

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE PIANE

1. COSA SI INTENDE PER “TRASFORMAZIONE PIANA”

Si dice “**trasformazione geometrica piana**”, o brevemente “**trasformazione piana**”, una **corrispondenza biunivoca del piano con sé stesso**, ossia una corrispondenza nella quale

- ♪ ad ogni punto del piano corrisponde uno e un solo altro punto del piano
- ♪ e, viceversa, ogni punto è il corrispondente di uno e un solo altro punto.

□ Esempio 1

Definiremo ora una corrispondenza fra punti del piano, che verrà chiamata “**omotetia**” (nel seguito ometteremo l’accento).

Un’omotetia è caratterizzata da un “**centro di omotetia**” e da un “**rapporto di omotetia**”.

Vediamo di cosa si tratta, considerando, per meglio fissare le idee, un caso particolare: supporremo che il rapporto di omotetia, che indicheremo con k , sia uguale a 3.

Sia O un punto fissato del piano.

L’omotetia di centro O e rapporto $k=3$

fa corrispondere (vedi figura)

ad ogni punto P del piano

quel punto P' del piano, tale che:

I. P' sta sulla semiretta OP ;

II. $OP' = 3OP$



E’ evidente che

in questo modo risulta definita una “corrispondenza biunivoca del piano con sé stesso”:

infatti

- ♪ ad ogni punto del piano resta associato uno ed un solo altro punto;
- ♪ e viceversa, ogni punto del piano potrà essere “visto” come il corrispondente di uno ed un sol punto.

Quindi siamo in presenza di una “trasformazione geometrica piana”.

Diremo che

P' è “il corrispondente” di P , o anche “l’immagine” di P , attraverso la trasformazione considerata

e, se indichiamo tale trasformazione con t , potremo scrivere

$$P' = t(P) \quad (\text{leggi: “ } P' \text{ è uguale a } t \text{ di } P \text{ ”})$$

oppure

$$P \xrightarrow{t} P' \quad (\text{leggi: “ } t \text{ fa passare da } P \text{ a } P' \text{ ”, oppure: “ } P' \text{ è l’immagine di } P \text{ attraverso la } t \text{ ”})$$

Il punto P , a sua volta, verrà detto “la controimmagine” di P' .

Quando si vuole affermare che t fa corrispondere al punto P , il punto P' , si adopera spesso una locuzione suggestiva: si dice che t “**muta**” P in P' , oppure “**trasforma**” P in P' .

Dal punto di vista psicologico, ciò equivale a:

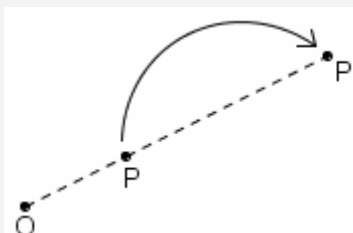
- a) partire dal punto P
- b) applicare la funzione t
- c) e poi andare a considerare l’immagine P' “dimenticandosi” del punto P iniziale.

Nella nostra mente, ora, non c’è più P , c’è invece P' :

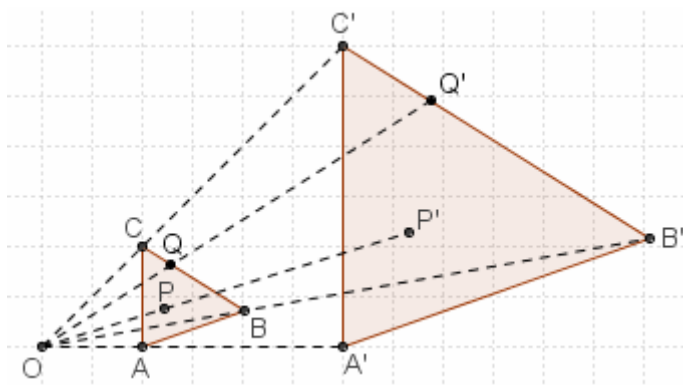
P “è diventato” P' , “si è trasformato in” P' ...

La questione, però, è *soltanto psicologica*.

In realtà, il punto P è rimasto al suo posto, e abbiamo semplicemente stabilito di *fargli corrispondere* P' , come se una freccia partisse da P e avesse la sua punta in P' .



Prendiamo ora un triangolo ABC, disegniamo innanzitutto le immagini A' , B' , C' dei suoi tre vertici attraverso la solita omotetia di centro O e rapporto 3, e costruiamo la figura costituita da tutti i punti che corrispondono ai punti *del lato BC* (brevemente: la figura costituita da tutte le immagini dei punti di BC).



Si constata, e si potrebbe dimostrare in modo rigoroso, che le immagini dei punti del segmento BC costituiscono, nel loro insieme, ancora un segmento, e precisamente il segmento $B'C'$, ossia quello avente per estremi il punto B' (che è l'immagine di B) e il punto C' (che è l'immagine di C).

Si dice, brevemente, che “l'immagine del segmento BC è il segmento $B'C'$ ”, e si può scrivere $t(BC) = B'C'$.

Analogamente, l'immagine del segmento AB non è altro che il segmento $A'B'$, e l'immagine del segmento AC coincide col segmento $A'C'$. Insomma, la nostra omotetia “trasforma segmenti in segmenti”!

Prendendo poi un punto P che sia interno al triangolo ABC, la sua immagine P' starà internamente al triangolo $A'B'C'$, e complessivamente l'insieme dei punti interni ad ABC risulta avere come immagine l'insieme dei punti interni ad $A'B'C'$.

In definitiva, si vede che questa corrispondenza “trasforma” il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C'$.

Si potrebbe provare che il “nuovo” triangolo è *simile* al “vecchio”, con perimetro triplo e area che è 9 volte l'area del triangolo iniziale.

Per significare che

“l'insieme delle immagini dei punti del triangolo ABC, costituisce il triangolo $A'B'C'$ ” si può scrivere

$$t(ABC) = A'B'C'$$

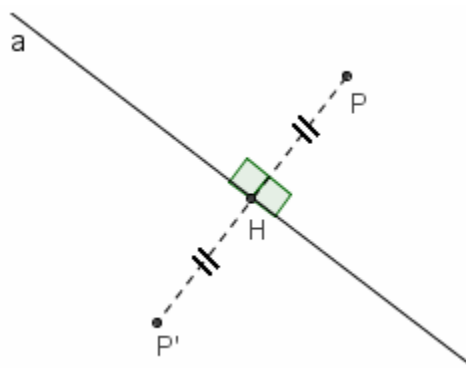
e dire, appunto, che la t «trasforma il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C'$ ».

Cliccando su questa freccia ➡, potrai vedere una bella figura dinamica GEOGEBRA (grazie al creatore di questo fantastico *freeware*, l'austriaco Marcus Hohenwarter!) che mostra all'opera un'omotetia il cui centro e il cui rapporto possono essere fissati dall'utente. E' possibile pure scegliere di far sì che il rapporto di omotetia k sia < 0 . Delle omotetie con rapporto negativo, comunque, ci occuperemo più avanti.

❑ Esempio 2

Un altro bell'esempio di trasformazione piana è la “simmetria assiale”.

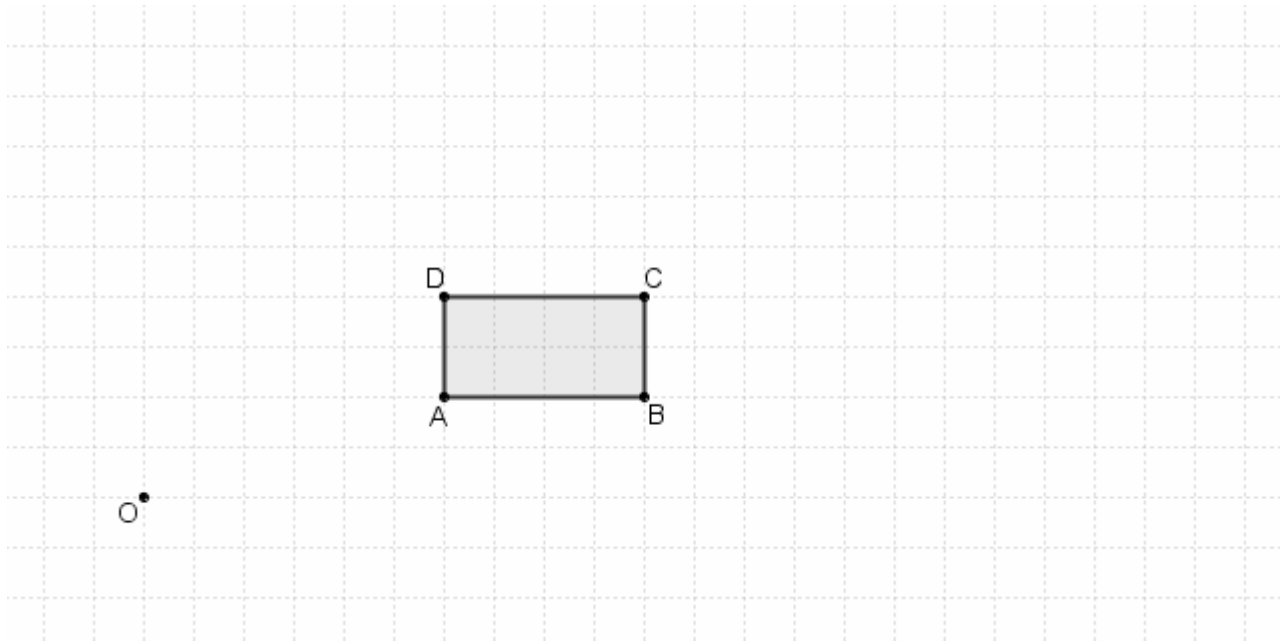
Sia a una retta fissata su di un piano.
Si dice “simmetria assiale di asse a ” quella corrispondenza (vedi figura) che ad ogni punto P del piano fa corrispondere quell'altro punto P' ottenuto tracciando da P la perpendicolare PH alla retta a , e prolungando il segmento PH di un segmento $HP' = PH$.



