammetta DUE possibili risultati,
opposti fra loro (e NON un solo risultato positivo):
ad esempio, $\sqrt{49} = \pm 7$ perché $(+7)^2 = 49$ ma anche $(-7)^2 = 49$.

Le argomentazioni di Giannino sono giuste ed intelligenti! Tuttavia …

♥ RISPOSTA DELLA COMUNITA' MATEMATICA A GIANNINO

- Allo scopo di fissare un'impostazione teorica che consenta di evitare eccessive complicazioni, **è estremamente conveniente, quando si inizia** a studiare l'operazione di estrazione di radice, **supporre positivi** (in senso "largo": ≥ 0) **sia il radicando che il risultato**.
In questo modo, infatti, la trattazione fila senz'altro più "liscia".

- **In una seconda fase**, quando si termina lo studio di questi radicali con radicando e risultato positivi (che i testi chiamano generalmente "radicali assoluti"),
si procede a qualche semplicissima **integrazione della teoria** (noi faremo questo al paragrafo 17),
per poter accettare anche operazioni come

$$\sqrt[3]{-8} = -2 ; \quad \sqrt[5]{-0,00001} = -0,1 \quad \text{ecc.}$$

(**radicali con indice dispari, radicando negativo e risultato negativo**).

- **Invece con indice pari e radicando negativo**
l'estrazione di radice è un'operazione impossibile (NOTA):

$$\sqrt{-25} = \text{IMPOSSIBILE} ; \quad \sqrt[4]{-1} = \text{IMPOSSIBILE} \quad \text{ecc.}$$

Nessun numero reale, infatti, può fare da risultato in situazioni come queste, perché nessun numero dell'insieme $\mathbb{R}$, se elevato ad esponente pari, dà un risultato negativo.

NOTA - Salvo poi ridiscuterne quando viene introdotto l'insieme $\mathbb{C}$ dei "numeri complessi"; leggi il riquadro a fianco →

- **Nel caso, infine, di indice pari e radicando positivo** (es. $\sqrt{49}$), **si continua sempre ad assegnare all'operazione, convenzionalmente, un UNICO risultato, quello positivo:**

$$\sqrt{49} = 7 \text{ e NON } \cancel{\sqrt{49} = \pm 7} ; \quad \sqrt[4]{16} = 2 \text{ e NON } \cancel{\sqrt[4]{16} = \pm 2}$$

Questa convenzione è universalmente accettata a motivo di tutta una serie di inconvenienti che si verrebbero a creare qualora si decidesse invece di ammettere il "doppio risultato".

L'insieme $\mathbb{R}$ è l'insieme
dei numeri "reali", e contiene
sia i numeri interi
che quelli con la virgola,
sia i razionali che gli irrazionali,
sia i positivi che i negativi.
Contiene, insomma,
tutti i numeri rappresentabili
su di una *number line*,
che sono poi i numeri
"comunemente utilizzati".
In particolari contesti,
di matematica pura o
di Fisica o di Ingegneria,
intervengono anche *altri* numeri,
quelli dell'insieme $\mathbb{C}$.
… Sorprendente! Ne riparleremo!

*Ma adesso proseguiamo con lo studio dei radicali **"assoluti"**,*
quelli in cui il radicando e il risultato sono sempre positivi (≥ 0).

Scriveremo, per brevità, soltanto "radicali", ma intenderemo sempre,
fino al paragrafo 16 compreso, "radicali assoluti".

4. LA PROPRIETA' INVARIANTIVA DEI RADICALI (esercizi a pag. 19)

(6) $\boxed{\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{PROPRIETA' INVARIANTIVA}}$

ossia:

- **se il radicando è una potenza, il cui esponente è semplificabile con l'indice, è possibile effettuare la semplificazione: il valore del radicale non cambierà;**
- **e viceversa**, leggendo da destra verso sinistra:
  il valore di un radicale non cambia se si moltiplicano sia l'indice che l'esponente del radicando per uno stesso intero positivo k;
  o, in altre parole,
  se si moltiplica l'indice per un intero positivo k, e contemporaneamente si eleva il radicando all'esponente k.

Dimostrazione della (6)
Il ragionamento dimostrativo si basa su di una proprietà dei numeri reali della quale ci serviremo in seguito anche per altre dimostrazioni, e che quindi appare opportuno denominare con un termine convenzionale.
Chiameremo questa proprietà "principio E" ("E" come "Elevamento a potenza").

Il "**Principio E**"
Se elevando ad uno stesso esponente $p \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ due numeri reali POSITIVI O NULLI, si ottengono risultati uguali, allora si era partiti da numeri uguali

$$x^p = y^p \Rightarrow x = y \quad (x, y \text{ numeri reali non negativi, } p \text{ numero naturale non nullo})$$

Prendiamo dunque separatamente il primo e il secondo membro della uguaglianza (6) che vogliamo dimostrare, ed eleviamoli entrambi all'esponente nk.
Se così facendo otterremo risultati uguali,
ne dedurremo che eravamo partiti da numeri uguali, cioè che la (6) è corretta.

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^{nk} \underset{\substack{\text{identità}\\(4)}}{=} \boxed{a^{mk}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^k \underset{\substack{\text{identità}\\(4)}}{=} \left(a^m\right)^k = \boxed{a^{mk}}$$

OK!!! In virtù del "principio E", la (6) è corretta.

Poiché, elevando il 1° e il 2° m. dell'uguaglianza (6) da dimostrare al medesimo esponente nk, si è ottenuto lo stesso risultato a^{mk}, resta stabilito, in virtù del "principio E", che la (6) è corretta.

Ricordiamo l'identità (4): $\left(\sqrt[\cancel{n}]{a}\right)^{\cancel{n}} = a$

Esempi:

$\sqrt[12]{x^{15}} = \sqrt[\cancel{12}^{\,4}]{x^{\cancel{15}^{\,5}}} = \sqrt[4]{x^5}$; $\sqrt[4]{9} = \sqrt[\cancel{4}^{\,2}]{3^{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$; $\sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{49}$ (NOTA 1); $\sqrt{x+y} = \sqrt[6]{(x+y)^3}$

$\sqrt[8]{9x^2y^4z^6} = \sqrt[\cancel{8}^{\,4}]{\left(3xy^2z^3\right)^{\cancel{2}}} = \sqrt[4]{3xy^2z^3}$ quindi, direttamente: $\sqrt[\cancel{8}^{\,4}]{3^{\cancel{2}}\,x^{\cancel{2}}\,y^{\cancel{4}^{\,2}}\,z^{\cancel{6}^{\,3}}} = \sqrt[4]{3xy^2z^3}$ (NOTA 2)

$\sqrt[6]{\dfrac{a^3b^6}{125}} = \sqrt[\cancel{6}^{\,2}]{\left(\dfrac{ab^2}{5}\right)^{\cancel{3}}} = \sqrt{\dfrac{ab^2}{5}}$ quindi, direttamente: $\sqrt[\cancel{6}^{\,2}]{\dfrac{a^{\cancel{3}}\,b^{\cancel{6}^{\,2}}}{5^{\cancel{3}}}} = \sqrt{\dfrac{ab^2}{5}}$ (NOTA 2)

NOTA 1 - L'applicazione della proprietà invariantiva "nel senso della moltiplicazione" si rende necessaria in determinate circostanze, ad esempio quando, per la moltiplicazione o divisione di due radicali, occorre preliminarmente portare i radicali in gioco allo stesso indice.

♥ NOTA 2 - **ATTENZIONE BENE!**
Semplificazioni indice-esponenti di questo tipo **si possono fare quando a radicando compaiono ESCLUSIVAMENTE moltiplicazioni e/o divisioni,** mentre sarebbero ERRORE GRAVE in presenza di addizioni e sottrazioni!

$\cancel{\sqrt[\cancel{15}^{\,3}]{a^{\cancel{10}^{\,2}} + b^{\cancel{5}}}}$

NO, PER CARITA' !!!

Ad esempio,
$\sqrt[4]{\mathbf{3^4 + 4^4}} =$
$= \sqrt[4]{337} = \mathbf{4,28...}$
mentre
$\sqrt[2]{\mathbf{3^2 + 4^2}} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

5. PRODOTTO E QUOZIENTE DI RADICALI (esercizi a pag. 19)

Valgono le uguaglianze:

(7) $\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}}$ (8) $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$

Esse possono essere lette così:

(7) **il prodotto di due radicali aventi lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice, e per radicando il prodotto dei radicandi;**

(8) **il quoziente di due radicali aventi lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice, e per radicando il quoziente dei radicandi**.

Leggendo la (7) e la (8) da destra verso sinistra, otteniamo

(7') $\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$ (8') $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

ossia:

(7') **la radice di un prodotto è uguale al prodotto delle radici dei singoli fattori;**
(8') **la radice di un quoziente è uguale al quoziente delle radici del dividendo e del divisore**.

Dimostrazione di (7), (8), (7'), (8').

Basterà dimostrare, ovviamente, la (7) e la (8).
Dimostriamo la (7); la tecnica dimostrativa per la (8) è identica.

Dunque, consideriamo i due membri della (7) ed applichiamo il "principio E", utilizzando n come esponente a cui elevare ambo i membri:

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\underset{\substack{\text{identità}\\ \text{(4),}\\ \text{due volte}}}{=}\boxed{ab}$$

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n\underset{\substack{\text{identità}\\ \text{(4)}}}{=}\boxed{ab}$$

Poiché, elevando il 1° e il 2° membro dell'uguaglianza (7) da dimostrare al medesimo esponente n, si è ottenuto lo stesso risultato ab, resta stabilito, in virtù del "principio E", che la (7) è corretta.

Ricordiamo l'identità (4):
$\left(\sqrt[\cancel{n}]{a}\right)^{\cancel{n}}=a$

Esempi: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$; $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[\cancel{3}]{x^{\cancel{3}}}=x$; $\sqrt[4]{\dfrac{5}{16}}=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{16}}=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{2}$; $\sqrt{xy}:\sqrt{y}=\sqrt{xy:y}=\sqrt{x}$

Se vogliamo moltiplicare o dividere due radicali con indici diversi, dovremo prima portarli allo stesso indice applicando la proprietà invariantiva. Come indice comune converrà assumere il m.c.m. degli indici, detto "**minimo comune indice**".

Esempi:

$$\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{3^2}=\sqrt[12]{2^3\cdot3^2}=\sqrt[12]{8\cdot9}=\sqrt[12]{72}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{a^2}}=\sqrt[6]{\frac{a^3}{a^2}}=\sqrt[6]{a}$$

$$\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}}\cdot\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}=\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}}=\sqrt[4]{\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+2}}\cdot\frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{(x+1)^{\cancel{2}}}}=\sqrt[4]{\frac{x+2}{x+1}}$$

♥ **OCCHIO !!!**
Attento a non cadere in un "tipico" errore!

In generale, NON è vero che

$\cancel{\sqrt[n]{a\pm b}=\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}}$

NO, PER CARITA' !!!

Ad esempio,
$\sqrt{\mathbf{9+16}}=$
$=\sqrt{25}=\mathbf{5}$

mentre
$\sqrt{\mathbf{9}}+\sqrt{\mathbf{16}}=$
$=3+4=\mathbf{7}$

6. TRASPORTO DI UN FATTORE DENTRO E FUORI DAL SEGNO DI RADICE

(esercizi a pag. 21)

La catena $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$ mostra che vale l'uguaglianza

(9) $\boxed{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}\quad (a,b\ge 0)}$

Un fattore POSITIVO, che moltiplica un radicale, può essere fatto FILTRARE SOTTO IL SEGNO DI RADICE, PURCHE' LO SI ELEVI ad un esponente uguale all'indice.

Esempi: $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{8\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$; $\quad (a-b)\sqrt{a-b}=\sqrt{(a-b)^2(a-b)}=\sqrt{(a-b)^3}$

Sovente è invece utile, ai fini del calcolo, percorrere il CAMMINO INVERSO; ossia, ESTRARRE UN FATTORE da un radicale il cui radicando è un prodotto. Ciò è possibile solo se uno dei fattori del prodotto che sta a radicando è elevato ad un esponente maggiore o uguale all'indice della radice.

♥ A tale scopo (estrazione di un fattore dal segno di radice) non è necessario imparare regole particolari (NOTA); **basterà procedere "per tentativi"**, ponendosi sempre, a cose fatte, la seguente domanda: **"e se adesso riportassi dentro il fattore che ho estratto, ritroverei l'espressione di partenza?" In caso di risposta affermativa, tutto è OK!**

NOTA. La regola - non indispensabile, ripeto - direbbe che un fattore interno ad un radicale, e avente esponente non inferiore all'indice, può essere estratto dal segno di radice con esponente uguale al QUOZIENTE della *divisione intera* ESPONENTE:INDICE, e rimanere all'interno della radice con esponente uguale al RESTO della stessa divisione.

Es.: $\sqrt[3]{x^3y}=x\sqrt[3]{y}$; $\quad \sqrt[7]{a^{14}b}=a^2\sqrt[7]{b}$; $\quad \sqrt[5]{x^{23}}=x^4\sqrt[5]{x^3}$; $\quad \sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$ $\quad$ *PSST ... Guarda pure gli "esercizi svolti" di pag. 21!*

7. RADICE DI UN RADICALE (esercizi a pag. 21)

(10) $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}}$

La radice di un radicale è un radicale che ha per radicando lo stesso radicando, e per indice il prodotto degli indici.

Dimostrazione di (10). Col "Principio E":

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk}=\left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{n}\right]^{k}\underset{\substack{\text{identità}\\(4)}}{=}\left[\sqrt[k]{a}\right]^{k}\underset{\substack{\text{identità}\\(4)}}{=}\boxed{a}$$

$$\left(\sqrt[nk]{a}\right)^{nk}\underset{\substack{\text{identità}\\(4)}}{=}\boxed{a}$$

Poiché, elevando il 1° e il 2° membro dell'uguaglianza (10) da dimostrare al medesimo esponente nk, si è ottenuto lo stesso risultato a, resta stabilito, per il "principio E", che la (10) è corretta.

Ricordiamo l'identità (4): $\left(\sqrt[\cancel{n}]{a}\right)^{\cancel{n}}=a$

Esempi: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}}=\sqrt[12]{6}$; $\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}=\sqrt[8]{x}$; $\quad \sqrt{\sqrt[3]{121}}=\sqrt[6]{121}=\sqrt[\overset{3}{\cancel{6}}]{11^{\cancel{2}}}=\sqrt[3]{11}$

8. POTENZA DI UN RADICALE (esercizi a pag. 21)

(11) $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}}$

Per elevare a potenza un radicale, basta elevare a quell'esponente il radicando, mantenendo invariato l'indice. In altre parole: **un esponente esterno può essere fatto "filtrare sotto il simbolo di radice".**

Dim. di (11): lasciata al lettore. Col "Principio E", elevando allo stesso esponente n ambo i membri.

Esempi: $\left(\sqrt[7]{2}\right)^3=\sqrt[7]{2^3}=\sqrt[7]{8}$; $\quad \left(\sqrt[15]{a}\right)^6=\sqrt[\overset{5}{\cancel{15}}]{a^{\overset{2}{\cancel{6}}}}=\sqrt[5]{a^2}$ (NOTA 1); $\quad \left(\sqrt{3}\right)^4=\sqrt{3^4}=3^2=9$ (NOTA 2)

NOTA 1 - Si capisce allora che si può semplificare direttamente l'indice con l'esponente esterno, facendo poi filtrare questo all'interno soltanto alla fine: $\left(\sqrt[\overset{5}{\cancel{15}}]{a}\right)^{\overset{2}{\cancel{6}}}=\sqrt[5]{a^2}$

NOTA 2 - Nell'eseguire $\sqrt{3^4}$ si può pensare all'applicazione diretta della definizione di radice quadrata (qual è quel numero che elevato al quadrato dà come risultato 3^4? Evidentemente, è 3^2);
oppure
a una semplificazione che fa diventare l'indice uguale a 1, quindi fa scomparire il radicale (per definizione, un radicale con indice 1 lascia invariato il radicando e pertanto … è come se non ci fosse): $\sqrt{3^4}=\sqrt[\overset{1}{\cancel{2}}]{3^{\overset{2}{\cancel{4}}}}=\sqrt[\cancel{1}]{3^2}=3^2$

9. SOMMA ALGEBRICA DI RADICALI (esercizi a pag. 23)

Premessa

In Algebra, un'espressione costituita dal prodotto di un radicale per un fattore esterno viene chiamata ancora, per estensione, "radicale".
Quindi, vengono chiamate "radicali", ad esempio, le espressioni seguenti:

$$3\sqrt{5}; \qquad x\sqrt[3]{y}; \qquad 2(x+1)\sqrt{x+2}$$

Definizione

Quando abbiamo una coppia di espressioni della forma

$x\sqrt[n]{a},\ \ y\sqrt[n]{a}$

diciamo che siamo in presenza di due "radicali simili". Pertanto:

due radicali si dicono "simili" se hanno ugual indice e ugual radicando
(= se differiscono al più per il fattore esterno)

Esempi: $3\sqrt{5}$ e $11\sqrt{5}$ sono radicali simili; $x\sqrt[4]{x+y}$ *e* $2\sqrt[4]{x+y}$ sono radicali simili.