Cliccando su questa freccia ➡, ecco una figura GEOGEBRA per vedere all'opera una simmetria assiale. In particolare, trascinando col mouse il punto Q della figura, che è vincolato a restare sul contorno di ABC, constaterai come anche in questo caso la trasformazione “muti segmenti in segmenti”.

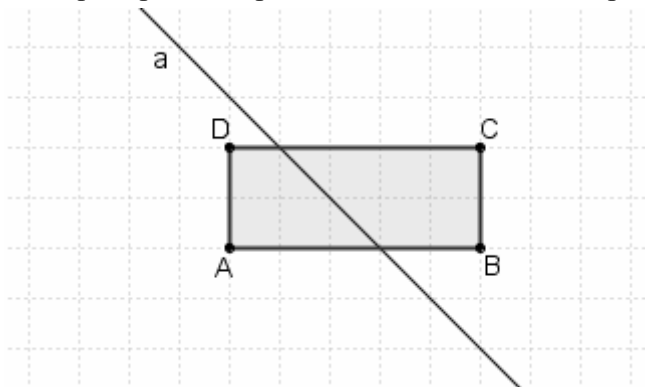
ESERCIZI

- 1) Considera l'omotetia avente per centro il punto O della figura sottostante, e rapporto $k = 1/2$.
- Determina le immagini A' , B' , C' , D' dei vertici del rettangolo ABCD.
 - Qual è l'immagine di O nella trasformazione?
 - Determina le controimmagini A^* , B^* , C^* , D^* dei vertici di ABCD.



Vai a vedere la soluzione ➡

- 2) Nella figura sotto riportata trovi un rettangolo ABCD e una retta a.
- Disegna le immagini A' , B' , C' , D' , e le controimmagini A^* , B^* , C^* , D^* , dei vertici di ABCD, nella simmetria assiale di asse a.
 - Quali sono, qui, i punti del piano che coincidono con la propria immagine (punti “uniti”)?

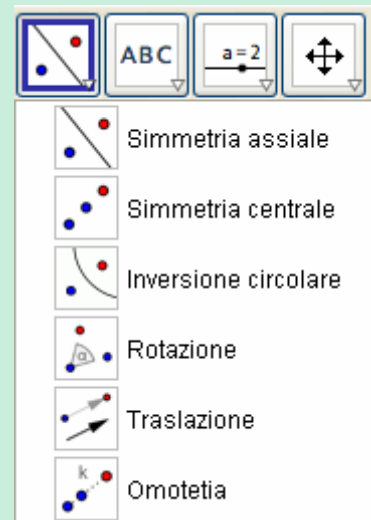


Vai a vedere
la soluzione ➡

Semplici trasformazioni geometriche con GEOGEBRA

Fermo restando che innanzitutto devi saper svolgere gli esercizi su *carta*, con matita, righello e squadra, il freeware GeoGebra permette, fra le tantissime cose, anche di sottoporre una figura a qualche trasformazione geometrica fondamentale.

L'icona che serve a questo scopo è facilmente riconoscibile, e il messaggio di HELP che si può far comparire con la pressione di F1 sulla tastiera ti spiega come fare.

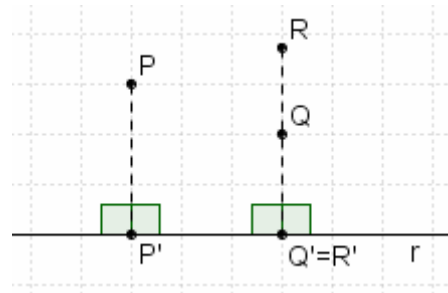


2. UN CONTROESEMPIO

Controesempio: una corrispondenza fra punti del piano, che non sia una “trasformazione”.

Se consideriamo su di un piano una retta r fissata e facciamo corrispondere ad ogni punto P del piano la sua proiezione P' su r , questa corrispondenza NON avrà il diritto di essere chiamata “trasformazione piana”, per il fatto che NON E' BIUNIVOCA ! Se è infatti vero che ad ogni punto del piano corrisponde uno ed un solo altro punto, non vale invece il viceversa: infatti, preso un punto del piano, esso avrà:

- infinite controimmagini, qualora appartenga alla retta r ;
- nessuna controimmagine, se non appartiene ad r .



3. L'IMMAGINE DI UN SEGMENTO ATTRAVERSO UNA TRASFORMAZIONE PIANA

Un dubbio.

Ma ... in una trasformazione piana, l'immagine di un segmento è sempre ancora un segmento?

Negli esempi precedenti (una omotetia di rapporto 3; una simmetria assiale) abbiamo visto (empiricamente, senza ancora una dimostrazione rigorosa) che l'immagine di un segmento risultava essere ancora un segmento.

In effetti, le trasformazioni più “comuni” sono quelle che mutano segmenti in segmenti.

Esistono però anche delle trasformazioni che NON si comportano in questo modo.

Per fare un esempio, consideriamo un piano nel quale sia stato fissato un riferimento cartesiano.

Possiamo pensare alla corrispondenza $P \rightarrow P'$ definita (utilizzando le coordinate) nel modo seguente:

$$P(x, y) \xrightarrow{t} P'(x', y'), \text{ con } \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{y^3}{10} \end{cases}$$

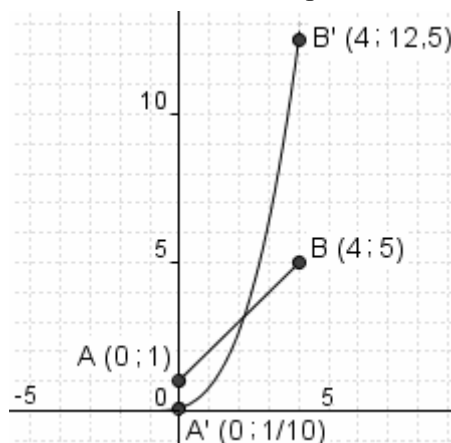
La corrispondenza è biunivoca, in quanto:

- non solo ad ogni punto (x, y) corrisponde uno ed un solo altro punto (x', y')
- ma è anche vero che ogni punto del piano risulta essere il corrispondente di uno ed un solo altro punto, come si può verificare invertendo le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \sqrt[3]{10y'} \end{cases}$$

Di qui si vede che per ogni punto del piano, esiste ed è unica la rispettiva controimmagine.

Se ora consideriamo
ad esempio
il segmento
di estremi
 $A(0,1)$ e $B(4,5)$
e andiamo a disegnare
le immagini dei suoi punti,
ci rendiamo conto
che tali immagini
non costituiscono un segmento,
bensì un arco di curva!



N

Osserviamo, per inciso, che se avessimo preso invece la corrispondenza definita dalle equazioni $\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2 \end{cases}$

O

questa NON avrebbe individuato una “trasformazione geometrica”, perché non sarebbe stata biunivoca.

T

Infatti, provando ad invertire, si sarebbe ottenuto

A

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \pm\sqrt{y'} \end{cases}$$

Ora, la radice quadrata preceduta dal doppio segno ci dice che: i punti con ordinata negativa non hanno controimmagine; quelli con ordinata positiva ce l'hanno ma non è unica.

4. TRASFORMAZIONI PIANE MOLTO SPECIALI: LE AFFINITA' E, IN PARTICOLARE, LE ISOMETRIE

**Si dicono AFFINITA' quelle trasformazioni che
MUTANO RETTE IN RETTE, CONSERVANDO L'ORDINE DEI PUNTI ALLINEATI**
(= se A, B, C sono allineati, con B compreso fra A e C ,
dette A', B', C' le rispettive immagini,
anche A', B', C' sono certamente allineati, con B' compreso fra A' e C').

Dalla definizione si trae immediatamente che

**un'affinità muta sempre
una semiretta in un'altra semiretta,
e un segmento in un altro segmento.**

Altra conseguenza della definizione è che

**l'immagine, attraverso un'affinità, di un triangolo (compresi i punti interni di questo)
è sempre ancora un triangolo;**

questo enunciato, vero per tutte le affinità, è un po' noioso da provare e noi ne presenteremo la dimostrazione nel successivo paragrafo 5, riferendoci al caso particolare delle "isometrie" (tuttavia, si può verificare che gli stessi ragionamenti lì utilizzati funzionerebbero perfettamente anche se estesi ad una affinità qualsiasi).

L'omotetia e la simmetria assiale sono due esempi di affinità

(noi per ora l'abbiamo constatato empiricamente; il "Teorema fondamentale sulle isometrie" qui sotto riportato, insieme con lo specchio del successivo paragrafo 6, consente di dimostrarlo per la simmetria assiale, mentre per l'omotetia la dimostrazione è una conseguenza del contenuto dei successivi paragrafi 15 e 16).

Si dicono ISOMETRIE quelle trasformazioni che "CONSERVANO LE DISTANZE":

**cioè, una trasformazione t è un'isometria se e solo se,
per ogni coppia di punti A, B ,
indicate con A', B' le rispettive immagini, si ha sempre
 $A'B' = AB$.**

La simmetria assiale è un'isometria (immediato da constatare, dimostrazione nel successivo par. 6),
l'omotetia non lo è.

TEOREMA FONDAMENTALE SULLE ISOMETRIE

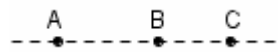
OGNI ISOMETRIA E' ANCHE UN'AFFINITA', ossia:

**se una trasformazione piana è un'isometria (= "conserva le distanze"),
allora certamente quella trasformazione piana muta rette in rette,
conservando l'ordine dei punti allineati**
(e, di conseguenza, muta semirette in semirette e segmenti in segmenti).

Dimostrazione

Prendiamo tre punti A, B, C ALLINEATI

(= giacenti su di una stessa retta), con B compreso fra A e C .



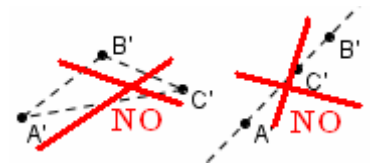
Se t è un'isometria, posto $A' = t(A)$, $B' = t(B)$, $C' = t(C)$,
risulterà $A'B' = AB$, $A'C' = AC$, $B'C' = BC$.

Essendo allora $AB + BC = AC$, sarà anche $A'B' + B'C' = A'C'$.

Ma **quest'ultima relazione può sussistere soltanto se i tre punti A', B', C'
sono a loro volta fra loro allineati, con B' compreso fra A' e C' .**

Infatti

- se i tre punti *non* fossero allineati varrebbe invece la "disuguaglianza triangolare" $A'B' + B'C' > A'C'$
- mentre se A', B' e C' fossero allineati, ma con B' *non* compreso fra A' e C' , varrebbe un'altra uguaglianza, ma non quella in questione.



Così la tesi è sostanzialmente dimostrata.

Infatti abbiamo fatto vedere che un'isometria muta sempre

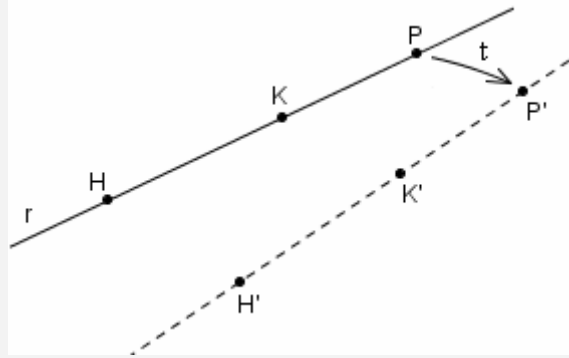
una terna di punti allineati in un'altra terna di punti allineati, conservando l'ordine dei punti in gioco;

ma ora, data una retta r , qualche considerazione supplementare

(che esporremo qui di seguito, nel riquadro) consentirà di provare che la sua immagine è ancora una retta.

Infatti, fissati a piacere su r due punti H e K , consideriamo le rispettive immagini H' , K' : un qualsivoglia punto P della retta r verrà certamente trasformato, in virtù di quanto già dimostrato, in un punto allineato con H' e K' , quindi in un punto facente parte della retta $H'K'$.

Con ciò abbiamo provato che le immagini dei punti di $r=HK$, stanno tutte sulla retta $H'K'$.



Si potrebbe a questo punto ritenere la dimostrazione conclusa...

... invece, se ci pensi bene, non è così!

In effetti, resta ancora da dimostrare

che la retta $H'K'$ è completamente “riempita” dalle immagini dei punti di r , ossia che OGNI punto di tale retta è l’immagine di un punto di r .

Coraggio dunque!

Al nostro scopo, formuliamo innanzitutto un’ovvia osservazione preliminare: la corrispondenza inversa di un’isometria è ancora un’isometria (NOTA).

Ma allora, ritorniamo alla nostra coppia di rette $r = HK$, $H'K'$.

Fin qui, abbiamo dimostrato che l’immagine di ciascun punto della retta HK , sta sulla $H'K'$: e ciò prova che l’insieme delle immagini dei punti di HK è un SOTTOINSIEME della $H'K'$.

Se adesso pensiamo all’isometria inversa della t , allo stesso modo

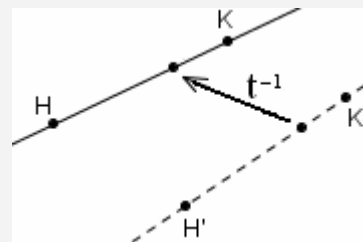
l’insieme delle immagini dei punti della retta $H'K'$ attraverso tale trasformazione inversa t^{-1} andrà a costituire un sottoinsieme della retta HK .

Dunque, preso un *qualsivoglia* punto della $H'K'$, la sua immagine attraverso l’isometria inversa della t sarà un certo punto, *appartenente alla* HK ;

ciò significa che la controimmagine, rispetto alla t , di quel punto arbitrario di $H'K'$, *sta su* HK :

ma allora *OGNI punto della* $H'K'$

è immagine, attraverso la t , *di un punto della* HK .



E con ciò, la dimostrazione del Teorema Fondamentale è finalmente completata.

NOTA

Detta i una qualsivoglia isometria, consideriamo

la corrispondenza inversa, che indicheremo con i^{-1} .

La i^{-1} , ossia la corrispondenza che, rispetto alla i , fa “tornare indietro” (= fa corrispondere ad un punto del piano,

quello che ne era la CONTROimmagine attraverso la i)

è anch’essa, come la i , una corrispondenza biunivoca

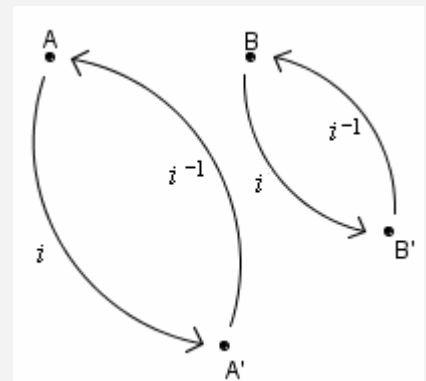
(anziché dalle asole ai bottoni, fa passare dai bottoni alle asole!)

e conserva le distanze: infatti, detti A' , B' due generici punti del piano,

e dette A , B le loro immagini attraverso la i^{-1} (ossia, le loro

controimmagini attraverso la i) avremo $AB = A'B'$, per il fatto che

A' e B' sono le immagini di A e B attraverso la i , che è un’isometria.



UNA PUNTUALIZZAZIONE IMPORTANTE

Quando abbiamo dato la definizione di isometria, che ti invito a rileggere, abbiamo scritto che in un’isometria, per qualsiasi coppia di punti A , B , si ha sempre $A'B' = AB$.

Vorrei ora sottolineare un fatto:

con ciò, NON stavamo affatto dando per scontato che il segmento $A'B'$ fosse l’immagine del segmento AB .

Voglio dire: A' era l’immagine di A , e B' era l’immagine di B , ma non era assolutamente sottinteso

che i punti interni al segmento AB avessero come immagini i punti interni del segmento $A'B'$.

Ma ora, **dopo aver dimostrato il Teorema Fondamentale, resta definitivamente stabilito che in una**

isometria un segmento viene sempre trasformato in un segmento. Precisamente, in un segmento uguale (= congruente, cioè sovrapponibile tramite un movimento rigido) a quello di partenza; e avente per estremi gli estremi del segmento di partenza.

5. TEOREMI SULLE ISOMETRIE

1. In un'isometria a rette incidenti corrispondono rette incidenti, e a rette parallele corrispondono rette parallele.
2. In ogni isometria l'immagine di un triangolo è sempre ancora un triangolo, uguale (= congruente) a quello di partenza.
3. In ogni isometria ad un angolo corrisponde sempre un angolo, uguale a quello di partenza.
4. In ogni isometria ad un poligono corrisponde sempre un poligono, uguale a quello di partenza.