La somma algebrica di due o più radicali simili
è un radicale simile ai dati,
avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti:

(12) $\boxed{x\sqrt[n]{a}+y\sqrt[n]{a}=(x+y)\sqrt[n]{a}}$

La (12) non necessita di dimostrazione: è infatti evidente che il secondo membro è ottenibile dal primo mediante un raccoglimento a fattor comune.

Esempi:

$$3\sqrt{5}+11\sqrt{5}=14\sqrt{5}; \qquad x\sqrt[4]{x+y}+2\sqrt[4]{x+y}+2x\sqrt[4]{x+y}=(3x+2)\sqrt[4]{x+y}$$

$$7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}=10\sqrt[3]{2}; \qquad (a+b)\sqrt{3}-(a-b)\sqrt{3}=\left[(a+b)-(a-b)\right]\sqrt{3}=2b\sqrt{3}$$

Invece, se due radicali NON sono simili,
la loro somma algebrica dev'essere lasciata indicata
(NON si possono ridurre in alcun modo ad un unico radicale).

Esempi: $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}=\text{STOP!} \qquad \sqrt{2}+6\sqrt[3]{2}=\text{STOP!}$

OCCHIO!!!

Ed eccoti alcuni altri esempi di espressioncine in cui compaiono somme algebriche di radicali:

a) $\underline{3\sqrt{6}}\ \underline{\underline{-2\sqrt[3]{6}}}\ \underline{+10\sqrt{6}}\ \underline{+\sqrt{6}}\ \underline{\underline{-\sqrt[3]{6}}}=14\sqrt{6}-3\sqrt[3]{6}$

b) $\underline{7\sqrt{x}}\ \underline{\underline{-\sqrt{xy}}}\ \underline{-\sqrt{x}}\ \underline{+x\sqrt{x}}\ \underline{\underline{-8\sqrt{xy}}}+\sqrt[3]{xy}=(6+x)\sqrt{x}-9\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xy}$

c) $\sqrt{50}+\sqrt{8}=\sqrt{5^2\cdot 2}+\sqrt{2^3}=5\sqrt{2}+2\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

d) $\sqrt{x^3-x^2}-\sqrt{x^3-3x^2+3x-1}=\sqrt{x^2(x-1)}-\sqrt{(x-1)^3}=x\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x-1}=\left(\cancel{x}\cancel{-x}+1\right)\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1}$

e) $\sqrt{\dfrac{3}{4}}-\sqrt{\dfrac{27}{25}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}-\dfrac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{25}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{5}=\dfrac{5\sqrt{3}-6\sqrt{3}}{10}=-\dfrac{\sqrt{3}}{10}$

f) $\dfrac{a\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[6]{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}-1}=\dfrac{a\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^4}-\sqrt[6]{a}}{a-1}=\dfrac{a\sqrt[6]{a^7}-\sqrt[6]{a}}{a-1}=\dfrac{a^2\cdot\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{a}}{a-1}=\dfrac{(a^2-1)\sqrt[6]{a}}{a-1}=\dfrac{(a+1)\cancel{(a-1)}\sqrt[6]{a}}{\cancel{a-1}}=(a+1)\sqrt[6]{a}$

10. ESPRESSIONI “TIPO MONOMI, POLINOMI, PRODOTTI NOTEVOLI”

Osservazione preliminare, ovvia ma fondamentale:

♥ **quando una radice quadrata è elevata al quadrato, la radice scompare e rimane solo il radicando.**

♥ **Lo stesso avviene se una radice quadrata è moltiplicata per sé stessa.**

$$\left(\sqrt{7}\right)^2=7; \qquad \sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=\begin{cases}\left(\sqrt{7}\right)^2=7\\ \sqrt{7\cdot7}=\sqrt{7^2}=7\end{cases}$$

Nella pratica del calcolo, si possono tracciare delle “**barre di semplificazione**” (noi, negli esercizi svolti di questo testo, **non sempre le abbiamo riportate** sia per ragioni grafiche che per lasciare questo compito, se lo ritiene, al lettore):

$$\left(\cancel{\sqrt{7}}\right)^{\cancel{2}}=7 \qquad \cancel{\sqrt{7^{\cancel{2}}}}=7$$

$$\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^{14}}=\sqrt[\cancel{5}]{x^{\cancel{15}\,3}}=x^3$$

$$\left(-5\sqrt[6]{3}\right)^2=(-5)^2\left(\sqrt[\overset{3}{\cancel{6}}]{3}\right)^{\cancel{2}}=25\sqrt[3]{3}$$

Ed ecco qualche esempio svolto.

a) $\left(3\sqrt{5}\right)^2=3^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2=9\cdot5=45$

b) $\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)=\sqrt{15}+3-2\sqrt{18}=\sqrt{15}+3-2\cdot3\sqrt{2}=\sqrt{15}+3-6\sqrt{2}$

c) $\left(a\sqrt{b}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt{ab}-b\sqrt{b}\right)=a\sqrt{ab^2}-ab\cdot b-\sqrt[3]{b}\sqrt{ab}+b\sqrt[3]{b}\sqrt{b}=$

$=ab\sqrt{a}-ab^2-\sqrt[6]{b^2}\sqrt[6]{a^3b^3}+b\sqrt[6]{b^2}\sqrt[6]{b^3}=ab\sqrt{a}-ab^2-\sqrt[6]{a^3b^5}+b\sqrt[6]{b^5}$

d) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2=\left(5\sqrt{2}\right)^2+2\cdot5\sqrt{2}\cdot\left(-2\sqrt{3}\right)+\left(-2\sqrt{3}\right)^2=50-20\sqrt{6}+12=62-20\sqrt{6}=2\left(31-10\sqrt{6}\right)$

e) $\left(\sqrt[4]{a}+3\right)^2=\left(\sqrt[\overset{2}{\cancel{4}}]{a}\right)^{\cancel{2}}+2\cdot\sqrt[4]{a}\cdot3+3^2=\sqrt{a}+6\sqrt[4]{a}+9$

f) $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=8-7=1$

g) $\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}\right)\left(\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}\right)=\left(\sqrt{a-1}\right)^2-\left(\sqrt{a+1}\right)^2=(a-1)-(a+1)=\cancel{a}-1\cancel{-a}-1=-2$

h) $\left(\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}\right)^2=\left(\sqrt{a-1}\right)^2+\left(-\sqrt{a+1}\right)^2+2\sqrt{a-1}\left(-\sqrt{a+1}\right)=$

$=a\cancel{-1}+a\cancel{+1}-2\sqrt{(a-1)(a+1)}=2a-2\sqrt{a^2-1}=2\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)$

i) $\left(\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^2=\left(\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^2+2\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$

$=\sqrt{x}\cancel{+\sqrt{y}}+\sqrt{x}\cancel{-\sqrt{y}}+2\sqrt{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=2\sqrt{x}+2\sqrt{x-y}=2\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-y}\right)$

j) $\left(5-2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=5^2+\left(-2\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2+2\cdot5\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)+2\cdot5\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+2\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)=$

$=25+8+3-20\sqrt{2}-10\sqrt{3}+4\sqrt{6}=36-20\sqrt{2}-10\sqrt{3}+4\sqrt{6}=2\left(18-10\sqrt{2}-5\sqrt{3}+2\sqrt{6}\right)$

k) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\cdot\sqrt[3]{b}+3\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\left(\sqrt[3]{b}\right)^2+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b$

l) $\left(2\sqrt{2}-1\right)^3=\left(2\sqrt{2}\right)^3+3\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2\cdot(-1)+3\cdot2\sqrt{2}\cdot(-1)^2+(-1)^3=$

$=8\sqrt{8}+3\cdot8\cdot(-1)+3\cdot2\sqrt{2}\cdot1-1=16\sqrt{2}-24+6\sqrt{2}-1=22\sqrt{2}-25$

Fai ora tu qualcuno di questi ESERCIZI:

1) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ 2) $\left(3\sqrt{a+b}\right)^2$ 3) $\left(-2\sqrt{2}\right)^2$

4) $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$ 5) $\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)$ 6) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

7) $\left(2\sqrt{3}+1\right)\left(2\sqrt{3}-1\right)$ 8) $\left(2\sqrt{2}+3\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)$ 9) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)$

10) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ 11) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ 12) $\left(2\sqrt{2}+3\right)^2$

13) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2$ 14) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)^2$ 15) $\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{5}+4\sqrt{3}\right)^2$

16) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)$ 17) $\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$ 18) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$

19) $\left(1+2\sqrt{7}\right)\left(3+4\sqrt{11}\right)$ 20) $2\sqrt{5}\left(2\sqrt{10}-3\sqrt{5}\right)$ 21) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)$

22) $\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}-1\right)$ 23) $\left(\sqrt[4]{2}-1\right)^2$ 24) $\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}\right)$

25) $\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}\right)^2$ 26) $\left(\sqrt{3}+1\right)^3$ 27) $\left(\sqrt{3}+1\right)^4$

28) $\left(2\sqrt{3}-3\right)^3$ 29) $\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^3$ 30) $\left(\sqrt{2}-1\right)^5$

31) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6$ 32) $\left(a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\right)^2$ 33) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3$

34) $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)$ 35) $\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)^2$

36) $\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ 37) $\left(2\sqrt{a}-\sqrt{3a-1}\right)\left(2\sqrt{a}+\sqrt{3a-1}\right)$

38) $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)^2$ 39) $\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}-1\right)^2$

40) $\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[5]{a}\right)$ 41) $\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)^2$

42) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ 43) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+1\right)$

44) $\left(3\sqrt{x}+4\right)\left(5\sqrt{x}+6\right)$ 45) $\left(x\sqrt{x}+1\right)\left(x\sqrt{x}-2\right)$

46) $3\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-5y\right)$ 47) $\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$

48) $\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)$ 49) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{a+b}\right)^2$

ALTRI ESERCIZI a pag. 23

RISULTATI

1) 12 2) $9(a+b)=9a+9b$ 3) 8 4) 1 5) -1 6) 1 7) 11 8) -1 9) 2

10) $3+2\sqrt{2}$ 11) $5-2\sqrt{6}$ 12) $17+12\sqrt{2}$ 13) $38-12\sqrt{10}$ 14) $6-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

15) $121+12\sqrt{35}+16\sqrt{21}+24\sqrt{15}$ 16) $3+2\sqrt{6}$ 17) $\sqrt{2}$ 18) $2-3\sqrt{6}$

19) $3+4\sqrt{11}+6\sqrt{7}+8\sqrt{77}$ 20) $20\sqrt{2}-30=10\left(2\sqrt{2}-3\right)$ 21) $2+2\sqrt{3}=2\left(1+\sqrt{3}\right)$

22) $\sqrt{2}-1$ 23) $\sqrt{2}+1-2\sqrt[4]{2}$ 24) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}$ 25) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}+2\sqrt[12]{128}$ 26) $6\sqrt{3}+10$

27) $28+16\sqrt{3}$ 28) $78\sqrt{3}-135$ 29) $27\sqrt{3}+34\sqrt{2}$ 30) $29\sqrt{2}-41$ 31) $485-198\sqrt{6}$

32) $a^2b+ab^2+2ab\sqrt{ab}$ 33) $(a+3b)\sqrt{a}-(3a+b)\sqrt{b}$ 34) 1 35) $2\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)$ 36) $a-b$

37) $a+1$ 38) $2x+3+2\sqrt{x^2+3x+2}$ 39) $4a+b+1-4\sqrt{ab}-4\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ 40) $\sqrt{a}+\sqrt[20]{a^9}$

41) $x+1+3\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt[4]{x}$ 42) $a+\sqrt{ab}$ 43) $x-y-1+2\sqrt{y}$ 44) $15x+38\sqrt{x}+24$

45) $x^3-x\sqrt{x}-2$ 46) $6x-15y\sqrt{x}$ 47) $2\left(1+\sqrt{1-x}\right)$ 48) $2\sqrt{x}$ 49) $2a+b-2\sqrt{a^2+ab}$

11. L'AGGETTIVO "IRRAZIONALE"

Ripassiamo innanzitutto alcune cose già viste in passato.

Un **numero** è detto

- "**RAZIONALE**" se è esprimibile come frazione, ossia come "ratio", "rapporto", fra due interi:

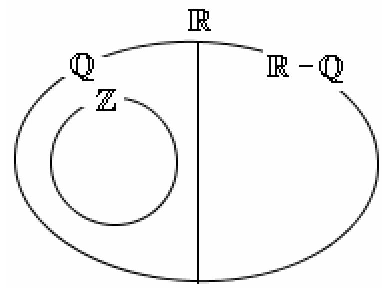
  es. $\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{12}$; $+3=+\frac{3}{1}$; $-0,7=-\frac{7}{10}$; $1,\overline{2}=1,22222...=\frac{12-1}{9}=\frac{11}{9}$; ecc. ecc.

- "**IRRAZIONALE**" in caso contrario.
  Sappiamo che quando si trasforma una frazione in numero decimale, eseguendo la divisione,
  si ottiene sempre un numero decimale *finito*, oppure *periodico*;
  NON si potrà mai ottenere un numero decimale *illimitato non periodico*.
  Bene! Ciò implica allora che **i numeri con la virgola illimitati non periodici sono tutti irrazionali**.

Dal punto di vista insiemistico, **gli interi sono considerati come casi particolari di razionali** (ad es., 5 = 5/1); **l'insieme costituito da tutti i numeri razionali, più anche tutti i numeri irrazionali, viene detto "insieme dei numeri REALI"** e indicato con uno dei due simboli $\mathbb{R}$ oppure $(-\infty, +\infty)$.

Quando si parla di "numeri reali", ci si riferisce di norma ai "reali *relativi*".
L'insieme dei reali *assoluti* (= senza segno) può essere indicato con $\mathbb{R}_a$.

Il simbolo per indicare l'insieme dei RAZIONALI è $\mathbb{Q}$
(dal tedesco Quotient = Quoziente, rapporto).
Per indicare l'insieme degli IRRAZIONALI
si utilizza di solito l'operazione di "differenza insiemistica", scrivendo $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
(in pratica, se dall'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali noi togliamo gli elementi
di $\mathbb{Q}$, ossia i razionali, otteniamo l'insieme dei non-razionali o irrazionali).
Quando si dice "numeri razionali", senza specificare altro,
si intende "razionali *relativi*"; se si desidera indicare l'insieme
dei razionali *assoluti* (= senza segno), al posto di $\mathbb{Q}$ si scrive $\mathbb{Q}_a$.



$\mathbb{R}=\{\text{reali (relativi)}\}$
$\mathbb{Q}=\{\text{razionali (relativi)}\}$
$\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\{\text{irrazionali (relativi)}\}$
$\mathbb{Z}=\{\text{interi (relativi)}\}$

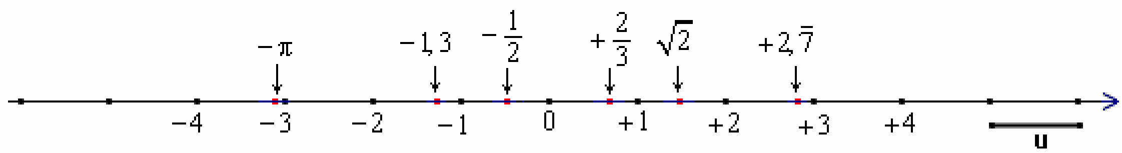
Ad esempio, **si dimostra che sono irrazionali**:

- **i decimali illimitati non periodici**, come abbiamo già sottolineato
- **le radici quadrate degli interi che non sono "quadrati perfetti"**, come $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ...
- **le radici n-esime degli interi che non sono n-esime potenze perfette**, come $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$, ...
- **il numero** π, che esprime il rapporto fra una circonferenza e il suo diametro,
  o anche, volendo, "la misura della circonferenza, se come unità di misura si prende proprio il diametro".
  La prima dimostrazione dell'irrazionalità di π si deve al francese J. Lambert (2^a metà del XVIII secolo).