□ Dimostrazione del teorema 1

- Siano a, b due rette incidenti, e a', b' le rispettive rette immagini attraverso un'isometria i (sappiamo che un'isometria è anche un'affinità, quindi l'immagine di una retta attraverso un'isometria è sempre ancora una retta). Detto W il punto di intersezione fra a e b , l'immagine W' di W dovrà appartenere tanto alla retta a' quanto alla retta b' , le quali pertanto saranno anch'esse incidenti.
- Se invece a, b sono due rette parallele, le loro immagini a', b' dovranno pure essere parallele, perché se, per assurdo, avessero un punto in comune, la controimmagine di questo punto dovrebbe appartenere sia alla retta a che alla retta b , che quindi non sarebbero parallele, contro quanto supposto.

□ Dimostrazione del teorema 2

Sia i un'isometria, e sia ABC un triangolo. Vogliamo innanzitutto dimostrare che l'insieme delle immagini dei punti di ABC costituisce ancora un triangolo; successivamente, faremo vedere che tale triangolo è uguale ad ABC .

Sia dunque: $A' = i(A)$, $B' = i(B)$, $C' = i(C)$. Poiché un'isometria muta segmenti in segmenti, l'insieme delle immagini dei punti del segmento AB andrà a costituire il segmento $A'B'$ (brevemente: l'immagine del segmento AB sarà il segmento $A'B'$), e analogamente per gli altri due lati. Insomma, $i(AB) = A'B'$, $i(AC) = A'C'$, $i(BC) = B'C'$: il "contorno" di ABC si muta nel "contorno" di $A'B'C'$.

Occorre ora provare che ogni punto P interno ad ABC ha come immagine un punto P' , che è interno ad $A'B'C'$.

Sia dunque P un punto interno ad ABC .

Sia N l'intersezione della semiretta AP col lato BC .

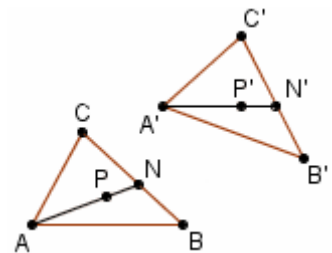
Il punto P appartiene al segmento AN .

Sia $N' = i(N)$. Il punto N' apparterrà a $B'C'$, perché questo segmento è costituito dalle immagini dei punti del segmento BC ; ed N sta, appunto, su BC .

Ora il punto $P' = i(P)$ dovrà appartenere al segmento $A'N'$,

ma quest'ultimo segmento è interno al triangolo $A'B'C'$;

e ciò prova che P' è interno ad $A'B'C'$.



Per completare la dimostrazione, manca ancora un passaggio:

bisogna far vedere che la controimmagine di ogni punto interno ad $A'B'C'$ è interna ad ABC .

Sia dunque Q^* un punto interno ad $A'B'C'$; indichiamo con Q la sua controimmagine.

Vogliamo far vedere che Q è interno ad ABC .

Chiamiamo S^* l'intersezione della semiretta $A'Q^*$ col lato $B'C'$; sia S la controimmagine di S^* .

Teniamo presente che il punto Q^* appartiene al segmento $A'S^*$.

Il punto S dovrà appartenere a BC , perché quest'ultimo segmento

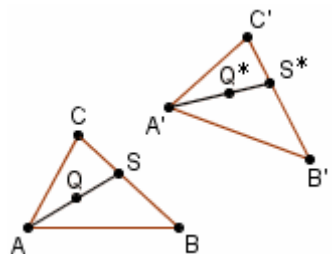
è costituito dalle controimmagini dei punti del segmento $B'C'$,

ed S^* sta appunto su $B'C'$.

Consideriamo ora il segmento AS , che è interno al triangolo ABC :

l'insieme delle immagini dei suoi punti va a costituire il segmento $A'S^*$;

ma tra i punti di $A'S^*$ c'è anche Q^* ; quindi la controimmagine Q del punto Q^* sta su AS , che è interno ad ABC (NOTA)



Tutto ciò prova che l'insieme delle immagini dei punti del triangolo ABC , va a costituire ancora un triangolo ($A'B'C'$).

Riguardo infine al fatto che $A'B'C'$ sia uguale ad ABC , ciò è conseguenza immediata del

3° Criterio di uguaglianza dei triangoli ($A'B' = AB$, $A'C' = AC$, $B'C' = BC$ per def. di isometria).

E con ciò la dimostrazione del teorema è completata.

NOTA - Più brevemente, per far vedere che la controimmagine di ogni punto interno ad $A'B'C'$ è interna ad ABC , si sarebbe potuta chiamare in causa la corrispondenza inversa della i .

Come sappiamo, l'inversa di un'isometria è ancora una isometria; e per quanto già dimostrato sopra, siamo certi che le immagini, attraverso la i^{-1} , dei punti interni ad $A'B'C'$, sono interne ad ABC .

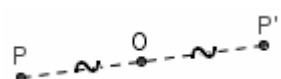
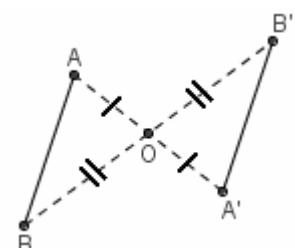
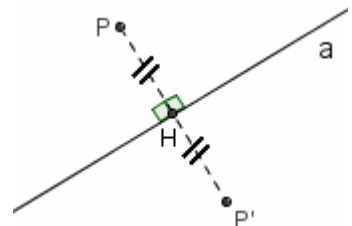
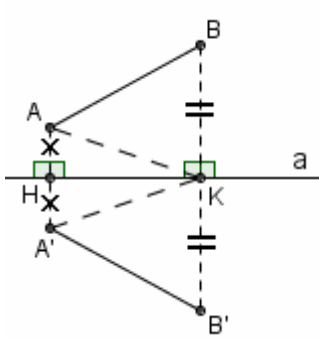
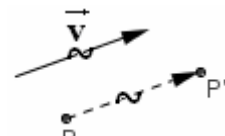
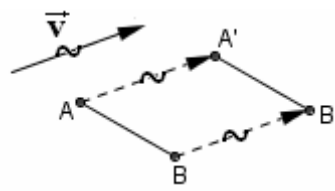
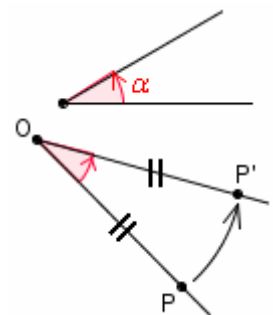
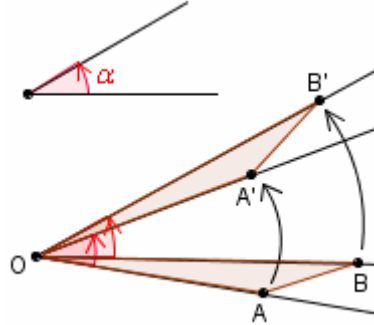
Quindi le controimmagini, attraverso la i , dei punti interni ad $A'B'C'$, sono interne ad ABC .

6. ISOMETRIE NOTEVOLI: SIMMETRIE, TRASLAZIONI, ROTAZIONI

Importanti trasformazioni piane sono le seguenti:

- la simmetria rispetto ad un punto (= **simmetria centrale**)
- la simmetria rispetto a una retta (= **simmetria assiale**)
- la **traslazione** di vettore $\vec{v}$
- la **rotazione** di centro O e angolo (orientato) α .

Lo specchietto successivo dimostra che queste trasformazioni sono tutte isometriche.

SIMMETRIA CENTRALE DI CENTRO O: $s_O : P \rightarrow P'$ tale che O sia il punto medio del segmento PP' 	E' UN'ISOMETRIA PERCHE' $OA'B' = OAB$ (1° Criterio) $\downarrow$ $A'B' = AB$ 	
SIMMETRIA ASSIALE DI ASSE a: $s_a : P \rightarrow P'$ tale che la retta a sia l'asse del segmento PP' 	E' UN'ISOMETRIA PERCHE' $A'HK = AHK$ (1° Criterio) $\downarrow$ $A'K = AK$ e $\widehat{A'KH} = \widehat{AKH}$ da cui $\widehat{A'KB'} = \widehat{AKB}$ (complementari di angoli uguali) $\downarrow$ $A'B'K = ABK$ (1° Criterio) $\downarrow$ $A'B' = AB$ 	
TRASLAZIONE DI VETTORE $\vec{v}$: $\tau_{\vec{v}} : P \rightarrow P'$ tale che PP' orientato = $\vec{v}$ 	E' UN'ISOMETRIA PERCHE' $ABB'A'$ è un parallelogramma (ha infatti i due lati opposti AA', BB' paralleli e uguali) $\downarrow$ $A'B' = AB$ 	
ROTAZIONE DI CENTRO O E ANGOLO ORIENTATO α: $\rho_{O, \alpha} : P \rightarrow P'$ tale che: 1) $\widehat{POP'} = \alpha$ 2) $OP' = OP$ 	E' UN'ISOMETRIA PERCHE' $AOB = A'OB'$ in quanto $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \alpha$ e i due angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$ sono la differenza (o, eventualmente, se la figura fosse diversa, la somma) fra questi due angoli uguali e uno stesso angolo ($\widehat{BOA'}$) $\downarrow$ $AOB = A'OB'$ (1° Criterio) $\downarrow$ $A'B' = AB$ 	NOTA L'angolo α si considera convenzionalmente positivo per rotazioni in senso ANTIORARIO, negativo per rotazioni in senso ORARIO

7. ALTRE ISOMETRIE. RELAZIONE FRA ISOMETRIE E MOVIMENTI RIGIDI

a)

Prima di tutto, **si ottiene sempre un'isometria quando si "compongono"**
(= si applicano successivamente) **due qualsivoglia isometrie.**

Infatti è immediato dimostrare che

la composizione di due isometrie è ancora un'isometria.

Dimostrazione

Presi due punti A, B, e indicate:

- con A' , B' le loro immagini attraverso la prima delle due isometrie da applicare successivamente
- con A'' , B'' le immagini di A' , B' attraverso la seconda isometria

avremo $A'B' = AB$ e poi $A''B'' = A'B'$, da cui $A''B'' = AB$.

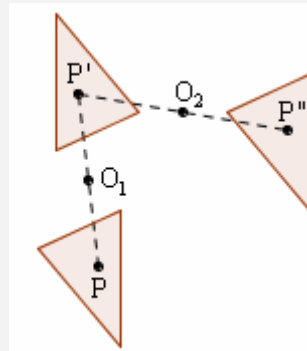
Ad esempio, consideriamo due punti fissi O_1 e O_2 ,
e applichiamo al generico punto P del piano

- ♫ innanzitutto la simmetria di centro O_1 ,
ottenendo un certo punto P' ;
- ♫ poi, a questo P' , applichiamo la simmetria di centro O_2 ,
pervenendo ad un nuovo punto P'' .

Possiamo ora pensare alla trasformazione

che muta *direttamente* P in P'' :

bene, questa, essendo la composizione di due isometrie,
sarà ancora un'isometria.



In figura è anche rappresentato un triangolo con la sua immagine attraverso la prima simmetria, poi l'immagine di questa immagine attraverso la seconda simmetria

b)

**Se si pensa di "far scivolare il piano su sé stesso",
o di "ribaltare il piano intorno ad una sua retta, che rimanga ferma nel ribaltamento",
o di effettuare varie composizioni, ossia applicazioni successive, di tali movimenti rigidi,
si individua in tal modo un'isometria.**

Possiamo visualizzare bene questo fatto utilizzando la lavagna come piano fisso,
e un foglio di plastica trasparente come piano mobile sovrapposto al precedente.

Facciamo un disegno sulla lavagna, appoggiamoci sopra il foglio trasparente e su questo ricalchiamo il disegno.
Poi, sempre tenendo il foglio trasparente a ridosso della lavagna,
lo spostiamo lateralmente o verticalmente, magari anche ruotandolo.

Ora sul piano della lavagna si vedono due figure, quella originaria sull'ardesia e quella ricalcata a penna sul foglio; ai "vecchi" punti della figura originaria corrispondono i nuovi punti della figura sul foglio.

Viceversa, il teorema che citeremo fra poco

("una qualsiasi isometria si può scomporre nell'applicazione successiva di al più 3 simmetrie assiali"),
insieme con l'ovvia osservazione che una simmetria assiale può essere evidentemente associata
ad un movimento rigido di "ribaltamento del piano attorno a una sua retta", mostra che

**ogni isometria, comunque sia stata definita, è SEMPRE interpretabile come generata
da un movimento rigido che "sposti il piano per poi risovrapporlo a sé stesso". Quindi**

LE ISOMETRIE SONO INTIMAMENTE CORRELATE o correlabili CON I MOVIMENTI RIGIDI.

**E un'isometria viene detta "DIRETTA" o "INVERSA" a seconda che
il movimento rigido dal quale si può pensare generata**

- comporti soltanto uno "strisciamento" del piano su sé stesso (isometrie dirette)
- oppure richieda anche un ribaltamento del piano intorno ad una sua retta (isometrie inverse).

□ LA SIMMETRIA ASSIALE E' UN PO' "LA REGINA" DELLE ISOMETRIE

Un teorema estremamente interessante (ne omettiamo la dimostrazione) afferma che **QUALSIASI ISOMETRIA
si può sempre scomporre nel prodotto (=applicazione successiva) di AL PIU' 3 SIMMETRIE ASSIALI.**
Quindi la **simmetria assiale**, in questo senso, ci appare come la "**isometria regina**",
quella che, volendo, può essere assunta come l' "ingrediente base" di qualsiasi altra isometria.

Si può poi dimostrare che

- componendo un numero **PARI** di simmetrie assiali si ottiene sempre una isometria diretta;
- componendone un numero **DISPARI**, si ha una isometria inversa.

□ L'ISOMETRIA IDENTICA (= IDENTITA')

La indicheremo col simbolo I . E' l'isometria banale che "lascia tutto fermo": $I(P) = P, \forall P$.
Pur essendo banale, ha un'importanza teorica notevole.

8. TEOREMI SULLA COMPOSIZIONE (= APPLICAZIONE SUCCESSIVA) DI DUE ISOMETRIE

1) La composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli è una traslazione.

Il vettore di questa traslazione è il doppio della “distanza vettoriale orientata” del 1° asse dal 2°.

2) La composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti è una rotazione

- il cui centro è il punto di intersezione dei due assi,
- e il cui angolo è il doppio dell'angolo orientato individuato dai due assi, presi nell'ordine.

3) La composizione di due simmetrie centrali di centri O_1, O_2 è la traslazione di vettore $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

4) La composizione di due traslazioni di vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ è la traslazione di vettore $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

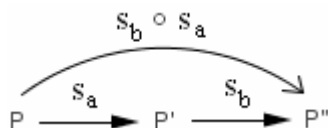
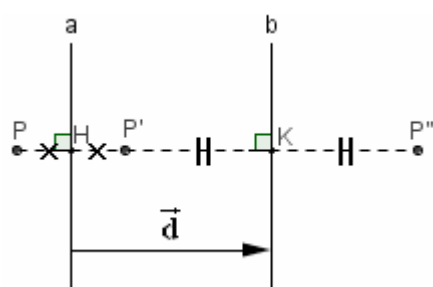
5) La composizione di due rotazioni aventi lo stesso centro, è ancora una rotazione, avente

- per centro lo stesso centro,
- e per angolo di rotazione la somma algebrica degli angoli delle rotazioni componenti.

6) La composizione di un'omotetia con un'isometria o viceversa

muta sempre un triangolo in un altro simile ed è per questo chiamata “**similitudine**”.

Dimostrazione di 1)



Il simbolo $S_b \circ S_a$ indica

la trasformazione che si ottiene applicando

- S_a al punto P iniziale,
- poi S_b al punto P' ottenuto.

Osserviamo che

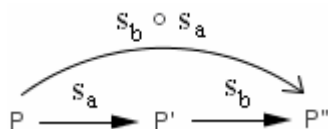
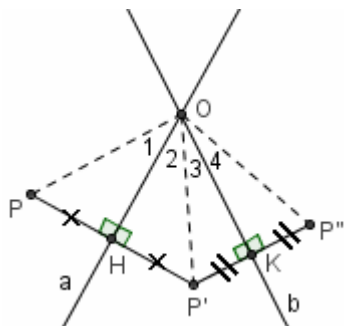
la trasformazione applicata **PER PRIMA** viene scritta **PER ULTIMA**.

$$\overline{PP''} = \overline{PP'} + \overline{P'P''} = 2\overline{HP'} + 2\overline{P'K} = 2(\overline{HP'} + \overline{P'K}) = 2\overline{HK} = 2\vec{d}$$

Nella catena, tutti i segmenti vanno pensati orientati.