L'insieme $\mathbb{R}$ è "rappresentabile sopra una retta", nel senso che, presa una "number line"
(= retta dotata di origine, orientamento e unità di misura),

♪ **ad ogni punto corrisponde uno e un solo numero reale (detto "ascissa" di quel punto) e viceversa**
♫ **ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto (detto "immagine" di quel numero).**

In ogni intervallino, anche piccolissimo, della "number line", troviamo sempre infiniti punti con ascissa razionale ed infiniti altri punti con ascissa irrazionale.



Esistono infiniti numeri razionali, ed esistono pure infiniti numeri irrazionali; però, in un certo senso, i numeri irrazionali sono "più infiniti ancora" dei razionali
(la loro "numerosità" ha un "grado di infinito" maggiore).
Affascinante! Se vuoi approfondire, puoi andare alla pagina 402 di questo volume.

Andiamo ora alla dimostrazione del fantastico, importantissimo

TEOREMA	**Il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale, ossia: non esiste nessuna frazione ("frazione" in senso stretto: "rapporto fra due interi") la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.**

Questo enunciato si dimostra ragionando *per assurdo.*
Supponiamo, per assurdo, che esista una frazione la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.

Detta, per fissare le idee, $\frac{m}{n}$ tale frazione, avremo: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Riduciamo la frazione m/n ai minimi termini, se già non lo è; otterremo una frazione p/q,
con p e q primi fra loro (cioè: privi di divisori comuni; in altre parole: non più semplificabili), tale che
$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Si potrà scrivere quindi la seguente catena di deduzioni:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \;\rightarrow\; \frac{p^2}{q^2} = 2 \;\rightarrow\; p^2 = 2q^2 \;\rightarrow\; \text{il numero } p^2 \text{ è pari} \;\rightarrow\; \boxed{p \text{ è PARI}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \text{esiste un INTERO } p' \text{ tale che } p = 2p' \;\rightarrow\; (2p')^2 = 2q^2 \;\rightarrow\; 4p'^2 = 2q^2 \;\rightarrow\; q^2 = 2p'^2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \text{il numero } q^2 \text{ è pari} \;\rightarrow\; \boxed{q \text{ è PARI}}$$

Ora, nel corso di tale catena abbiamo dedotto che p e q sono entrambi PARI, cioè entrambi divisibili per 2,
mentre eravamo partiti dal presupposto che la frazione p/q fosse ridotta ai minimi termini,
vale a dire non più semplificabile.

Ricapitoliamo:
supponendo che esistesse una frazione m/n tale che $(m/n)^2 = 2$, siamo pervenuti a conclusioni assurde.
Non esiste perciò alcuna frazione che elevata al quadrato dia 2.

♥ **Poiché il primo numero di cui fu scoperta l'irrazionalità fu $\sqrt{2}$, l'aggettivo "irrazionale" finì per essere storicamente collegato con l'idea della presenza di una radice!**

Precisiamo meglio.

I) Dicendo che **un'ESPRESSIONE è "irrazionale"**, si intende affermare che **contiene il segno di radice**.
Ad esempio, l'espressione $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x+1} - x + 2$ è "irrazionale".
Osserviamo che un'espressione come $\sqrt{2}+1$ può meritarsi l'aggettivo "irrazionale" per *entrambi* i motivi:

a) pensata come *espressione*, contiene il segno di radice;
b) pensata come *numero*, non è esprimibile sotto forma di rapporto fra due interi:
infatti, se per assurdo lo fosse, si avrebbe
$\sqrt{2}+1 = \frac{m}{n}$ (per due opportuni interi m, n) e ne seguirebbe $\sqrt{2} = \frac{m}{n} - 1 = \frac{m-n}{n}$
impossibile in quanto, come abbiamo visto, $\sqrt{2}$ non è esprimibile come rapporto fra due interi.

A proposito, con riferimento ai numeri:
a) sommando un irrazionale con un razionale si ottiene sempre un irrazionale (pensa all'es. prec. $\sqrt{2}+1$);
b) sommando due numeri razionali si ottiene sempre un numero razionale (ovviamente);
c) sommando due irrazionali si può ottenere, a seconda dei casi, un irrazionale oppure un razionale.
Esempi: $\underbrace{3\sqrt{2}}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} + \underbrace{\sqrt{2}}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} = \underbrace{4\sqrt{2}}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$ ma $\underbrace{(5-\sqrt{3})}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} + \underbrace{(\sqrt{3}-1)}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} = \underbrace{4}_{\in\mathbb{Q}}$

II) Quando si dice che **un'EQUAZIONE** è "**irrazionale**",
si intende affermare che **contiene almeno una volta l'incognita sotto il segno di radice.**
Ad esempio, l'equazione $\sqrt{x+3} - 2x = 0$ è "irrazionale".
CONTROESEMPIO - Osserviamo che invece l'equazione $x^2 - 4x - 2\sqrt{3} = 0$ NON è irrazionale:
si tratta semmai di una equazione "a *coefficienti* irrazionali".

III) Quando si dice che **una FUNZIONE** è "**irrazionale**",
si intende affermare che **in essa la variabile indipendente compare almeno una volta sotto radice**.

NUMERO IRRAZIONALE: numero non esprimibile come rapporto (latino: *ratio*) fra due interi
ESPRESSIONE IRRAZIONALE: espressione contenente il segno di radice
EQUAZIONE IRRAZIONALE: equazione in cui l'incognita compare almeno una volta sotto radice
FUNZIONE IRRAZIONALE: funzione in cui la var. indipendente compare almeno una volta sotto radice

12. RAZIONALIZZAZIONE DEL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE

(esercizi a pag. 23)

L'esperienza mostra che in parecchi casi (non sempre, ma con grande frequenza), quando in una frazione compare **il SEGNO DI RADICE a DENOMINATORE**, tale segno di radice **"dà fastidio"**:

- può essere scomodo ai fini della valutazione del valore numerico del risultato,
- o per le esigenze del calcolo letterale,
- oppure può influire negativamente sulla compattezza e/o eleganza dell'espressione.

E' spesso conveniente, dunque, **operare sulla frazione (senza alterarne, beninteso, il valore),** in modo da **cacciar via il segno di radice dal denominatore**.
Tale procedimento prende il nome di "**razionalizzazione del denominatore**".

Esso si effettua applicando la **PROPRIETÀ INVARIANTIVA DELLE FRAZIONI**, ossia **moltiplicando sia "sopra" che "sotto" per uno stesso numero, da scegliersi opportunamente (= da scegliersi in modo tale che, una volta eseguite le moltiplicazioni, il nuovo denominatore non contenga più il segno di radice).**

Due esempi:

♪ $\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=2\sqrt{2}$

♫ $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}\cdot\dfrac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{3^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\dfrac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{9-7}=\dfrac{\cancel{2}\left(3-\sqrt{7}\right)}{\cancel{2}}=3-\sqrt{7}$

Il fattore per cui moltiplicare ambo i termini della frazione, onde eliminare il segno di radice dal denominatore, prende il nome di "**fattore razionalizzante**".

Passiamo ora in rassegna le casistiche più rilevanti di razionalizzazione.

❑ $\dfrac{3}{\sqrt{15}}=\dfrac{3}{\sqrt{15}}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}=\dfrac{\cancel{3}\sqrt{15}}{\cancel{15}_{\,5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$; $\quad\dfrac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{xy}}{3y}$

Regola 1: $\dfrac{1}{a\sqrt{b}}\cdot\boxed{\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}}=\dfrac{\sqrt{b}}{ab}$

❑ $\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=\dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\cancel{2}}=2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}+3}=\dfrac{2\sqrt{2}+3}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-3^2}=\dfrac{2\sqrt{2}+3}{8-9}=\dfrac{2\sqrt{2}+3}{-1}=-\left(2\sqrt{2}+3\right)$

Regola 2: $\dfrac{1}{a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}}\cdot\boxed{\dfrac{a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}}{a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}}}=\dfrac{a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}}{a^2b-c^2d}$

❑ $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^4}}=\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{a}$; $\quad\dfrac{xy}{3\sqrt[5]{x^4y^2t}}=\dfrac{xy}{3\sqrt[5]{x^4y^2t}}\cdot\dfrac{\sqrt[5]{xy^3t^4}}{\sqrt[5]{xy^3t^4}}=\dfrac{xy\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3\sqrt[5]{x^5y^5t^5}}=\dfrac{\cancel{xy}\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3\cancel{xy}t}=\dfrac{\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3t}$

Regola 3:

$\dfrac{1}{x\sqrt[n]{a^mb^pc^k}}\cdot\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}}=\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}{x\sqrt[n]{a^nb^nc^n}}=\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}{x\cdot abc}\quad$ $(m,\ p,\ k<n)$ NOTA

NOTA: se così non fosse, si estrarrebbero innanzitutto uno o più fattori e ci si ricondurrebbe a questo caso

❑ $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\cancel{2}+\cancel{3}+2\sqrt{6}\cancel{-5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

L'ultimo esempio illustra la
Regola 4:
Quando a denominatore abbiamo la somma algebrica di tre termini con radicali quadratici,
prima di tutto si raggruppano due fra i termini entro parentesi,
poi si moltiplica per l'espressione che permette di ottenere il prodotto notevole
$(a+b)(a-b)$,
tenendo presente che in questo caso occorrono
DUE FASI SUCCESSIVE per completare la razionalizzazione.

Vediamo un'altra situazione analoga:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}-\left(\sqrt{5}-1\right)}\cdot\frac{2\sqrt{2}+\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\sqrt{2}+\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{8-\left(5-2\sqrt{5}+1\right)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{8-5+2\sqrt{5}-1}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{2+2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{2\left(1+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{2(1-5)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1-2\sqrt{10}-5+\sqrt{5}}{2\cdot(-4)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-6}{-8}=-\frac{\cancel{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}-3\right)}{\cancel{8}\,4}=$$

$$=\frac{3+\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$$

❑ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+7}$ Questo caso, bizzarro ma rilevante, si affronta nel modo seguente:
si "tratta" l'espressione $(\sqrt[3]{5}+7)$ come un binomio $(a+b)$
che verrà moltiplicato per un'opportuna espressione,
in modo da ottenere come risultato a^3+b^3 e mandar via così le radici cubiche.
Ma questa espressione è il trinomio (a^2-ab+b^2) !
Infatti è noto che $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.
Dunque, nel nostro esempio,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+7}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}+7}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-7\sqrt[3]{5}+49}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-7\sqrt[3]{5}+49}=\frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-7\sqrt[3]{5}+49}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3+7^3}=\frac{\sqrt[3]{25}-7\sqrt[3]{5}+49}{5+343}=\frac{\sqrt[3]{25}-7\sqrt[3]{5}+49}{348}$$

Ancora due razionalizzazioni del medesimo tipo:

♪ $$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{4}\right)^3}_{=5-4=1}}=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+2\sqrt[3]{2}$$

♫ $$\frac{4}{5-3\sqrt[3]{2}}=\frac{4}{5-3\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}=\frac{4\left(25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}\right)}{125-54}=\frac{4\left(25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}\right)}{71}$$

Regola 5: $$\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a\pm b}$$

13. RADICALI DOPPI (esercizi a pag. 26)

Si dice "radicale doppio" un'espressione della forma

$$\sqrt{\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}}$$

A volte (non sempre!) un radicale doppio si può trasformare nella somma algebrica di due espressioni che non contengano più radici quadrate "sovrapposte".

SPEZZAMENTO DI UN RADICALE DOPPIO PER TENTATIVI

L'idea di "spezzare", se possibile, un radicale doppio, parte da un'osservazione.
Quando si esegue il quadrato di un binomio nel quale uno o entrambi i termini contengano radici quadrate, si incontrano situazioni come quelle che seguono:

$$\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2 = \underline{\underline{7}} + 2\sqrt{35} \underline{\underline{+5}} = 12 + 2\sqrt{35}$$

$$\left(4\sqrt{2}-3\right)^2 = \underline{\underline{32}} - 24\sqrt{2} \underline{\underline{+9}} = 41 - 24\sqrt{2}$$

vale a dire:
inizialmente si ottengono tre termini (quadrato del primo / doppio prodotto / quadrato del secondo), ma **nel passaggio successivo questi tre termini si riducono a due**, per il fatto che i due quadrati, non contenendo più la radice, possono diventare per somma algebrica un termine solo.
Rimane poi il doppio prodotto, che conserva la radice.

In definitiva, dunque,
dal quadrato di un binomio "a base di radici quadrate" si ottiene un altro binomio, con:

- ♪ **un termine senza radice (proveniente dalla somma dei quadrati)**
- ♫ **e un termine che presenta ancora la radice (proveniente, questo, dal doppio prodotto).**

Ma allora, di fronte ad un radicale doppio $\sqrt{\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}}$, noi possiamo "sperare" che l'espressione sotto la radice quadrata principale, $\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}$, risulti essere proprio il risultato dello sviluppo di un opportuno quadrato di binomio.
Se dovesse verificarsi questo caso "fortunato", scriveremmo $\sqrt{\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}} = \sqrt{(\ldots \pm \ldots)^2}$ e nel passaggio dopo manderemmo via la radice semplificandola con l'esponente 2.

Vediamo QUALCHE ESEMPIO.

❑ Prendiamo il radicale doppio: $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.

Il nostro obiettivo è di riuscire a scrivere $\sqrt{17+\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{doppio prodotto}}}{12\sqrt{2}}} = \sqrt{(\ldots+\ldots)^2}$

Se $\textit{doppio prodotto} = 12\sqrt{2}$, sarà $\textit{prodotto} = 6\sqrt{2}$
e si tratta quindi di determinare due numeri che abbiano come prodotto $6\sqrt{2}$ e come somma dei quadrati 17.

$$\boxed{\textit{prodotto} = 6\sqrt{2}} \rightarrow \begin{array}{l} \left(6,\ \sqrt{2}\right)\ \textit{oppure} \\ \left(6\sqrt{2},\ 1\right)\ \textit{oppure} \\ \left(3,\ 2\sqrt{2}\right)\ \textit{oppure} \\ \quad\ldots \end{array}$$

Fra le varie possibilità dobbiamo cercare (se esiste) quella per cui la somma dei quadrati è 17;
provando a fare i calcoli, vediamo che $3^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 9+8=17$ e di conseguenza
la coppia che fa al caso nostro sarà $\left(3,\ 2\sqrt{2}\right)$ da cui, finalmente:

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2} = 3+2\sqrt{2}.$$ *Ce l'abbiamo fatta! E' spezzato!!!*

- L' esempio che segue è più complicato, per un paio di ragioni.

$$\sqrt{62-20\sqrt{6}}$$

doppio prodotto $\underset{\text{NOTA}}{=} 20\sqrt{6} \to \boxed{\textit{prodotto} = 10\sqrt{6}}$

da cui le possibilità

$$\left(10,\ \sqrt{6}\right) \textit{ opp. } \left(10\sqrt{6},\ 1\right) \textit{ opp. } \left(5\sqrt{6},\ 2\right) \textit{ opp. } \left(2\sqrt{6},\ 5\right)$$

sennonché, disgraziatamente:

$$10^2+\left(\sqrt{6}\right)^2=100+6=106\neq 62; \qquad \left(10\sqrt{6}\right)^2+1^2=600+1=601\neq 62;$$

$$\left(5\sqrt{6}\right)^2+2^2=150+4=154\neq 62; \qquad \left(2\sqrt{6}\right)^2+5^2=24+25=49\neq 62$$

NOTA
Sì, è vero, rigorosamente sarebbe
doppio prodotto $= -20\sqrt{6}$,
ma è più comodo per noi pensare al VALORE ASSOLUTO dei termini; tanto, alla fine, metteremo il segno "–" in mezzo.