Il vettore $\vec{d}$ esprime anch'esso una distanza “orientata” (da a verso b)

Dimostrazione di 2)

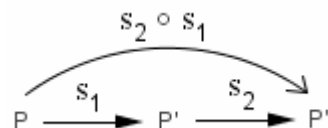
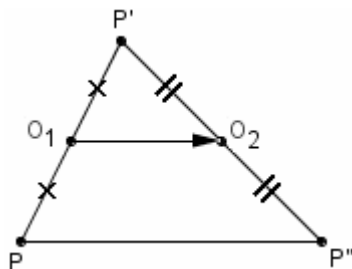


$$\widehat{OPH} = \widehat{OP'H}, \widehat{OP'K} = \widehat{OP''K} \text{ (1° Criterio)}$$

$$\text{Perciò } \widehat{O_1} = \widehat{O_2}; \widehat{O_3} = \widehat{O_4}; \overline{OP''} = \overline{OP'} = \overline{OP}$$

$$\widehat{POP''} = \widehat{POP'} + \widehat{P'OP''} = 2\widehat{O_2} + 2\widehat{O_3} = 2(\widehat{O_2} + \widehat{O_3}) = 2\widehat{HOK} = 2\widehat{ab}$$

Dimostrazione di 3)

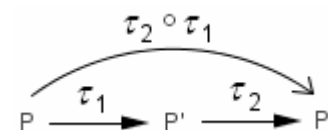
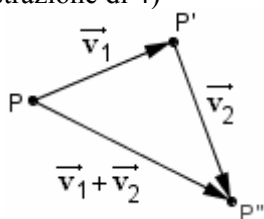


In $PP'P''$, O_1O_2 è la congiungente i punti medi di due lati:

perciò

$$\left. \begin{array}{l} \overline{PP''} \parallel \overline{O_1O_2} \\ \overline{PP''} = 2\overline{O_1O_2} \end{array} \right\} \rightarrow \overline{PP''} = 2\overline{O_1O_2}$$

Dimostrazione di 4)



$$\overline{PP''} \text{ orientato} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

La somma di due vettori si effettua

- applicandoli uno di seguito all'altro, per poi prendere il vettore che parte dall'inizio del primo e termina sulla punta del secondo, proprio come illustrato qui a sinistra
- oppure con l'equivalente “regola del parallelogrammo” $\Rightarrow$

9. OMOTETIE CON RAPPORTO NEGATIVO, SIMILITUDINI

Un'omotetia di rapporto negativo si comporta nel modo illustrato dalla figura qui a fianco (dove, per fissare le idee, si è preso $k = -3$).

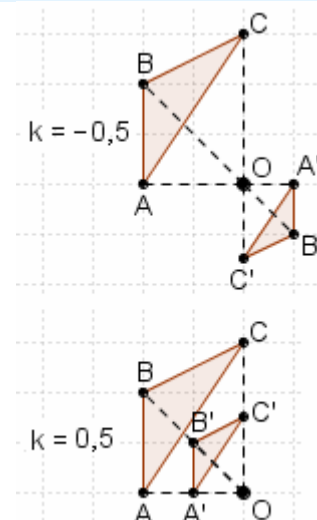
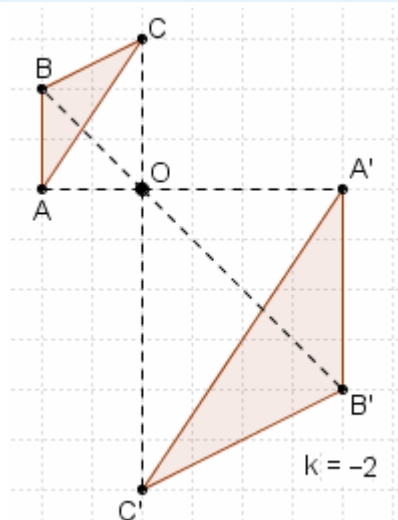
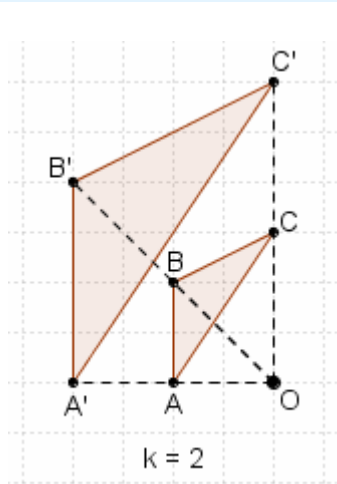


In definitiva, **unificando le definizioni di omotetia a rapporto positivo e a rapporto negativo**:

si dice **OMOTETIA di centro O e rapporto k** ($k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, k positivo o negativo)

la trasformazione piana che ad un punto P associa il punto P', tale che

- P, P', O siano allineati;
- si abbia $OP' = k \cdot OP$, interpretando i segmenti come orientati (in pratica, come rappresentanti di vettori); oppure, se si preferisce: $OP' = |k| \cdot OP$, interpretando i segmenti come "non orientati" = "assoluti" ma con l'intesa che i due punti P, P' vanno presi
 - dalla stessa parte, rispetto ad O, nel caso $k > 0$,
 - da parti opposte rispetto ad O, nel caso $k < 0$.



- **E' evidente che un'omotetia non conserva le distanze** (= non muta due punti A, B in due altri punti A', B' tali che la distanza A'B' sia uguale alla distanza AB dei due punti iniziali), **quindi non è un'isometria**; tuttavia, si potrebbe dimostrare che è un'affinità, ossia che **muta rette in rette**, conservando l'ordine dei punti allineati (e, di conseguenza, muta semirette in semirette, **segmenti in segmenti, triangoli in triangoli**).

- Anzi, si può dimostrare (vedi la pagina a fianco) che **in un'omotetia di rapporto k l'immagine di un segmento AB è un altro segmento A'B' tale che $A'B'/AB = |k|$** .

- Da ciò segue che

se il rapporto fra due dati segmenti AB e CD è un certo numero h ($AB/CD = h$), allora avrà lo stesso valore h anche il rapporto fra i due segmenti A'B' e C'D'

che corrispondono ad AB e CD attraverso un'omotetia: $\frac{AB}{CD} = h \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = h$.

Per indicare ciò si dice, brevemente, che **"un'omotetia conserva i rapporti fra i segmenti"**.

- Inoltre **un'omotetia conserva gli angoli** (= muta ogni angolo in un angolo uguale a quello di partenza) e **trasforma sempre un triangolo in un altro triangolo, simile a quello di partenza**.

Se, tanto per fare un esempio, un'omotetia ha rapporto $k = 3$, allora trasformerà qualsiasi triangolo in un triangolo, simile a quello dato, avente ciascun lato triplo del lato corrispondente del triangolo originario, quindi anche il *perimetro* triplo, e l'*area* uguale a 9 volte l'area del triangolo di partenza.

- Poiché poi **qualsiasi affinità "muta rette parallele in rette parallele"** (facile la dimostrazione, del tutto analoga a quella data con riferimento alle isometrie), **ciò vale anche per le omotetie**.



Questa  bella figura dinamica GEOGEBRA mostra all'opera un'omotetia il cui centro e il cui rapporto (positivo o negativo) possono essere fissati dall'utente.

Si dimostra che **date due omotetie** di centri $C_1(x_1, y_1)$, $C_2(x_2, y_2)$ e rapporti k_1, k_2 , “**componendole**”, cioè applicandole una dopo l’altra, **si ottiene ancora un’omotetia**, il cui rapporto k e centro C sono tali che:

$$\text{♫ } k = k_1 \cdot k_2$$

$$\text{♫ } C \text{ è allineato con } C_1 \text{ e } C_2, \text{ se } C_1 \neq C_2, \text{ mentre nel caso particolare } C_1 \equiv C_2 \text{ si ha } C \equiv C_1 \equiv C_2$$

DIMOSTRAZIONE DI ALCUNI DEGLI ENUNCIATI DELLA PAGINA PRECEDENTE

(diamo qui per scontato che un’omotetia sia un’affinità,
quindi muti rette in rette, segmenti in segmenti, triangoli in triangoli)

“In un’omotetia di rapporto k il segmento $A'B'$ immagine di un segmento AB è tale che $\frac{A'B'}{AB} = |k|$ ”.

Consideriamo un’omotetia di centro O e rapporto k (supponiamo inizialmente, per meglio fissare le idee, $k > 0$).

Siano A, B due punti qualsiasi del piano e A', B' le rispettive immagini.

Allora, per definizione di omotetia, si avrà $OA' = k \cdot OA$ e $OB' = k \cdot OB$ per cui i due triangoli $OA'B'$, OAB sono simili per il 2° Criterio di Similitudine: hanno infatti

$$\text{♫ due lati proporzionali } \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$$

♫ e l’angolo compreso in comune.

E quindi, poiché in due triangoli simili i lati sono tutti in proporzione, dovrà essere anche

$$A'B' : AB = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \text{ e perciò } \frac{A'B'}{AB} = k \text{ (se si preferisce, } A'B' = k \cdot AB \text{)}.$$

Ora, il simbolo di valore assoluto nell’enunciato è stato posto per includere anche il caso $k < 0$, nel quale la dimostrazione sarebbe del tutto simile.

“Se il rapporto fra due dati segmenti AB e CD è un certo numero h ($AB/CD = h$), allora avrà lo stesso valore h anche il rapporto fra i due segmenti $A'B'$ e $C'D'$ che corrispondono ad AB e CD attraverso un’omotetia:

$$\frac{AB}{CD} = h \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = h$$

Con gli stessi ragionamenti della parte precedente, si prova che in figura compaiono due coppie di triangoli simili tra loro:

$OA'B'$ e OAB , $OC'D'$ e OCD . E’ dunque

$$A'B' : AB = \frac{OA'}{OA} = k \text{ e } C'D' : CD = \frac{OC'}{OC} = k$$

quindi anche $A'B' : AB = C'D' : CD$

e, permutando i medi, $A'B' : C'D' = AB : CD$.