Tuttavia, possiamo trovare altre coppie con prodotto $10\sqrt{6}$ se spezziamo $\sqrt{6}$ in $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$;
in definitiva, vediamo che la coppia cercata è $\left(2\sqrt{3},\ 5\sqrt{2}\right)$.

Dunque scriviamo $\sqrt{62-20\sqrt{6}}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{3}-5\sqrt{2}\ \ldots$

… e a questo punto saremmo molto soddisfatti, se qualche scocciatore, purtroppo a ragione, non ci dicesse invece che IL NOSTRO RISULTATO E' SBAGLIATO!

Il fatto è che $2\sqrt{3}-5\sqrt{2}$ è un numero NEGATIVO: $2\sqrt{3}-5\sqrt{2}\approx 2\cdot 1{,}7-5\cdot 1{,}4=3{,}4-7<0$
e un numero negativo, per quanto abbiamo detto riguardo ai segni,
non può mai essere il risultato dell'estrazione di una radice quadrata!

Niente paura … basterà scambiare l'ordine dei termini, in modo da
far sì che la base del quadrato sia positiva, prima di mandar via l'esponente con la radice:

$$\sqrt{62-20\sqrt{6}}=\sqrt{\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2}=\underbrace{5\sqrt{2}-2\sqrt{3}}_{>0} \qquad \textit{Ora è tutto OK.}$$

SPEZZAMENTO DI UN RADICALE DOPPIO TRAMITE FORMULA

Per spezzare (*tentare* di spezzare) un radicale doppio,
esiste anche un'apposita FORMULA (difficilotta):

$$(13) \qquad \boxed{\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$

Per esercizio, controllane tu stesso la validità verificando che, se si eleva al quadrato il secondo membro, si ottiene il radicando del radicale a primo membro, ossia $a\pm\sqrt{b}$

Esempio:

$$\sqrt{10-3\sqrt{11}} \overset{\textbf{NOTA}}{=} \sqrt{10-\sqrt{99}}=$$

$$=\sqrt{\frac{10+\sqrt{100-99}}{2}}-\sqrt{\frac{10-\sqrt{100-99}}{2}}=\sqrt{\frac{10+1}{2}}-\sqrt{\frac{10-1}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{11}{2}}-\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{22}-3\sqrt{2}}{2}$$

NOTA: è indispensabile, se si vuole applicare la formula, ricondursi innanzitutto alla situazione cui la formula si riferisce:
$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ SENZA fattore fuori da $\sqrt{b}$.
In pratica,
se c'è un fattore fuori da $\sqrt{b}$**, questo fattore va fatto** immediatamente **filtrare all'interno**;
solo a questo punto la formula sarà applicabile.

Ma … **esiste un CRITERIO per stabilire a priori se un radicale doppio è spezzabile oppure no?**
Risposta affermativa: **lo "spezzamento" di un radicale doppio si può effettuare se e soltanto se il numero** $\boxed{a^2-b}$ **presente nella formula è un QUADRATO PERFETTO**.

Se non lo è, abbandoniamo pure l'impresa:
il radicale doppio non si potrà spezzare, né con la formula, né per tentativi.

14. ESPRESSIONI VARIE CON RADICALI (esercizi alle pagg. 26-27)

Presentiamo qualche esempio svolto.

a) $\boxed{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}+\sqrt[6]{64x^3+128x^2+64x}}$

Dobbiamo moltiplicare i primi due radicali, dopo averli portati allo stesso indice;
nell'ultimo radicale, invece, scomponiamo in fattori il radicando:
potendosi raccogliere $64=2^6$, si potrà estrarre un fattore 2.

L'estrazione di un fattore, quando è possibile,
è quasi sempre conveniente negli esercizi coi radicali.

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}+\sqrt[6]{64x^3+128x^2+64x}=$$

$$=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2}}+\sqrt[6]{64x\left(x^2+2x+1\right)}=$$

$$=\sqrt[6]{x^{\cancel{3}}\cdot\frac{(x+1)^2}{\cancel{x^2}}}+\sqrt[6]{64x(x+1)^2}=\sqrt[6]{x(x+1)^2}+2\sqrt[6]{x(x+1)^2}\underset{\substack{\text{radicali}\\\text{simili}}}{=}3\sqrt[6]{x(x+1)^2}$$

b) $\boxed{\dfrac{\sqrt{25a^2-25}}{\sqrt{4a+4}+\sqrt{9a+9}}}$

Innanzitutto raccogliamo ed estraiamo un fattore:

$$\frac{\sqrt{25a^2-25}}{\sqrt{4a+4}+\sqrt{9a+9}}=$$

$$=\frac{\sqrt{25\left(a^2-1\right)}}{\sqrt{4(a+1)}+\sqrt{9(a+1)}}=\frac{5\sqrt{a^2-1}}{2\sqrt{a+1}+3\sqrt{a+1}}=\frac{\cancel{5}\sqrt{(a+1)(a-1)}}{\cancel{5}\sqrt{a+1}}\underset{\substack{\text{quoziente}\\\text{di radicali}\\\text{con lo stesso}\\\text{indice}}}{=}\sqrt{\frac{\cancel{(a+1)}(a-1)}{\cancel{a+1}}}=\sqrt{a-1}$$

c) $\boxed{\dfrac{\sqrt{15}}{7-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}}$

Cominciamo a svolgere i calcoli a denominatore, poi vedremo.

$$\frac{\sqrt{15}}{7-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{7-\left(5+2-2\sqrt{10}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{\cancel{7}\cancel{-7}+2\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\cancel{15}^{\,3}}{\cancel{10}^{\,2}}}\underset{\substack{\text{conviene}\\\text{spezzare}\\\text{il radicale}}}{=}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

d) $$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}}$$

Questo esercizio si presta ad essere eseguito in due modi alternativi:

♪ *razionalizzando* le prime due frazioni …

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}-\frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{a\cancel{-\sqrt{ab}}\cancel{-\sqrt{ab}}-b\cancel{+2\sqrt{ab}}}{a-b}=\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{a-b}}=1$$

♫ … oppure *scomponendo in fattori* il denominatore della terza frazione

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)-\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{a\cancel{-\sqrt{ab}}\cancel{-\sqrt{ab}}-b\cancel{+2\sqrt{ab}}}{a-b}=\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{a-b}}=1$$

e) $$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)-\sqrt{x-1}}$$

In quest'altra espressione, è decisamente poco conveniente razionalizzare:
converrà invece fare il denominatore comune entro ciascuna parentesi.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)-\sqrt{x-1}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}:\frac{1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x-1}=\frac{\cancel{1+\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{\cancel{1+\sqrt{x^2-1}}}-\sqrt{x-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x-1}=\frac{\cancel{\sqrt{x+1}}\cdot\sqrt{x-1}}{\cancel{\sqrt{x+1}}}-\sqrt{x-1}=\cancel{\sqrt{x-1}}\cancel{-\sqrt{x-1}}=0$$

f) $$\boxed{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}+\frac{10}{\sqrt{2}}}$$

Qui si potrà procedere razionalizzando, e spezzando i radicali doppi.

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}+\frac{10}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}+\frac{10}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1}-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\cancel{10}^{5}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2-1}+5\sqrt{2}=$$

$$=\cancel{2}\cancel{+1}\underline{-2\sqrt{2}}\cancel{-2}\cancel{-1}\underline{-2\sqrt{2}}\,\underline{+5\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

15. ESERCIZI SUI RADICALI

a) DEFINIZIONE DI RADICE, IDENTITA' FONDAMENTALI

Nei casi in cui il risultato non sia "tondo", **evita la macchinetta** procedendo invece **per tentativi**.
Ad esempio, per calcolare (meglio: approssimare) il numero $\sqrt{30}$ fino alla prima cifra decimale, puoi fare così:

$5^2=25 \quad 6^2=\boxed{36>30}$ QUINDI $5<\sqrt{30}<6$

$5,1^2=26,01 \quad 5,2^2=27,04 \quad 5,3^2=28,09 \quad 5,4^2=29,16 \quad 5,5^2=\boxed{30,25>30}$ QUINDI $5,4<\sqrt{30}<5,5$

1) $\sqrt[3]{8}$	2) $\sqrt[4]{625}$	3) $\sqrt{49}$	4) $\sqrt[5]{32}$	5) $\sqrt[3]{27}$
6) $\sqrt[7]{1}$	7) $\sqrt[8]{0}$	8) $\sqrt{-4}$	9) $\sqrt[3]{125}$	10) $\sqrt{36}$
11) $\sqrt[4]{16}$	12) $\sqrt[3]{216}$	13) $\sqrt{196}$	14) $\sqrt[4]{10000}$	15) $\sqrt[5]{243}$
16) $\sqrt{900}$	17) $\sqrt{\frac{9}{16}}$	18) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$	19) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$	20) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$
21) $\sqrt{\frac{121}{289}}$	22) $\sqrt{\frac{100}{9}}$	23) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$	24) $\sqrt[3]{\frac{64}{729}}$	25) $\sqrt{10}$
26) $\sqrt{20}$	27) $\sqrt{60}$	28) $\sqrt{200}$	29) $\sqrt{2000}$	30) $\sqrt[3]{10}$
31) $\sqrt[3]{555}$	32) $\sqrt[4]{10}$	33) $\sqrt{0,09}$	34) $\sqrt{0,25}$	35) $\sqrt[3]{0,008}$
36) $\sqrt{0,4}$	37) $\sqrt[3]{0,1}$	38) $\left(\sqrt{39}\right)^2$	39) $\sqrt{41}\cdot\sqrt{41}$	40) $\sqrt{23^2}$
41) $\sqrt{64}$	42) $\sqrt[3]{64}$	43) $\sqrt[6]{64}$	44) $\sqrt[10]{1024}$	45) $\sqrt{9/4}$
46) $\sqrt[3]{\frac{125}{343}}$	47) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$	48) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$	49) $\sqrt{\frac{121}{169}}$	50) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$
51) $\sqrt[4]{13^4}$	52) $\sqrt{(-7)^2}$	53) $\sqrt{0}$	54) $\sqrt{1}$	55) $\sqrt{-9}$

56) Può la radice quadrata di un numero essere maggiore del numero stesso?
57) Può la radice cubica di un numero essere maggiore della radice quadrata dello stesso numero?
58) Quali numeri coincidono con la propria radice quadrata?
59) Quali sono quei due numeri che hanno la proprietà di essere uguali al doppio della propria radice quadrata?
60) Completa le seguenti tabelle.

a	0	0,1	0,5	2	3	4	5	6	9	10	12
$\sqrt{a}$ (1)	0	0,3...		1,4...							

a	20	50	100	1000	2000	5000	1000000	a	0,01	0,0004	0,000001
$\sqrt{a}$ (2)	4,...							$\sqrt{a}$ (3)			
$\sqrt[3]{a}$ (2)		3,...						$\sqrt[3]{a}$ (3)	0,2...		

(1) fino alla 1ª cifra decimale (2) solo la parte intera (3) valore esatto o approssimazione ritenuta adeguata

RISULTATI, RISPOSTE

1) 2 2) 5 3) 7 4) 2 5) 3 6) 1 7) 0 8) imposs. 9) 5 10) 6 11) 2 12) 6 13) 14
14) 10 15) 3 16) 30 17) $\frac{3}{4}$ 18) $\frac{1}{2}$ 19) $\frac{3}{10}$ 20) $\frac{1}{2}$ 21) $\frac{11}{17}$ 22) $\frac{10}{3}$ 23) $\frac{2}{3}$ 24) $\frac{4}{9}$
25) 3,1... 26) 4,4... 27) 7,7... 28) 14,1... 29) 44,7... 30) 2,1... 31) 8,2... 32) 1,7... 33) 0,3
34) 0,5 35) 0,2 36) 0,6... 37) 0,4... 38) 39 39) 41 40) 23 41) 8 42) 4 43) 2 44) 2
45) 3/2 46) 5/7 47) 3/5 48) 1/3 49) 11/13 50) 2/3 51) 13 52) +7 53) 0 54) 1 55) imposs.
56) Sì, se il numero di partenza è compreso fra 0 e 1 57) Come per il 56) 58) 0 e 1 59) 0 e 4

60)	a	0	0,1	0,5	2	3	4	5	6	9	10	12
	$\sqrt{a}$	0	0,3...	0,7...	1,4...	1,7...	2	2,2...	2,4...	3	3,1...	3,4...

a	20	50	100	1000	2000	5000	1000000	a	0,01	0,0004	0,000001
$\sqrt{a}$	4,...	7,...	10	31,...	44,...	70,...	1000	$\sqrt{a}$	0,1	0,02	0,001
$\sqrt[3]{a}$	2,...	3,...	4,...	10	12,...	17,...	100	$\sqrt[3]{a}$	0,2...	0,07...	0,01

b) PROPRIETA' INVARIANTIVA (risultati alla pagina successiva)

OSSERVAZIONE IMPORTANTE
Per semplicità, laddove compaiono espressioni letterali,
sei autorizzato a supporre ≥ 0 l'espressione stessa
e più in generale la base di ciascuna potenza in gioco.
Questa avvertenza vale anche per tutti gli esercizi successivi.

Soltanto nel paragrafo 17 lasceremo cadere questa ipotesi "di comodo".

1) $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{\dots}$ 2) $\sqrt{5}=\sqrt[6]{\dots}$ 3) $\sqrt[5]{t}=\sqrt[10]{\dots}$ 4) $\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[18]{\dots}$ 5) $\sqrt[6]{a^5b^2c}=\sqrt[18]{\dots}$

6) $\sqrt{a+b}=\sqrt[4]{\dots}$ 7) $\sqrt[3]{2a}=\sqrt[9]{\dots}$ 8) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\sqrt[8]{\dots}$

Semplificare, ove possibile:

9) $\sqrt[8]{y^6}$ 10) $\sqrt[6]{8}$ 11) $\sqrt[15]{a^{10}}$ 12) $\sqrt[3]{b^6}$ 13) $\sqrt[6]{a^4b^4}$ 14) $\sqrt[6]{a^4+b^4}$ 15) $\sqrt[12]{x^3y^6}$

16) $\sqrt[12]{\dfrac{x^3}{y^6}}$ 17) $\sqrt[12]{x^3+y^6}$ 18) $\sqrt[12]{x^3-y^6}$ 19) $\sqrt[4]{9}$ 20) $\sqrt{7^6}$ 21) $\sqrt[24]{x^{18}}$ 22) $\sqrt[10]{32}$

23) $\sqrt[6]{81}$ 24) $\sqrt[3n]{a^{2n}}$ 25) $\sqrt[k]{3^{k^2}}$ 26) $\sqrt[9]{27a^{27}}$ 27) $\sqrt{25y^4}$ 28) $\sqrt[10]{4t^2}$ 29) $\sqrt[10]{4+t^2}$

30) $\sqrt[10]{4+4t+t^2}$ 31) $\sqrt[8]{x^6}$ 32) $\sqrt[9]{a^{15}}$ 33) $\sqrt[6]{x^2y^4}$ 34) $\sqrt[4]{9x^2y^2}$ 35) $\sqrt[4]{\dfrac{9x^2}{y^2}}$ 36) $\sqrt[4]{9x^2+y^2}$

37) $\sqrt[4]{a^4b^4}$ 38) $\sqrt{a^2b^2}$ 39) $\sqrt{a^2+b^2}$ 40) $\sqrt[4]{a^2b^2}$ 41) $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{8}}$ 42) $\sqrt[3]{x^3-8}$ 43) $\sqrt[4]{9}$

44) $\sqrt[15]{1024}$ 45) $\sqrt[10]{2^{20}}$ 46) $\sqrt{24^2}$ 47) $\left(\sqrt{17}\right)^2$ 48) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$

49) $\sqrt{9+16}$ 50) $\sqrt{81+144}$ 51) $\sqrt{\dfrac{9}{49}\cdot\dfrac{16}{49}}$ 52) $\sqrt{\dfrac{9}{49}+\dfrac{16}{49}}$ 53) $\sqrt{1+\dfrac{25}{144}}$

54) $\sqrt{(2,7)^2}$ 55) $\sqrt[3]{64(a-b)^3}$ 56) $\sqrt[4]{\dfrac{(x^2+1)^2}{81}}$ 57) $\sqrt{x^2+1}$ 58) $\sqrt{25x^8}$

59) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$ 60) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$ 61) $\sqrt{x^4+2x^2+1}$ 62) $\sqrt[6]{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$ 63) $\sqrt{4(x-1)^2(x-2)^2}$

c) PRODOTTI, QUOZIENTI DI RADICALI

Vai agli svolgimenti dei numeri 80 … 89 ⇨

64) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{7}$ 65) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}$ 66) $\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{a-b}}$ 67) $\sqrt[4]{3a}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{b}{3}}$

68) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$ 69) $\sqrt[4]{y}\cdot\sqrt[6]{y}$ 70) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}$ 71) $\sqrt{t}\cdot\sqrt[3]{t^2}\cdot\sqrt[4]{t^3}$

72) $\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}$ 73) $\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x+y}$ 74) $\sqrt[3]{x-y}\cdot\sqrt[4]{x+y}$ 75) $\sqrt[5]{10}:\sqrt[5]{2}$

76) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a}}$ 77) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{7}}$ 78) $\sqrt[4]{12}:\sqrt{2}$ 79) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{x}$

80) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$ 81) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}$ 82) $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ 83) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}\cdot\sqrt[8]{2}$

84) $\sqrt[3]{\dfrac{a-1}{a}}\cdot\sqrt{\dfrac{a}{a-1}}$ 85) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt[8]{24}}$ 86) $\dfrac{\sqrt[4]{a^2b^2}}{a\sqrt{a}\cdot b\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a^2b^2}$ 87) $\sqrt{\dfrac{2a+2b}{3a-3b}}:\sqrt[4]{\dfrac{4a+4b}{9a-9b}}$

88) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}:\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}$ 89) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}\cdot\sqrt[5]{x^2y^2}:\sqrt{x+y}$

RISULTATI

b) PROPRIETA' INVARIANTIVA

1) $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$ 2) $\sqrt{5}=\sqrt[6]{125}$ 3) $\sqrt[5]{t}=\sqrt[10]{t^2}$ 4) $\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[18]{a^{15}}$ 5) $\sqrt[6]{a^5b^2c}=\sqrt[18]{a^{15}b^6c^3}$

6) $\sqrt{a+b}=\sqrt[4]{(a+b)^2}$ 7) $\sqrt[3]{2a}=\sqrt[9]{8a^3}$ 8) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\sqrt[8]{\dfrac{x^4}{y^4}}$

Semplificare, ove possibile:

9) $\sqrt[4]{y^3}$ 10) $\sqrt{2}$ 11) $\sqrt[3]{a^2}$ 12) b^2 13) $\sqrt[3]{a^2b^2}$

14) non semplif. 15) $\sqrt[4]{xy^2}$ 16) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{y^2}}$ 17) non semplificabile 18) non semplificabile

19) $\sqrt{3}$ 20) $7^3=343$ 21) $\sqrt[4]{x^3}$ 22) $\sqrt{2}$ 23) $\sqrt[3]{9}$

24) $\sqrt[3]{a^2}$ 25) 3^k 26) $\sqrt[3]{3a^9}$ 27) $5y^2$ 28) $\sqrt[5]{2t}$

29) non semplif. 30) $\sqrt[5]{2+t}$ 31) $\sqrt[4]{x^3}$ 32) $\sqrt[3]{a^5}$ 33) $\sqrt[3]{xy^2}$

34) $\sqrt{3xy}$ 35) $\sqrt{\dfrac{3x}{y}}$ 36) STOP 37) ab 38) ab

39) STOP 40) $\sqrt{ab}$ 41) $\dfrac{x}{2}$ 42) STOP 43) $\sqrt{3}$

44) $\sqrt[3]{4}$ 45) 4 46) 24 47) 17 48) 3

49) 5 50) 15 51) $\dfrac{12}{49}$ 52) $\dfrac{5}{7}$ 53) $\dfrac{13}{12}$

54) 2,7 55) $4(a-b)$ 56) $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{9}}$ 57) STOP 58) $5x^4$

59) 5 60) 2 61) $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2}=x^2+1$ 62) $\sqrt[6]{(a-b)^3}=\sqrt{a-b}$ 63) $2(x-1)(x-2)$

c) PRODOTTI, QUOZIENTI DI RADICALI

64) $\sqrt[3]{14}$ 65) 12 66) $\sqrt{a+b}$ 67) $\sqrt[4]{ab}$ 68) $\sqrt[6]{500}$

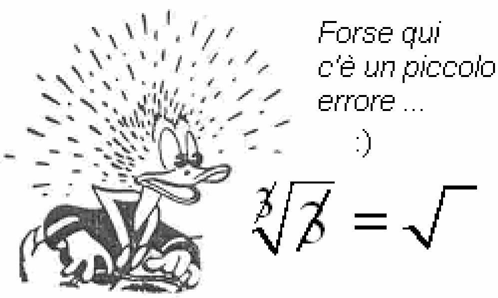
69) $\sqrt[12]{y^5}$ 70) $\sqrt[4]{12}$ 71) $\sqrt[12]{t^{23}}$ 72) n 73) $\sqrt{x^2-y^2}$

74) $\sqrt[12]{(x-y)^4(x+y)^3}$ 75) $\sqrt[5]{5}$ 76) $\sqrt{a}$ 77) $\sqrt[6]{\dfrac{25}{343}}$ 78) $\sqrt[4]{3}$

79) $\sqrt[6]{8x^5}$ 80) 6 81) $\sqrt[6]{200}$

82) 1 **83)** $\sqrt[8]{8}$ **84)** $\sqrt[6]{\dfrac{a}{a-1}}$ **85)** $\sqrt[8]{6}$

86) 1 **87)** $\sqrt[4]{\dfrac{a+b}{a-b}}$ **88)** $\sqrt[6]{\dfrac{2}{3}}$ **89)** $\sqrt[30]{\dfrac{x^2y^2}{(x+y)^5}}$



d) PORTARE IL FATTORE ESTERNO SOTTO RADICE   Svolgimenti dal n. 6 al n. 12 ⇨

1) $2\sqrt[3]{10}$ 2) $x\sqrt{x}$ 3) $(a+b)\sqrt[4]{c}$ 4) $\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

5a) $(1+k)\sqrt{\frac{1}{k^2+k}}$ 5b) $1+k\sqrt{\frac{1}{k^2+k}}$ 6) $5\sqrt{2}$ 7) $\frac{1}{9}\sqrt{243}$ 8) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

9) $(x-2)\sqrt{\frac{1}{2x^2-8}}$ 10) $a^k\cdot\sqrt{a}$ 11) $a^k\cdot\sqrt[k]{a}$ 12) $\left(1-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$

(risultati alla pagina successiva)

e) ESTRARRE UN FATTORE DAL SEGNO DI RADICE   Svolgimenti dal n. 38 al n. 49 ⇨

♥ **ESERCIZI SVOLTI: estrarre un fattore da un radicale, il cui radicando non contiene lettere**

- **Estrarre un fattore da $\sqrt{384}$**
  Scompongo 384 in fattori primi e ottengo $384=2^7\cdot 3$ da cui: $\sqrt{384}=\sqrt{2^7\cdot 3}=2^3\sqrt{2\cdot 3}=8\sqrt{6}$
- **Estrarre un fattore da $\sqrt{6250}$**
  Si vede "a occhio" che il più grande quadrato perfetto contenuto come fattore nel 6250 è $625=25^2$.
  Allora, in un attimo: $\sqrt{6250}=\sqrt{625\cdot 10}=\sqrt{25^2\cdot 10}=25\sqrt{10}$.

La "ricerca del fattore *quadrato perfetto* (o *cubo perfetto*, ecc.) più grande" è, nei casi semplici, il metodo più rapido (oltre che il più divertente):
$\sqrt{88}=\sqrt{4\cdot 22}=2\sqrt{22}$; $\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{560}=\sqrt[3]{8\cdot 70}=2\sqrt[3]{70}$

13) $\sqrt[5]{2x^5}$ 14) $\sqrt[5]{2x^{10}}$ 15) $\sqrt[5]{2x^{12}}$ 16) $\sqrt[5]{a^7b^{10}}$ 17) $\sqrt[5]{x^5+y}$
18) $\sqrt{12}$ 19) $\sqrt{18}$ 20) $\sqrt{45}$ 21) $\sqrt{50}$ 22) $\sqrt{98}$
23) $\sqrt{162}$ 24) $\sqrt{972}$ 25) $\sqrt{1210}$ 26) $\sqrt{1584}$ 27) $\sqrt{5000}$
28) $\sqrt[3]{24}$ 29) $\sqrt[3]{16}$ 30) $\sqrt[3]{432}$ 31) $\sqrt[3]{1024}$ 32) $\sqrt[3]{54}$
33) $\sqrt{4b}$ 34) $\sqrt[3]{\frac{a}{27}}$ 35) $\sqrt{\frac{9}{8}}$ 36) $\sqrt[n]{a^{n+1}}$ 37) $\sqrt[k]{5a^{2k}}$
38) $\sqrt{288}$ 39) $\sqrt[4]{1024}$ 40) $\sqrt{242}$ 41) $\sqrt[3]{625}$ 42) $\sqrt{1728}$
43) $\sqrt[3]{24000}$ 44) $\sqrt[3]{2592}$ 45) $\sqrt[4]{a^3b^4c^5d^6e^{10}}$ 46) $\sqrt{x^3+6x^2+12x+8}$ 47) $\sqrt{4x^7+8x^5+4x^3}$
48) $\sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{3}}$ 49) $\sqrt{8x^2-48x+72}$

f) RADICE DI UN RADICALE   Svolgimenti dal n. 59 al n. 61 ⇨

50) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$ 51) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ 52) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{t^2}}$ 53) $\sqrt{\sqrt[5]{a^2+b^2}}$ 54) $\sqrt[k]{\sqrt[k]{w}}$
55) $\sqrt[a+b]{\sqrt[a-b]{4}}$ 56) $\sqrt[x]{\sqrt{x}}$ 57) $\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}$ 58) $\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}}$ 59) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$

60) $\sqrt{a\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b\sqrt{a}}$ *Porta innanzitutto "dentro" a nel 1° radicale, b nel 2°*

61) $\sqrt[3]{2\sqrt{x\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{4x}$

g) POTENZA DI UN RADICALE   Svolgimenti dal n. 76 al n. 80 ⇨

62) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^3$ 63) $\left(\sqrt{5}\right)^3$ 64) $\left(\sqrt[6]{a}\right)^4$ 65) $\left(\sqrt{7}\right)^4$ 66) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$
67) $\left(\sqrt{a-1}\right)^3$ 68) $\left(\sqrt{6}\right)^2$ 69) $\left(2\sqrt{3}\right)^3$ 70) $\left(x\sqrt{x}\right)^2$ 71) $\left(\sqrt[6]{c}\right)^2$
72) $\left(\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\right)^2$ 73) $\left(2\sqrt{3}\right)^4$ 74) $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{y}\right)^5$ 75) $\left(\sqrt{\sqrt{m}}\right)^6$ 76) $\left(\sqrt[4]{8}\right)^3$
77) $\left(\sqrt[3]{18}\right)^3$ 78) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^8$ 79) $\left(\sqrt[3]{a+b}\right)^6$ 80) $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+2a+1}{a+2}}\right)^2$

RISULTATI

d) PORTARE IL FATTORE ESTERNO SOTTO AL SEGNO DI RADICE

1) $\sqrt[3]{80}$ 2) $\sqrt{x^3}$ 3) $\sqrt[4]{(a+b)^4 \cdot c}$ 4) $\sqrt[4]{\frac{27}{8}}$ 5a) $\sqrt{\frac{1+k}{k}}$ 5b) $1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}$

6) $\sqrt{50}$ 7) $\sqrt{3}$ 8) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ 9) $\sqrt{\frac{x-2}{2(x+2)}}$ 10) $\sqrt{a^{2k+1}}$ 11) $\sqrt[k]{a^{k^2+1}}$

12) $\underbrace{\left(1-\sqrt{2}\right)}_{<0}\sqrt{2} \overset{\text{NOTA}}{=} -\underbrace{\left(\sqrt{2}-1\right)}_{>0}\sqrt{2} = -\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \cdot 2} = -\sqrt{\left(2-2\sqrt{2}+1\right)\cdot 2} = -\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot 2} = -\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

NOTA: un fattore esterno si può "portar dentro" solo se è positivo

e) ESTRARRE UN FATTORE DAL SEGNO DI RADICE

13) $x\sqrt[5]{2}$ 14) $x^2\sqrt[5]{2}$ 15) $x^2\sqrt[5]{2x^2}$ 16) $ab^2\sqrt[5]{a^2}$ 17) rimane così

18) $2\sqrt{3}$ 19) $3\sqrt{2}$ 20) $3\sqrt{5}$ 21) $5\sqrt{2}$ 22) $7\sqrt{2}$

23) $9\sqrt{2}$ 24) $18\sqrt{3}$ 25) $11\sqrt{10}$ 26) $12\sqrt{11}$ 27) $50\sqrt{2}$

28) $2\sqrt[3]{3}$ 29) $2\sqrt[3]{2}$ 30) $6\sqrt[3]{2}$ 31) $8\sqrt[3]{2}$ 32) $3\sqrt[3]{2}$

33) $2\sqrt{b}$ 34) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{a}$ *opp.* $\frac{\sqrt[3]{a}}{3}$ 35) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ 36) $a\sqrt[n]{a}$ 37) $a^2\sqrt[k]{5}$

38) $12\sqrt{2}$ 39) $4\sqrt{2}$ 40) $11\sqrt{2}$ 41) $5\sqrt[3]{5}$ 42) $24\sqrt{3}$

43) $20\sqrt[3]{3}$ 44) $6\sqrt[3]{12}$ 45) $bcde^2\sqrt[4]{a^3cd^2e^2}$ 46) $(x+2)\sqrt{x+2}$ 47) $2x\left(x^2+1\right)\sqrt{x}$

48) $\frac{5}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}$ 49) $2(x-3)\sqrt{2}$

f) RADICE DI UN RADICALE

50) $\sqrt[6]{x}$ 51) $\sqrt[8]{3}$ 52) $\sqrt[6]{t}$ 53) $\sqrt[10]{a^2+b^2}$ 54) $\sqrt[k^2]{w}$

55) $\sqrt[a^2-b^2]{4}$ 56) $\sqrt[2x]{x}$ 57) $\sqrt[4]{6}$ 58) $\sqrt[xy]{a}$ 59) $\sqrt[4]{x}$

60) $\sqrt[4]{a^3b^3}$ 61) $2x\sqrt[12]{128}$

g) POTENZA DI UN RADICALE

62) $\sqrt[4]{x^3}$ 63) $\sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$ 64) $\sqrt[3]{a^2}$ 65) 49 66) $2\sqrt[3]{2}$

67) $(a-1)\sqrt{a-1}$ 68) 6 69) $24\sqrt{3}$ 70) x^3 71) $\sqrt[3]{c}$

72) $\sqrt[6]{a^3b^4}$ 73) 144 74) $\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{y^5}$ 75) $m\sqrt{m}$ 76) $4\sqrt[4]{2}$

77) 18 78) $x^2\sqrt[3]{x^2}$ 79) $(a+b)^2$ 80) $(a+1)\sqrt[3]{\frac{a+1}{(a+2)^2}}$

h) SOMMA ALGEBRICA DI RADICALI Svolgimenti dal n. 16 al n. 24 ⇨ **Risultati: pag. succ.**

1) $3\sqrt{2}+4\sqrt{2}$ 2) $4\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}$ 3) $x\sqrt{x}-2\sqrt{x}$ 4) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$

5) $3\sqrt{a}-2\sqrt{b}+\sqrt{b}+2\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}$ 6) $3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}$ 7) $\sqrt{8}+\sqrt{50}$ 8) $\sqrt{x^3}-\sqrt{x^5}$

9) $\sqrt{18}-\sqrt[3]{81}+6\sqrt[3]{3}+\sqrt{27}$ 10) $(a-b)\sqrt{c}+(a+b)\sqrt{c}$ 11) $\sqrt[4]{32}-\sqrt[4]{162}$ 12) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{24}$