Se allora $\frac{AB}{CD} = h$, sarà anche $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD} = h$.

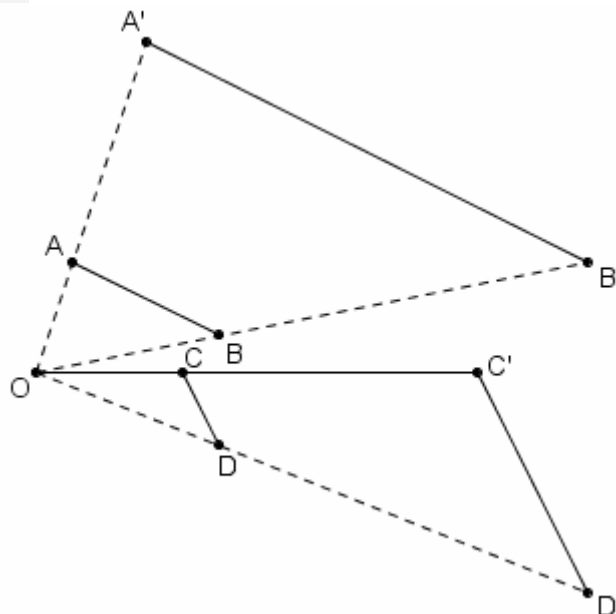
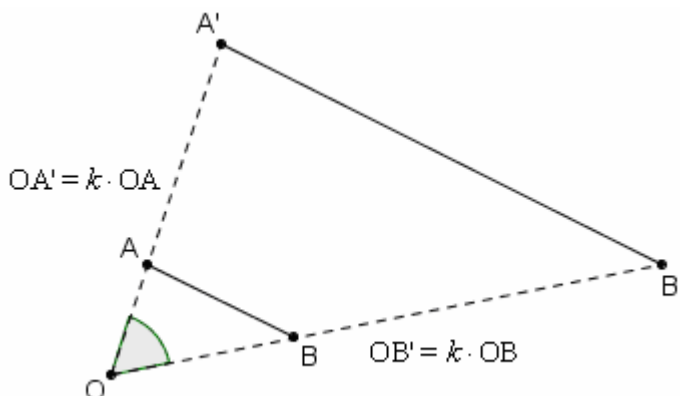
“In un’omotetia l’immagine di un triangolo è un triangolo simile a quello di partenza”.

Sia ABC un triangolo, e sia $A'B'C'$ la sua immagine attraverso un’omotetia di rapporto k .

Allora avremo, come dimostrato sopra, $A'B' = |k| \cdot AB$, $A'C' = |k| \cdot AC$, $B'C' = |k| \cdot BC$;

quindi i lati di $A'B'C'$ saranno proporzionali ai lati di ABC

e pertanto potremo dire che i due triangoli sono simili fra loro per il 3° Criterio di similitudine.



Si dice infine “SIMILITUDINE” una trasformazione che risulti dall’applicazione successiva (“composizione”) di un’OMOTETIA + un’ISOMETRIA, o di un’ISOMETRIA + un’ OMOTETIA.

Le proprietà scritte nel precedente riquadro dedicato alle omotetie si estendono anche alle similitudini.

10. PUNTI UNITI, RETTE DI PUNTI UNITI, RETTE UNITE

Si dice “punto unito”, o “punto fisso”, in una trasformazione, un punto che coincida con la sua immagine.

Esempi

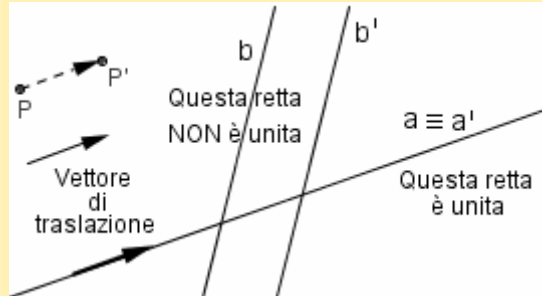
- ❑ In una simmetria centrale, il centro di simmetria è punto unito.
- ❑ In una simmetria assiale, sono punti uniti tutti quelli dell’asse di simmetria.
- ❑ In una traslazione, non si ha nessun punto unito.

Se una retta è costituita tutta da punti uniti, allora la si chiama “retta di punti uniti”.

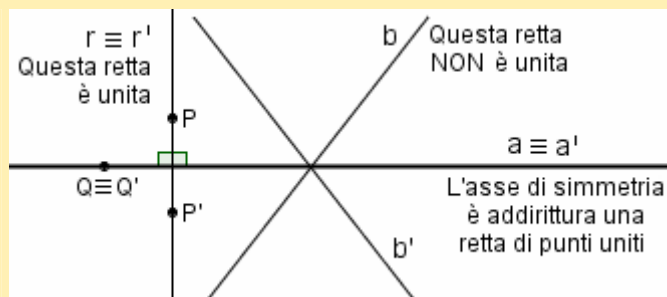
- ❑ Esempio classico: in una simmetria assiale, l’asse di simmetria è una retta di punti uniti.

**Se una retta viene mutata in sé stessa da una trasformazione, si dice che è una “retta unita”.
Attenzione! Una retta unita non deve essere necessariamente una “retta di punti uniti”.**

♪ Ad esempio, in una *traslazione* non si ha *nessun punto unito*, quindi a maggior ragione non si hanno nemmeno rette di punti uniti; tuttavia, *ogni retta parallela al vettore di traslazione* è una *retta unita*, perché la trasformazione la fa “risovrapporre a sé stessa”, pur con tutti i punti spostati.



♪ Un altro bell’esempio si può trovare pensando ad una *simmetria assiale*. Qui l’asse di simmetria è una “retta di punti uniti”. Se ora consideriamo una qualunque retta perpendicolare all’asse di simmetria, questa sarà “retta unita”, pur senza essere “retta di punti uniti”.

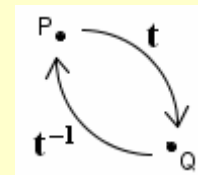


11. INVERSA DI UNA TRASFORMAZIONE

Data una trasformazione t , si dice “trasformazione inversa” della t , e si indica col simbolo t^{-1} , quella trasformazione che, rispetto alla t , fa “tornare indietro”: ossia,

$$P = t^{-1}(Q) \Leftrightarrow Q = t(P)$$

Insomma: P è l’immagine di Q attraverso la trasformazione inversa t^{-1} , se e solo se Q è l’immagine di P attraverso la t .



Possiamo anche dire che l’inversa di una trasformazione t ,

è quella trasformazione t^{-1} tale che la trasformazione composta $t^{-1} \circ t$ sia l’identità: $t^{-1} \circ t = I$

- ❑ L’inversa di un’omotetia di centro O e rapporto k , è l’omotetia di centro O e rapporto $1/k$;
- ❑ L’inversa di una traslazione è la traslazione di vettore opposto;
- ❑ L’inversa di una rotazione è la rotazione con lo stesso centro, ma di angolo opposto.

L’inversa di una simmetria, tanto centrale quanto assiale, è ... la simmetria stessa!!!

Quindi, detta s una simmetria (centrale o assiale, non importa), avremo che

$$s^{-1} = s$$

o, se si preferisce,

$$s \circ s = I \text{ (identità): applicando per due volte una simmetria, si ritorna al punto di partenza.}$$

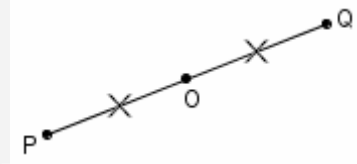
Se una trasformazione ha la proprietà di coincidere con la propria trasformazione inversa, si dice che è “involutoria”. t involutoria $\Leftrightarrow t^{-1} = t \Leftrightarrow t \circ t = I$ (=Identità, “trasformazione identica”).

Se t è una trasformazione involutoria, allora, quando è $Q = t(P)$, è senz’altro anche $P = t(Q)$!

Possiamo dunque dire che **le simmetrie (centrali e assiali) sono tipiche trasformazioni involutorie.**

12. FIGURE SIMMETRICHE RISPETTO A UN PUNTO, O A UNA RETTA

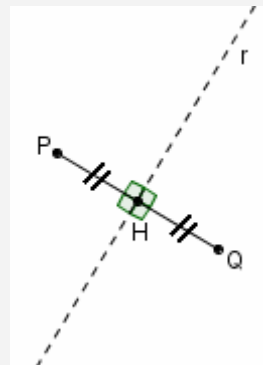
Due punti P, Q si dicono “simmetrici rispetto a un punto O”
se O è il punto medio del segmento PQ,
ossia se la simmetria di centro O muta P in Q e Q in P.