13) $7\sqrt{11}-\sqrt{7}+2\sqrt{11}-4\sqrt{11}-4\sqrt{7}$ 14) $\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{48}$ 15) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}+2\sqrt{27}-\sqrt{75}$

16) $\dfrac{5\sqrt[3]{192}+4\sqrt[3]{81}}{\sqrt[4]{65536}}$ 17) $\sqrt{(a-b)^3}+\sqrt{ab^2-b^3}$ 18) $\dfrac{2}{5}\sqrt{9a}+\sqrt{4b^3}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

19) $\dfrac{\sqrt{2048}-\sqrt{512}}{2\sqrt{50}+\sqrt{72}}$ 20) $\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{4x}}{x^2-4}$ 21) $\sqrt{4t+4}+\sqrt{9t+9}+\sqrt[3]{64t+64}$

22) $\dfrac{\sqrt[4]{a^9}-\sqrt[4]{16a^5}+\sqrt[4]{a}}{a^3-3a^2+3a-1}$ 23) $\sqrt[3]{\dfrac{81}{8}}+\sqrt[3]{\dfrac{3}{125}}$ 24) $\sqrt{x^3+x^2-x-1}-\sqrt{4x-4}$

i) OPERAZIONI TIPO "PRODOTTI NOTEVOLI" Svolgimenti dal n. 45 al n. 54 ⇨

25) $\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ 26) $\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(3\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$ 27) $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$

28) $\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{11}\right)\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{11}\right)$ 29) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^2$ 30) $\left(2\sqrt{3}-1\right)^2$

31) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3$ 32) $\left(2-\sqrt[4]{3}\right)^2$ 33) $\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)$

34) $\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)$ 35) $\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)^2$ 36) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

37) $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}\right)^2$ 38) $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^4$ 39) $\sqrt{\sqrt{x}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-1}$ 40) $\left(2-\sqrt{3}\right)^3$

41) $\sqrt{a}\left(a+\sqrt{a}\right)$ 42) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)^2$ 43) $\left(a\sqrt{b}-b\sqrt{c}\right)^2$ 44) $\left(\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2$

45) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ 46) $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)$ 47) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)^2$ 48) $\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2$

49) $\left(3\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(3\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)$ 50) $\left(\sqrt{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2$ 51) $\left(\sqrt{5}-2\right)^3$

52) $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-4\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(3x+4\sqrt{2}\right)$ 53) $\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)-\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2$ 54) $\left(\sqrt{2}-1\right)^4$

l) RAZIONALIZZAZIONE Svolgimenti dal n. 76 al n. 89 ⇨

55) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 56) $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 57) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$ 58) $\dfrac{x}{a\sqrt{x}}$ 59) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

60) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-1}$ 61) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ 62) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ 63) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$ 64) $\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$ 65) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$

66) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ 67) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+2\sqrt{2}}$ 68) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+1}$ 69) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1}$ 70) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$ 71) $\dfrac{1}{a\sqrt[3]{b}+b\sqrt[3]{a}}$

72) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ 73) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$ 74) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 75) $\dfrac{1}{3-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$

76) $\dfrac{x}{2\sqrt{x}}$ 77) $\dfrac{9-4t}{3-2\sqrt{t}}$ 78) $\dfrac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ 79) $\dfrac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}$ 80) $\dfrac{y}{\sqrt{x}-\sqrt{x+y}}$

81) $\dfrac{a^2-1}{\sqrt{a}+1}$ 82) $\dfrac{2c-18}{3\sqrt{c}+9}$ 83) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ 84) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-1}$ 85) $\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

86) $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{15}}$ 87) $\dfrac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}+2}$ 88) $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{3}}$ 89) $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{(a-b)^3}}$ 90) $\dfrac{4}{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

RISULTATI

h) SOMMA ALGEBRICA DI RADICALI

1) $7\sqrt{2}$ 2) $\sqrt[3]{5}$ 3) $(x-2)\sqrt{x}$ 4) STOP!

5) $5\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt[3]{a}$ 6) $\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$ 7) $7\sqrt{2}$ 8) $x(1-x)\sqrt{x}$

9) $3\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}\right)$ 10) $2a\sqrt{c}$ 11) $-\sqrt[4]{2}$ 12) $3\sqrt{6}$

13) $5\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)$ 14) $6\sqrt{3}+7\sqrt{2}$ 15) $\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}$

16) $2\sqrt[3]{3}$ 17) $a\sqrt{a-b}$ 18) $\frac{1}{5}\sqrt{a}+(2b-1)\sqrt{b}$ 19) 1 20) $\frac{\sqrt{x}}{x+2}$

21) $5\sqrt{t+1}+4\sqrt[3]{t+1}$ 22) $\frac{\sqrt[4]{a}}{a-1}$ 23) $\frac{17}{10}\sqrt[3]{3}$ 24) $(x-1)\sqrt{x-1}$

i) OPERAZIONI TIPO “PRODOTTI NOTEVOLI”

25) $\sqrt{6}+3$ 26) $6\sqrt{10}-4-3\sqrt{5}+\sqrt{2}$ 27) 2

28) 1 29) $11+2\sqrt{30}$ 30) $13-4\sqrt{3}$

31) $a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b$ 32) $4-4\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}$ 33) $\sqrt[15]{x^8}+\sqrt[10]{x^7}+\sqrt[12]{x^7}+\sqrt[4]{x^3}$

34) $2b$ 35) $2\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$ 36) $18+5\sqrt{6}$ 37) $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[6]{x^2y^3}+y$

38) $3+4\sqrt[4]{2}+6\sqrt{2}+4\sqrt[4]{8}$ 39) $\sqrt{x-1}$ 40) $26-15\sqrt{3}$

41) $a\sqrt{a}+a$ 42) $6-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ 43) $b\left(a^2-2a\sqrt{bc}+bc\right)$ 44) $2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

45) $5-2\sqrt{6}$ 46) 1 47) $2\left(3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ 48) $2\left(5x+4-3\sqrt{x^2-1}\right)$

49) $2(4x+5)$ 50) $2\left(2\sqrt{a}-\sqrt{4a-b}\right)$ 51) $17\sqrt{5}-38$ 52) x^2 53) $2\left(7\sqrt{6}-12\right)$ 54) $17-12\sqrt{2}$

l) RAZIONALIZZAZIONE

55) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 56) $(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 57) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 58) $\frac{\sqrt{x}}{a}$ 59) $\sqrt{2}-1$

60) $\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$ 61) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 62) $2\sqrt{2}$ 63) $2\sqrt[3]{4}$ 64) $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$ 65) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

66) $\sqrt{2}-1$ 67) $2\sqrt{14}-7$ 68) $\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$ 69) $\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$

70) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$ 71) $\frac{a^2\sqrt[3]{b^2}-ab\sqrt[3]{ab}+b^2\sqrt[3]{a^2}}{ab\left(a^2+b^2\right)}$ 72) $x+\sqrt{x^2-1}$

73) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ 74) $\frac{\sqrt{30}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{12}$ 75) $-\frac{6\sqrt{6}+4\sqrt{2}+7\sqrt{3}-3}{46}$

76) $\frac{\sqrt{x}}{2}$ 77) $3+2\sqrt{t}$ 78) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 79) $\frac{4x+1-4\sqrt{x}}{4x-1}$ 80) $-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+y}\right)$

81) $(a-1)\sqrt{a+1}$ 82) $\frac{2\left(\sqrt{c}-3\right)}{3}$ 83) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}$ 84) $\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}+3\sqrt{3}-7}{11}$ 85) $\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

86) $4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{225}$ 87) $(x-8)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)$ 88) $\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$ 89) $\sqrt[4]{a-b}$ 90) $\frac{2\sqrt{3}+3+\sqrt{21}}{3}$

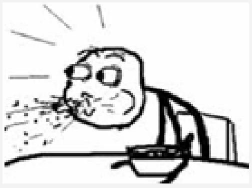
1) **POVERO PIERINO, NON NE AZZECCA UNA …**
VUOI CORREGGERE GLI ERRORI TREMENDI CHE IL COMPAGNO HA COMMESSO?

a) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{y}=\sqrt[12]{xy}$ c) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x^3}=\sqrt[5]{x^6}$

d) $\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}$ e) $3\sqrt{x}+5\sqrt{x}=8\sqrt{2x}$ f) $3\sqrt{x}\cdot 5\sqrt{x}=15\sqrt[4]{x}$

g) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2=\sqrt[6]{a}$ h) $\sqrt{x^4+9}=x^2+3$ i) $\sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt[4]{8}$

l) $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}$ m) $\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{7}=\sqrt{16}=4$



QUALCHE QUESITO PESCATO SU INTERNET

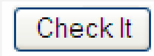
Dal sito www.glencoe.com: **Radical Expressions-Multiple Choice**

2) Simplify $\sqrt{180}$ a) $10\sqrt{3}$ b) $18\sqrt{5}$ c) $6\sqrt{5}$ d) $50\sqrt{3}$

3) Simplify $\dfrac{\sqrt{48x^3y^2}}{\sqrt{4xy^3}}$ a) $\dfrac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{y}}$ b) $\dfrac{3x\sqrt{2y}}{y}$ c) $\dfrac{2x\sqrt{3y}}{y}$ d) $\dfrac{2y\sqrt{3x}}{x}$

4) Find the result of $\sqrt{6}\cdot\sqrt{48}$ a) $12\sqrt{3}$ b) $24\sqrt{3}$ c) $24\sqrt{2}$ d) $12\sqrt{2}$

5) Simplify $\dfrac{3}{4+\sqrt{2}}$ a) $\dfrac{12+3\sqrt{2}}{14}$ b) $\dfrac{12+\sqrt{2}}{14}$ c) $\dfrac{12-3\sqrt{2}}{14}$ d) $\dfrac{12-\sqrt{2}}{14}$



Da http://teachers.henrico.k12.va.us/math/HCPSAlgebra2/modules.html: **Simplify the expression**

6) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}$ a) $\sqrt{221}$ b) 221 c) $\sqrt{30}$ d) $2\sqrt{221}$

7) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ a) $\dfrac{21}{\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{8}{13}$ c) $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ d) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$

8) $\sqrt{14}-\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ a) $\dfrac{6\sqrt{14}}{7}$ b) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ c) $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}$ d) $7\sqrt{2}$

9) $3\sqrt{32}-2\sqrt{18}+\sqrt{54}$ a) $4\sqrt{2}-3\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{6}+6\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{6}-6\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{2}+3\sqrt{6}$

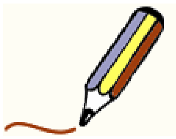
10) $\left(\sqrt{19}-\sqrt{2}\right)^2$ a) $21-2\sqrt{38}$ b) 17 c) $21+2\sqrt{38}$ d) $17-2\sqrt{38}$

Correggi gli errori:

11) $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2a-1}=\sqrt{2a\cancel{+1}+2a\cancel{-1}}=\sqrt{4a}=2\sqrt{a}$

12) $\sqrt{4+\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)}=\sqrt{4+5+\sqrt{65}}=\sqrt{9+\sqrt{65}}=3+\sqrt[4]{65}$

13) $\dfrac{\left(\sqrt{2}+5\right)^2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{2+25+10\sqrt{2}}{10}=\dfrac{27+\cancel{10}\sqrt{2}}{\cancel{10}}=27+\sqrt{2}$



RISPOSTE:

1a) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ 1b) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{y}=\sqrt[12]{x^4y^3}$ 1c) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x^3}=\sqrt[5]{x^5}=x$ 1d) $\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}=$ STOP

1e) $3\sqrt{x}+5\sqrt{x}=8\sqrt{x}$ 1f) $3\sqrt{x}\cdot 5\sqrt{x}=15x$ 1g) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2=\sqrt[3]{a^2}$ 1h) $\sqrt{x^4+9}=$ STOP

1i) $\sqrt{3}+\sqrt{5}=$ STOP 1l) $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$ STOP 1m) $\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{7}=$ STOP 2c3a4d5c6a7c8a9d10a

11) La somma di due radici quadrate NON è uguale alla radice quadrata della somma …

12) La radice di una somma NON è uguale alla somma delle radici. Invece:

$$\sqrt{9+\sqrt{65}}=\sqrt{\frac{18+2\sqrt{65}}{2}}=\sqrt{\frac{18+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)^2}{2}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{26}}{2}$$

13) Sbagliata la semplificazione finale

m) RADICALI DOPPI Svolgimenti dal n. 11 al n. 14 ⇨

1) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ 2) $\sqrt{21-4\sqrt{5}}$ 3) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$ 4) $\sqrt{35+12\sqrt{6}}$

5) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $\rightarrow$ con la formula o con il "trucchetto" (più seriamente, si dice "artificio"): $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=ecc.$

6) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ 7) $\sqrt{4-\sqrt{7}}$ 8) $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$ 9) $\sqrt{14-8\sqrt{3}}$ 10) $\sqrt{6-2\sqrt{3}}$

11) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ 12) $\sqrt{13+4\sqrt{3}}$ 13) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$ 14) $\sqrt{2-2\sqrt{1-t^2}}$

n) ESPRESSIONI VARIE Svolgimenti dal n. 15 al n. 52 ⇨

15) $\sqrt[3]{\frac{t^2-4}{t-1}}\cdot\sqrt{\frac{t^2-3t+2}{t+2}}$

16) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[5]{5}}$ Semplifica, verificando, alla fine, che si tratta di un numero leggermente superiore a 1

17) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}:\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$

18) $\frac{\left(\sqrt[3]{(x-y)\sqrt[4]{(x-y)}}\right)^8}{x^3-y^3}$

19) $\sqrt[k]{a^p}\cdot\sqrt[p]{a^k}$

20) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt[8]{ab}-\sqrt[8]{\frac{a^3}{b}}$

21) $\sqrt{160}+\sqrt{250}+\sqrt{360}-\sqrt{2250}$

22) $\frac{\sqrt{108}+\sqrt{243}}{\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{3}}$

23) $\sqrt{x^3-3x^2+3x-1}+\sqrt{9x-9}$

24) $\frac{\sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{48}}{\sqrt{13^2-12^2}}$

25) $\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-1\right)^2}$

26) $\left(\sqrt[4]{1+m}-\sqrt[4]{1-m}\right)\left(\sqrt[4]{1+m}+\sqrt[4]{1-m}\right)\left(\sqrt{1+m}+\sqrt{1-m}\right)$

27) $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1\right)^2-\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\left(2+\frac{9}{2}\sqrt{2}-4\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

28) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

29) $\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}+\sqrt{\frac{x^2}{y^2}-1}$

30) $\frac{2\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}}$

31) $\frac{\frac{1}{1+\sqrt{x}}-1}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(1-\sqrt[4]{x}\right)}$

32) $\frac{x^2-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}$

33) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}+\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+1$

34) $\sqrt[3]{2\sqrt{7}-1}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{7}+1}-\sqrt{16-6\sqrt{7}}-\left(\sqrt{\sqrt{7}}\right)^2$

35) $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+3}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}-3}}$

Ruffini

36) $\frac{\sqrt{x^3-3x-2}-\sqrt{x^3-6x^2+12x-8}}{3}$

37) $\left(\sqrt[4]{a}+\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a\sqrt{a}}}\right)\left(\frac{a-\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a}}\right)+\sqrt[3]{a}$

38) $\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{4}{3}}$

39) $\frac{a\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a}}{a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

40) $\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}$

41) $\frac{(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{2}-1)^2-1}{\sqrt{12}+\sqrt{8}}$

42) $\frac{\sqrt{\sqrt{9+4\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}}{2}$

43) $\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right):\sqrt[4]{x}+2\frac{\sqrt{x}}{x}$

44) $\left(\frac{1}{\sqrt{1-w}}+\frac{1}{\sqrt{1+w}}\right)^2-\frac{2}{\sqrt{1-w^2}}$

45) $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right):\sqrt{1+x}$

46) $\frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b}{a}}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}}}$

47) $\sqrt{\frac{\left(\sqrt{a}\right)^4-\left(\sqrt{b}\right)^4}{b\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)^6-1}}$

48) Razionalizza: $\frac{1}{x+\sqrt[3]{1-x^3}}$

49) Razionalizza: $\frac{2}{\sqrt[4]{a+1}+\sqrt[4]{a-1}}$

50) Scomponi in fattori e semplifica: $\dfrac{\sqrt{ac}-\sqrt{c}}{a-\sqrt{a}+\sqrt{ab}-\sqrt{b}}$ 51) Scomponi in fattori e semplifica: $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$

52) Semplifica $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$ verificando, alla fine, che si tratta di un numero prossimo a $\pi \approx 3{,}14$

o) ESERCITAZIONI CONCLUSIVE Correzione A) ⇨ Correzione B) ⇨

A)

53) $\sqrt{27}+\sqrt{20}-\sqrt{12}-\sqrt{5}$ 54) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt{x}}{x}$ 55) $\sqrt[3]{\dfrac{\left(a^2-a\right)^2}{a^2}}:\sqrt{a-1}$ 56) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{200}}$

57) $\sqrt{9a^3-9a^2}-\left(\sqrt{4a^3-4a^2}+\sqrt{a^3-a^2}\right)$ 58) $\sqrt[4]{\left(x+\sqrt{2x-1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2x-1}\right)}$ 59) $\left(\sqrt{2}+1\right)^3$

60) $\dfrac{1}{96}\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2$ 61) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$ 62) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$ 63) $\dfrac{\sqrt{19-6\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

B)

64) $\sqrt{48}+\sqrt{8}-\sqrt{27}-\sqrt{18}$ 65) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}}{x}$ 66) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3}}:\sqrt[12]{x}$ 67) $\sqrt[4]{\left(a+\sqrt{a^2-9}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^2-9}\right)}$

68) $\sqrt{t^3-t^2}-\left(\sqrt{t-1}\right)^3$ 69) $\dfrac{\left(2\sqrt{2}-2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{2}+2-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{128}}{8}$ 70) $\dfrac{25+\left(2\sqrt{2}-1\right)^3}{22}$

71) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{15}{\left(\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{3}\right)^2}$ 72) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}-\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}\right)\left(\sqrt{a+1}+1\right)$ 73) $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-x}-1}$

RISULTATI

1) $3-\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{5}-1$ 3) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ 4) $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

5) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 6) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$ 7) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$ 8) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$ 9) $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$

10) Non è “spezzabile”: infatti $a^2-b=36-12=24$, e 24 NON è un quadrato perfetto.

11) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ 12) $2\sqrt{3}+1$ 13) $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{2}$ 14) $\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}$

15) $\sqrt[6]{\dfrac{(t-1)(t-2)^5}{t+2}}$ 16) $\sqrt[15]{1{,}944}\approx 1{,}045$ 17) $\sqrt[6]{x}$ 18) $\dfrac{(x-y)^2\sqrt[3]{x-y}}{x^2+xy+y^2}$ 19) $\sqrt[kp]{a^{p^2+k^2}}$ 20) 0

21) 0 22) $15\sqrt[6]{3}$ 23) $(x+2)\sqrt{x-1}$ 24) $\sqrt[4]{3}$ 25) $2\sqrt{5}$ 26) $2m$ 27) 0 28) $\dfrac{4\sqrt{ab}}{a-b}$ 29) $\dfrac{x}{y}$ 30) 1

31) $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ 32) $\dfrac{x-1-\sqrt{1-x^2}}{2}$ 33) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 34) 0 35) 2 36) $\sqrt{x-2}$ 37) a 38) $\sqrt{3}$ 39) 0

40) 1 41) 1 42) $\sqrt[4]{2}$ 43) $\dfrac{1}{2}$ 44) $\dfrac{2}{1-w^2}$ 45) 0 46) 1 47) b 48) $x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}$

49) $\left(\sqrt[4]{a+1}-\sqrt[4]{a-1}\right)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)$ 50) $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 51) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$ 52) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1{,}414+1{,}732=3{,}146$

53) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 54) $\sqrt[4]{x}$ 55) $\sqrt[6]{a-1}$ 56) 1 57) 0 58) $\sqrt{x-1}$

59) $5\sqrt{2}+7$ 60) 1 61) $\sqrt[3]{x}$ 62) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}$ 63) $1+\sqrt{2}$

64) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 65) $\sqrt[6]{x}$ 66) $\sqrt{x}$ 67) $\sqrt{3}$ 68) $\sqrt{t-1}$

69) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ 70) $\sqrt{2}$ 71) 4 72) a 73) $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

16. EQUAZIONI E SISTEMI DI PRIMO GRADO CON COEFFICIENTI IRRAZIONALI

Ecco qualche esempio.

OSSERVAZIONE
Si preferisce scrivere
$x\sqrt{3}$ al posto di $\sqrt{3}\cdot x$
$3x\sqrt{3}$ anziché $3\sqrt{3}\cdot x$

1) $\boxed{x\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+1\right)=x\sqrt{27}-1}$

$x\sqrt{3}-\sqrt{3}\cancel{-1}=3x\sqrt{3}\cancel{-1}$ (OSSERVAZIONE)

$x\sqrt{3}-3x\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$-2x\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$x=\dfrac{\cancel{\sqrt{3}}}{-2\cancel{\sqrt{3}}}=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$ $\quad$ *Anche*: $x\cancel{\sqrt{3}}-3x\cancel{\sqrt{3}}=\cancel{\sqrt{3}}^{\,1};\ \ -2x=1;\ \ x=-\dfrac{1}{2}$

2) $\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{5}}-\dfrac{6}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{x\left(\sqrt{2}-1\right)}{5-\sqrt{5}}}$

$\dfrac{x}{\sqrt{5}}-\dfrac{6}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{x\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}$

$\dfrac{\left(\sqrt{5}-1\right)x-6\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}=\dfrac{x\left(\sqrt{2}-1\right)}{\cancel{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-1\right)}}$

$x\sqrt{5}\cancel{-x}-6\sqrt{5}=x\sqrt{2}\cancel{-x}$

$x\sqrt{5}-x\sqrt{2}=6\sqrt{5}$

$x\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=6\sqrt{5}$

$x=\dfrac{6\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}=\dfrac{{}^{2}\cancel{6}\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\cancel{3}}=\boxed{10+2\sqrt{10}}$

3) $\boxed{\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}+2\right)x=\dfrac{3(2x+1)}{\sqrt{3}}-1}$

$\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}+2\right)x=\dfrac{\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}(2x+1)}{\cancel{\sqrt{3}}}-1$

$x\sqrt{15}-x\sqrt{5}+2x=2x\sqrt{3}+\sqrt{3}-1$

$x\sqrt{15}-x\sqrt{5}+2x-2x\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$

$x\left(\sqrt{15}-\sqrt{5}+2-2\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-1$

$x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{15}-\sqrt{5}+2-2\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-1\right)-2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{\cancel{\sqrt{3}-1}}{\cancel{\left(\sqrt{3}-1\right)}\left(\sqrt{5}-2\right)}=$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{\sqrt{5}+2}{5-4}=\boxed{\sqrt{5}+2}$

4) $\boxed{\begin{cases} x\sqrt{3}-y\sqrt{3}=6 \\ \sqrt{3}\cdot\dfrac{x+y-2}{y-x}=1 \end{cases}}$

$$\begin{cases} x\sqrt{3}-y\sqrt{3}=6 \\ x\sqrt{3}+y\sqrt{3}-2\sqrt{3}=y-x \quad (y\neq x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\sqrt{3}-y\sqrt{3}=6 \\ x\sqrt{3}+x+y\sqrt{3}-y=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\sqrt{3}-y\sqrt{3}=6 \\ x\left(\sqrt{3}+1\right)+y\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\sqrt{3}=y\sqrt{3}+6 \\ x\left(\sqrt{3}+1\right)+y\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{y\sqrt{3}+6}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3y+6\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\cancel{3}\left(y+2\sqrt{3}\right)}{\cancel{3}}=y+2\sqrt{3} \\ \left(y+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)+y\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+2\sqrt{3} \\ y\sqrt{3}\cancel{+y}+6\cancel{+2\sqrt{3}}+y\sqrt{3}\cancel{-y}=\cancel{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+2\sqrt{3} \\ \cancel{2}y\sqrt{3}=-\cancel{6}^{3}; \quad y=-\dfrac{3}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{3}}}=-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+2\sqrt{3}=-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}}$$

ESERCIZI		**SOLUZIONI**
5) $x\sqrt{5}+15=0$	6) $3x=2-x\sqrt{7}$	5) $-3\sqrt{5}$ 6) $3-\sqrt{7}$
7) $x=2\left(2+\sqrt{2}\right)-x\sqrt{2}$	8) $\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)=\sqrt{6}$	7) $2\sqrt{2}$ 8) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
9) $3x\sqrt{2}=2+x\sqrt{8}$	10) $x\left(x+\sqrt{2}\right)=x\left(x+1\right)+1$	9) $\sqrt{2}$ 10) $\sqrt{2}+1$
11) $x\left(\sqrt{3}-1\right)^2=2\left(2x-\sqrt{6}\right)$	12) $\dfrac{x\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-x$	11) $\sqrt{2}$ 12) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$
13) $\sqrt{2}\left(x-1\right)+1=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$	14) $\dfrac{x}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{x-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{1}{2}$	13) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$ 14) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$
15) $\begin{cases} x\sqrt{5}+y=6 \\ x-y\sqrt{5}=0 \end{cases}$	16) $\begin{cases} x\sqrt{3}+y\sqrt{2}=1 \\ x\sqrt{6}+3y=0 \end{cases}$	15) $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=1 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$
17) $\begin{cases} x\sqrt{7}-y\sqrt{2}=5 \\ x\sqrt{2}-y\sqrt{7}=0 \end{cases}$	18) $\begin{cases} x\sqrt{5}+y\sqrt{5}=10 \\ x-y=2 \end{cases}$	17) $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x=\sqrt{5}+1 \\ y=\sqrt{5}-1 \end{cases}$
19) $\begin{cases} x\sqrt{3}+y\sqrt{2}=4 \\ x\sqrt{3}-y\sqrt{2}=2 \end{cases}$	20) $\begin{cases} \left(x+y-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}+y=x \\ \dfrac{2+y}{x}=1 \end{cases}$	19) $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x=\sqrt{2}+1 \\ y=\sqrt{2}-1 \end{cases}$

17. DAI “RADICALI ASSOLUTI” AI “RADICALI IN $\mathbb{R}$ ”

E dopo questa prima fase in cui, per rendere più semplice l'impostazione della teoria, ci siamo limitati a considerare radicali a radicando positivo (≥ 0), siamo ora pronti per accettare, in certi casi (e precisamente: quando l'indice è dispari) anche un radicando negativo.

In definitiva:

I) **Se INDICE è DISPARI**: $\boxed{\sqrt[2n+1]{a}}$

- **il radicando potrà essere positivo, negativo o nullo**;
- **il valore del radicale, ossia il risultato dell'estrazione di radice, avrà lo stesso segno del radicando**, quindi sarà, rispettivamente, positivo, negativo o nullo.

Esempi:

$\sqrt[3]{8}=2$;

$\sqrt[3]{-125}=-5$;

$\sqrt[3]{0}=0$;

$\sqrt[3]{-10}=-2{,}154...$ (notare che è $\sqrt[3]{-10}=-\sqrt[3]{10}$; in generale, si ha sempre $\boxed{\sqrt[2n+1]{-x}=-\sqrt[2n+1]{x}}$)

II) **Se INDICE è PARI**: $\boxed{\sqrt[2n]{a}}$

- **il radicando dovrà essere positivo o nullo**, altrimenti la radice non si potrebbe estrarre (operazione impossibile; ne riparleremo, comunque, quando introdurremo l'insieme $\mathbb{C}$ dei “numeri complessi”);
- **il valore del radicale, ossia il risultato dell'estrazione di radice, sarà QUEL NUMERO POSITIVO O NULLO che, elevato all'esponente 2n, riproduce il radicando.** Infatti la comunità matematica ha deciso, per diversi ottimi motivi, che non debba intendersi, tanto per fare un esempio, $\cancel{\sqrt{9}=\pm 3}$, bensì $\sqrt{9}=3$.

Quindi, ricapitolando (IMPORTANTISSIMO!!!):

♥ **IN CASO DI INDICE PARI,**
SIA IL RADICANDO CHE IL RISULTATO SONO POSITIVI (≥ 0):

♪ **il *radicando*, perché altrimenti l'operazione sarebbe impossibile;**

♫ **il *risultato*, per CONVENZIONE.**

Esempi: $\sqrt[4]{16}=2$ (e NON ± 2); $\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$ $\left(\text{e NON } \pm\frac{3}{5}\right)$; $\sqrt{0}=0$; $\sqrt[6]{-1}=$ IMPOSSIBILE

OCCHIO, ALLORA!
L'equazione $x^2=144$ ha DUE soluzioni,
ma il simbolo $\sqrt{144}$ indica la sola soluzione POSITIVA!
Quella negativa si indicherà con $-\sqrt{144}$ e si potrà scrivere, in forma compatta,
che le soluzioni dell'equazione data sono i due numeri $\pm\sqrt{144}$
($+\sqrt{144}=+12$, $-\sqrt{144}=-12$)

- Si può verificare che **tutte le regole di calcolo imparate per i “radicali assoluti”** (= i radicali a radicando positivo sui quali abbiamo basato fino al par. precedente la nostra trattazione) **continuano a valere anche per i “radicali in $\mathbb{R}$ ”**, ossia per quella famiglia di radicali “ampliata” che si ottiene accettando pure i radicali con indice dispari e radicando negativo.
- Per quanto riguarda i **radicali con indice pari, ci sono alcune delicate questioni di segno che costringono, in certi casi, ad introdurre un simbolo di valore assoluto.** Di questo argomento si occupa il paragrafo successivo.

18. RADICALI E VALORI ASSOLUTI

Consideriamo l'espressione $\sqrt{a^2}$.
Essa ha significato qualunque sia il segno di a (quindi: sia per $a>0$, che per $a<0$ o $a=0$),
perché, qualunque sia il segno della base, un quadrato è sempre positivo o nullo (mai negativo)
e perciò la radice quadrata di un quadrato si può sempre estrarre.

Chiediamoci ora: è sempre giusto scrivere $\sqrt{a^2}=a$?

Beh, è giusto solo se $a \ge 0$, perché se invece il numero a è negativo, sarebbe sbagliato !!!
Ad es., nel caso $a=-5$, l'uguaglianza $\underbrace{\sqrt{a^2}}_{\substack{\sqrt{(-5)^2}\\ \sqrt{25}}} = \underbrace{a}_{-5}$ non "funziona", perché $\sqrt{25}$ vale $+5$ e non -5.

Riflettendo bene, l'uguaglianza che vale sia per $a \ge 0$ che per $a<0$, è la seguente:

♥ **(14)** $\boxed{\sqrt{a^2}=|a|}$ **MOLTO IMPORTANTE l'introduzione del simbolo di VALORE ASSOLUTO !**

Osserviamo che invece con una radice ad indice dispari (ad esempio, una radice cubica)
NON avremmo dovuto introdurre le stanghette di valore assoluto;
insomma, vale, *qualunque sia* il segno del numero reale a, l'uguaglianza

(15) $\sqrt[3]{a^3}=a$

(ricordiamo ancora una volta che nel caso di un radicale con indice dispari,
sia il radicando che il risultato possono essere positivi, nulli o negativi
e il risultato ha sempre lo stesso segno del radicando).

Analogamente, avremo, qualunque sia il segno del numero a:

(16) $\boxed{\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b} \quad (b \ge 0)}$

La (16) è ricavabile dalla (14) con la catena $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}$.

Anche qui, in situazioni affini che però portino una radice cubica al posto della quadrata,
le stanghette *non* vanno introdotte:

(17) $\sqrt[3]{a^3b}=a\sqrt[3]{b}$

Osservazione - E' chiaro che nella (14) e nella (16) possiamo fare a meno delle stanghette di val. assoluto in tutti quei casi in cui si sa per certo che il numero indicato con a è ≥ 0.
Ancora:
il radicale $\sqrt{ab}$ ha significato sia quando a, b sono entrambi positivi, sia quando sono entrambi negativi.
Ma l'uguaglianza $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ vale soltanto nel primo caso ($a \ge 0,\ b \ge 0$).
L'uguaglianza che vale anche con a, b entrambi negativi è

(18) $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$

Il problema *non* sussiste con indice dispari: qualunque siano i segni di a, b, è sempre

(19) $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$

Generalizzando, si vede che vale la seguente comoda REGOLA:

LE STANGHETTE DI VALORE ASSOLUTO VANNO INTRODOTTE NEI CASI IN CUI, OPERANDO CON UN RADICALE AD INDICE PARI, A PARTIRE DA UN FATTORE DI GRADO PARI SI PASSA AD UNO – O PIU' – FATTORI DI GRADO DISPARI per effetto
- di una semplificazione indice-esponente (proprietà invariantiva)
- o dell'estrazione di un fattore dal segno di radice
- o dello "spezzamento" di un radicale con la regola per la radice di un prodotto o di un quoziente.

Il simbolo di "modulo" (= di valore assoluto) si può evitare, in questi casi, solo se il numero che andrebbe a finire entro le stanghette è ≥ 0 .

19. SIGH! I PARAGRAFI 17) E 18) CI COSTRINGEREBBERO A RIMETTERE IN DISCUSSIONE I RISULTATI DI ALCUNI DEGLI ESERCIZI FATTI!

Negli esercizi con radicali proposti alle pagine precedenti, c'era un invito ad adottare un'ipotesi "di comodo":

"per semplicità, laddove compaiono espressioni letterali, sei autorizzato a supporre ≥ 0 *l'espressione stessa e più in generale la base di ciascuna potenza in gioco".*

E' giunto ora il momento di analizzare cosa accada se si lascia cadere questa supposizione.

Da qui in avanti, in TUTTO il nostro corso di Matematica,
il modo di utilizzare i radicali verrà generalizzato in DUE modi:
1) passeremo ad operare coi "radicali in $\mathbb{R}$ " e non più solamente coi radicali assoluti
2) e **simultaneamente abbandoneremo**, appunto, **l'ipotesi che tutte le potenze in gioco siano a base ≥ 0.**

Andiamo dunque a riprendere alcuni esercizi già svolti
e **vediamo come si devono modificare i risultati, se si parte dalle premesse 1)+2).**

- Consideriamo ad esempio l'espressioncina $\sqrt[10]{4+4t+t^2}$ (pag. 19, n. 30).

  Si trattava di semplificare, tramite la proprietà invariantiva, e il risultato dichiarato era $\sqrt[5]{2+t}$.
  Ma ora, per le nuove premesse 1)+2) , dovremo scrivere invece, introducendo il valore assoluto,

  $$\sqrt[10]{4+4t+t^2}=\sqrt[10]{(2+t)^2}=\sqrt[5]{|2+t|}\ .$$

  Riflettiamo: poiché il valore assoluto di un numero è uguale
  a) al numero stesso, se questo è positivo (≥ 0)
  b) all'opposto del numero, se questo è negativo
  e poiché il numero $2+t$ è ≥ 0 quando $t \geq -2$, mentre è <0 quando $t<-2$,
  in definitiva avremo:

  $$\sqrt[10]{4+4t+t^2}=\sqrt[10]{(2+t)^2}=\sqrt[5]{|2+t|}=\begin{cases}\sqrt[5]{2+t} & quando\ t\geq -2\\ \sqrt[5]{-(2+t)}=-\sqrt[5]{2+t} & quando\ t<-2\end{cases}$$

- Un altro esercizio (pag. 21, n. 49) terminava col passaggio $\sqrt{2^3(x-3)^2}=2(x-3)\sqrt{2}$.
  Ora il passaggio finale verrebbe invece effettuato come segue:

  $$\sqrt{2^3(x-3)^2}=2|x-3|\sqrt{2}=\begin{cases}2(x-3)\sqrt{2} & nel\ caso\ x\geq 3\ (a)\\ 2(3-x)\sqrt{2} & nel\ caso\ x<3\ (b)\end{cases}$$

  (a) *quando è* $x-3\geq 0$, *cioé con* $x\geq 3$, *avremo* $|x-3|=x-3$
  (b) *quando è* $x-3<0$, *cioé con* $x<3$, *avremo* $|x-3|=-(x-3)=-x+3=3-x$

- Ripensiamo pure al semplice esercizietto $\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}=\sqrt{n^2}=n$ (pag. 19, n. 72).
  Qui invece nulla cambia, nemmeno con le nuove premesse 1) + 2), perché se fin dall'inizio troviamo $\sqrt{n}$,
  vuol dire che fin dall'inizio si suppone $n\geq 0$ (altrimenti la radice quadrata non sarebbe eseguibile).
  Dunque rimane pienamente confermata la catena $\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}=\sqrt{n^2}=n$ (se n è positivo, $|n|=n$).

- E $\sqrt[9]{27a^{27}}$? (pag. 19, n. 26)
  Beh, qui se a è positivo, allora lo è anche il radicando, se a è negativo lo è anche il radicando.
  Ma in un contesto di radicali in $\mathbb{R}$, tutto questo non ci interessa:
  - con indice dispari, il radicando può avere segno qualsiasi,
  - e la semplificazione con l'invariantiva quando l'indice è dispari non richiede mai il valore assoluto.

  Quindi è, anche ora, giusto scrivere $\sqrt[9]{27a^{27}}=\sqrt[9]{3^3a^{27}}=\sqrt[3]{3a^9}$.

- Inventiamo infine un'espressione "ad hoc" per dare una idea di situazioni più complicate:

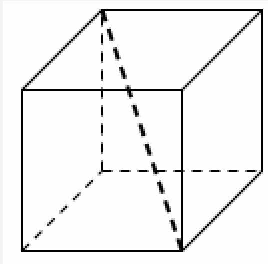
  $$\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-7)^2}=|x-3|+|x-7|=\begin{cases}x-3+x-7=2x-10 & se\ x\geq 7\\ x-3+7-x=4 & se\ 3\leq x<7\\ 3-x+7-x=10-2x & se\ x<3\end{cases}$$

Appare chiaro da tutto questo non semplice discorso il motivo per cui fino ad ora avevamo sempre autorizzato lo studente a servirsi dell'ipotesi di positività delle basi di tutte le potenze in gioco: se infatti, caro lettore, ti avessimo fin dall'inizio sottoposto il carico di queste difficoltà, ti avremmo probabilmente indotto a sviluppare per i radicali una irreversibile antipatia, che speriamo di avere evitato.

E' sufficiente, a mio parere, l' "infarinatura" data in questa pagina, senza ulteriori esercizi, perché tu sia poi in grado di affrontare le problematiche esposte, nei contesti in cui si potranno ripresentare (es. "limiti", "studio di funzione").

QUESITI

La diagonale di un cubo misura 1 metro. Quanti metri misura il lato del cubo?



A) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ B) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) nessuno dei valori precedenti è esatto Correzione: ⇨

Trovato su http://bernard.langellier.pagesperso-orange.fr

Énigme mathématique.

1/4 d'euro = 25 centimes;
la racine carrée de 1/4 = 1/2;
la racine carrée de 25 = 5;
donc 1/2 d'euro = 5 centimes !!!

… Cos'è che "non funziona"?

Dall'eccellente sito www.themathpage.com del prof. Lawrence Spector da New York, ecco (clicca sulla freccia) le lezioni che riguardano i *radicali*: ⇨.

Esse iniziano nel modo seguente.

Vale davvero la pena di dare un'occhiata!

Davvero bello questo sito, approfondito e ricco di esercizi a risposta "nascosta"; facendo passare il puntatore del mouse sull'apposito spazio, ecco che la risposta esatta viene mostrata.

HERE ARE THE FIRST ten square numbers and their roots:

Square numbers	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**
Square roots	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

We write, for example,

$$\sqrt{25} = 5$$

"The square root of 25 is 5".

This mark $\sqrt{\ }$ is called the **radical sign** (after the Latin *radix* = root).
The number under the radical sign is called the **radicand**.
In the example, 25 is the radicand.

Problem 1. Evaluate the following.

To see the answer, pass your mouse over the colored area.
To cover the answer again, click "Refresh" ("Reload").
Do the problem yourself first!

a) $\sqrt{64} = \square$ b) $\sqrt{144} = \square$ c) $\sqrt{400} = \square$

d) $\sqrt{289} = \square$ e) $\sqrt{1} = \square$ f) $\sqrt{\frac{49}{81}} = \square$

20. ESPONENTI FRAZIONARI

Come è ben noto, una potenza con esponente intero ≥ 2 è definita come un prodotto di fattori tutti uguali fra loro (tanti fattori uguali alla base quante sono le unità dell'esponente): $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$ ...
Si introducono poi gli esponenti 1 e 0; noi abbiamo scritto che le rispettive definizioni

$a^1 = a$ ("un numero elevato a 1 è uguale a sé stesso")

$a^0 = 1$ ("un numero elevato a 0 è uguale a 1", con la sola eccezione $0^0 = \textit{indeterminata}$)

vengono scelte in questo modo perché sono le uniche che consentano alla proprietà sottrattiva degli esponenti di continuare a valere (poi, con tali def., si dimostra che continuano ad essere valide *tutte* le "vecchie" proprietà).
Avremmo anche potuto introdurre i nuovi esponenti ragionando sull'opportunità che essi risultassero compatibili con la *additiva* degli esponenti:
insomma, se desidero che si abbia, ad es., $a^3 \cdot a^1 = a^{3+1} = a^4$, è evidente che dovrò accettare la def. $a^1 = a$ e se desidero che risulti $a^3 \cdot a^0 = a^{3+0} = a^3$ è ovvio che dovrò adottare la definizione $a^0 = 1$.

Le definizioni degli esponenti negativi: $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$ $\quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ $\quad a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ $\quad \ldots$

sono motivate, sostanzialmente, dall'esigenza che si estenda anche a questi la validità delle "vecchie" proprietà, così che (tanto per fare un esempio), se desideriamo che risulti vera l'uguaglianza $\boxed{a^{-3} \cdot a^3} = a^{-3+3} = a^0 \boxed{=1}$,

siamo *necessariamente* condotti a porre, per definizione, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Dato che l'appetito vien mangiando, ci possiamo chiedere se possano avere un senso (e un'utilità) anche gli esponenti *frazionari*.

Ad esempio, che definizione sarà "logico" stabilire per una scrittura come $a^{\frac{1}{3}}$?
Beh, volendo attribuire a questa scrittura un significato compatibile con le proprietà già dimostrate valide in un ambito di esponenti interi, dovrà, in particolare, risultare

$$\boxed{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3} = a^{\frac{1}{3}\cdot 3} = a^1 \boxed{=a}$$

per cui la scrittura in esame dovrà indicare quel numero il cui cubo è a ...
ma questo numero è la radice cubica di a !

Dunque si porrà, per definizione, $\boxed{a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}}$ e, in generale, $\boxed{a^{\frac{1}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a}}$.

Poi, sempre nell'ottica di adottare definizioni tali che non si perda la validità di nessuna delle "vecchie" proprietà, si pone

$\boxed{a^{\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a^m}}$ NOTA : ♥ **il denominatore diventa l'indice, il numeratore l'esponente!**

e infine

$\boxed{a^{-\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$ NOTA : ♥ *prima di tutto, la negatività dell'esponente trasferisce la potenza dall'altra parte della linea di frazione con esponente che viene reso positivo, poi si applica la definizione precedente*

Dunque, per fare qualche esempio specifico,

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x},\quad y^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{y^3},\quad z^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{z^2}},\quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2,\quad \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{16}{81}}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \quad \textit{o anche} \quad \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$

RICAPITOLIAMO le definizioni date:

$$a^{\frac{1}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} \overset{def.}{=} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

In definitiva
le **POTENZE AD ESPONENTE FRAZIONARIO**
non sono altro che
un modo alternativo
di rappresentare
i **RADICALI**!

♥ **Con gli esponenti frazionari, qualche problematica insorge qualora la base della potenza sia <0.**

Ad esempio, per la scrittura $(-8)^{1/3}$ si potrebbero scrivere entrambe le catene

$$(-8)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-8}=-2\,; \qquad (-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=+2$$

Per questo motivo, in generale gli esponenti frazionari m/n vengono utilizzati solo con m ed n primi fra loro.

Qualche testo, e qualche software, sceglie invece di impiegarli esclusivamente quando la base è positiva (≥ 0 se l'esponente frazionario è positivo, >0 se l'esponente è negativo).

LA CONSERVAZIONE DELLE PROPRIETA'

Per le potenze a esponente frazionario sopra introdotte, si può dimostrare che conservano la loro validità proprio *tutte* le proprietà che si era abituati ad applicare con esponente intero, nessuna esclusa.

Tali dimostrazioni si effettuano utilizzando le già dimostrate proprietà dei radicali.

- Verifichiamo, tanto per fare un esempio, che continua a valere la additiva degli esponenti (accontentandoci di considerare il caso in cui questi non siano negativi):

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\cdot\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq}\cdot a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

Comprendiamo a questo punto che un'espressione coi radicali potrebbe anche essere trasformata in espressione con esponenti frazionari, svolta utilizzando le proprietà delle potenze, e magari conclusa ritornando ai radicali.

- Un esempio: $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}=x^{\frac{6+4-9}{12}}=x^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{x}$

  Prova a rifare l'espressione applicando le proprietà dei *radicali*: uscirà il *medesimo* risultato!

- Dài, un altro! $\sqrt{\sqrt{ab}}:\sqrt[8]{b}=\left[(ab)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{8}}=(ab)^{\frac{1}{4}}:b^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{4}}:b^{\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}=a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{1}{8}}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{b}$

LE POTENZE AD ESPONENTE FRAZIONARIO E IL COMPUTER

♥ **Di solito in un software scientifico l'elevamento a potenza si indica con l'accento circonflesso ^**
… ma **ATTENZIONE! Occorre anche saper utilizzare in modo opportuno le PARENTESI!**

- Ad esempio, se lavorando con un software matematico o con un foglio elettronico io digito $x\,^\wedge 1/3$, non otterrò $\sqrt[3]{x}$, bensì $x/3$! … **Per ottenere $\sqrt[3]{x}$ devo digitare** infatti $\mathbf{x\,^\wedge(1/3)}$, in quanto se scrivo $x\,^\wedge 1/3$ il software eleverà x all'esponente 1, poi dividerà per 3.
- E per ottenere $\sqrt{x^2+1}$ si digita $\mathbf{(x\,^\wedge 2+1)\,^\wedge(1/2)}$, o anche **sqrt$(x\,^\wedge 2+1)$ [sqrt = SQuare RooT]**

ESERCIZI Vai alle risoluzioni ⇨

a) Determina il valore delle seguenti espressioni numeriche:

1) $8^{\frac{2}{3}}+9^{\frac{1}{2}}$ 2) $4^{\frac{3}{2}}-8^{\frac{1}{3}}-3\cdot 16^{\frac{1}{4}}$ 3) $\left[30\left(25^{-\frac{1}{2}}+9^{-\frac{1}{2}}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$ 4) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ 5) $64^{\frac{5}{6}}-81^{\frac{3}{4}}$

6) $2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}$ 7) $3^{\frac{1}{4}}\cdot 27^{\frac{1}{4}}$ 8) $5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}$ 9) $\left(81^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 10) $2^{-\frac{2}{3}}\cdot 4^{-\frac{2}{3}}$

b) Esegui le seguenti espressioni con radicali trasformando in potenze con esponente frazionario:

11) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$ 12) $\dfrac{\sqrt[4]{b^5}}{b\cdot\sqrt[8]{b}}$ 13) $\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^3}}\cdot\sqrt[3]{x}}{x}\right)^{12}$ 14) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt{a}}}$

15) $\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)$ 16) $\dfrac{y^2\cdot\sqrt{3x}\cdot\sqrt[4]{9xy}}{\sqrt[3]{y^2}}$ 17) $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{2}-1}}$ 18) $\sqrt[13]{\left(\sqrt{t+1}\right)^3\cdot\sqrt[3]{(t+1)^2}}$

RISULTATI

1) 7 2) 0 3) 2 4) 1 5) 5 6) $3/\sqrt{2}=3\sqrt{2}/2$ 7) 3 8) 5 9) $1/3$ 10) $1/4$

11) $a^{\frac{23}{12}}$ 12) $b^{\frac{1}{8}}$ 13) x 14) 1 15) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$ 16) $3x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{19}{12}}$ 17) $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ 18) $(t+1)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{t+1}$