Due punti P, Q si dicono “simmetrici rispetto a una retta r”
se r è l'asse del segmento PQ

(= se il segmento PQ è perpendicolare ad r ed è diviso in metà da r =
= se per passare da P a Q, o da Q a P,
si cala dal punto di partenza il segmento perpendicolare a r
e si prosegue poi di un segmento uguale)

ossia se la simmetria di asse r muta P in Q e Q in P.



Quando si dice che due figure sono “simmetriche”,
“fra loro simmetriche”, o “simmetriche l'una dell'altra”,
si vuole affermare che esiste una simmetria
(di solito, assiale, ma potrebbe essere anche centrale)
che muta una figura nell'altra.

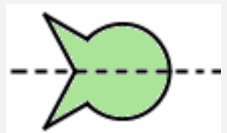
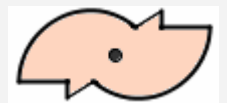
Certo, sarebbe più preciso affermare che le due figure sono
“simmetriche rispetto a una data retta”, o “a un dato centro”,
specificando pure di quale retta o di quale centro si parli!



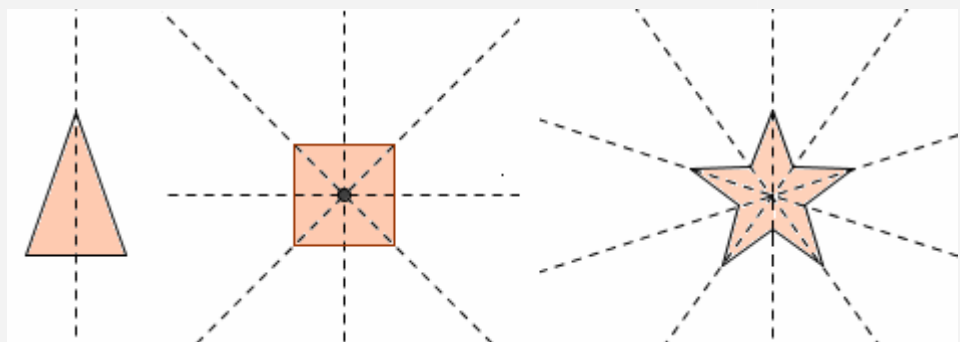
L'aggettivo “simmetrico, simmetrica” si usa anche al *singolare*.

Una figura (superficie, curva, insieme di punti qualsiasi) **si dice**

- **“simmetrica rispetto ad un punto”**
se la simmetria rispetto a quel punto muta la figura in sé stessa.
In tal caso il punto in questione viene detto **“centro di simmetria”** per la figura →
- **“simmetrica rispetto ad una retta”**
se la simmetria rispetto a quella retta muta la figura in sé stessa.
In tal caso la retta in questione viene detta **“asse di simmetria”** per la figura →



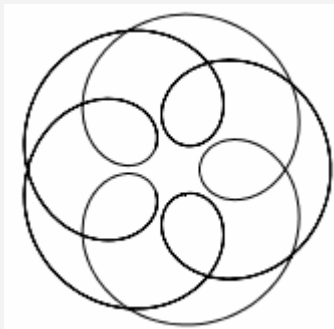
L'immagine a fianco
mostra alcune
figure poligonali
coi relativi
assi di simmetria;
osserva che
solo nel caso
del quadrato
c'è anche un
centro di simmetria!



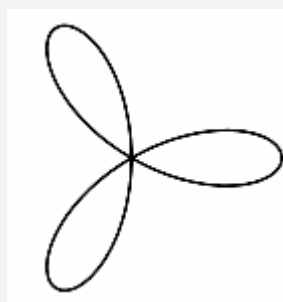
ESERCIZIO

Sapresti determinare
gli eventuali
assi di simmetria
e l'eventuale
centro di simmetria
delle curve famose
qui a destra?

Risposte →



Epitrocoide



Trifolium



Lemniscata di Bernoulli

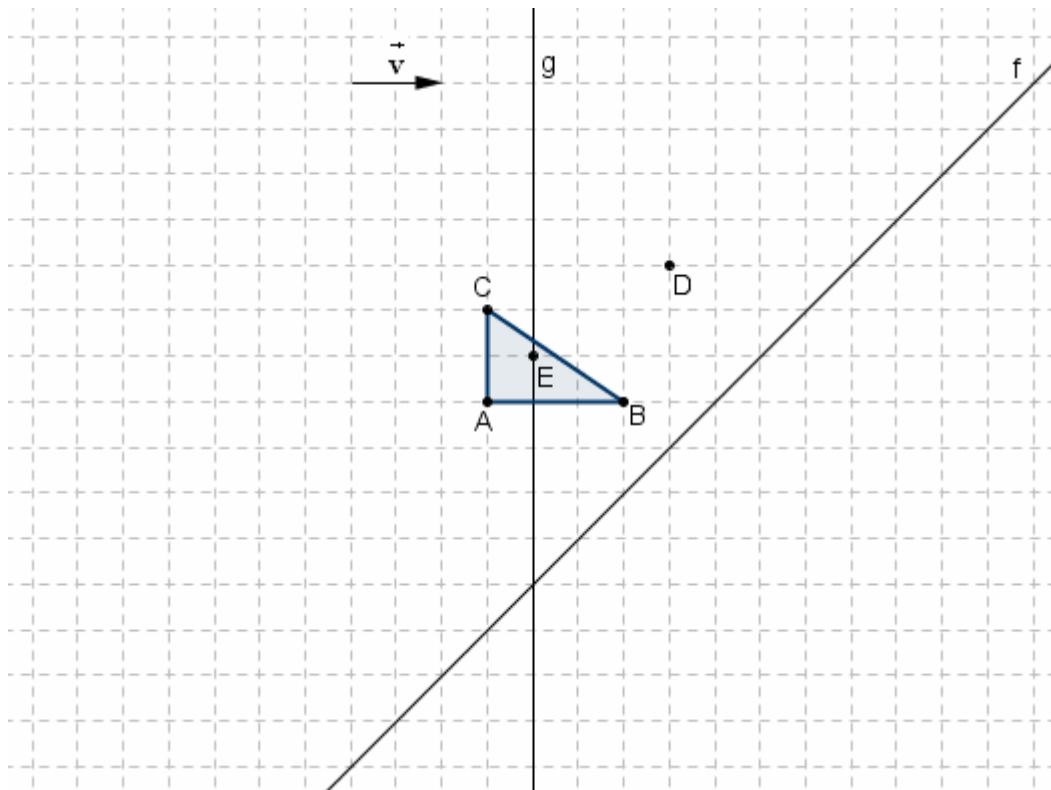
13. ESERCIZI SULLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

(puoi poi vedere lo svolgimento corretto o le risposte se clicchi sulla freccia)

Nella figura qui sotto riportata sono rappresentati

un triangolo ABC; due punti D, E; due rette f, g; un vettore $\vec{v}$.

Della figura, puoi riportare sul tuo quaderno soltanto gli elementi che ti interessano per lo specifico esercizio che stai svolgendo.



1) Disegna l'**IMMAGINE** A'B'C' del triangolo ABC:

- | | |
|--|---|
| a) nella simmetria di centro D $\Rightarrow$ | b) nella simmetria di centro E $\Rightarrow$ |
| c) nella simmetria di asse f $\Rightarrow$ | d) nella simmetria di asse g $\Rightarrow$ |
| e) nella traslazione di vettore $\vec{v}$ $\Rightarrow$ | f) nell'omotetia di centro D e rapporto 3 $\Rightarrow$ |
| g) nell'omotetia di centro E e rapporto 3/2 $\Rightarrow$ | h) nell'omotetia di centro E e rapporto -3 $\Rightarrow$ |
| i) nella rotazione di centro D e angolo $+90^\circ$
(= 90° in senso <i>antiorario</i>) $\Rightarrow$ | j) nella rotazione di centro E e angolo -45°
(= 45° in senso <i>orario</i>) $\Rightarrow$ |
| k) nell'omotetia di centro D e rapporto -1. Questa trasformazione coincide con ... $\Rightarrow$ | |
| l) nella trasformazione che si ottiene componendo (= applicando successivamente)
prima la simmetria di centro D, poi quella di centro E $\Rightarrow$ | |
| m) nella trasf. che si ottiene componendo prima la simmetria di centro E, poi quella di centro D $\Rightarrow$ | |
| n) nella trasf. che si ottiene componendo prima la simmetria di asse f, poi quella di asse g $\Rightarrow$ | |
| o) nella trasf. che si ottiene componendo prima la simmetria di asse g, poi quella di asse f $\Rightarrow$ | |
| p) nella trasformazione $\rho_{A,+90^\circ} \circ \tau_{\vec{v}}$ $\Rightarrow$ | q) nella trasformazione $\tau_{\vec{v}} \circ \rho_{A,+90^\circ}$ $\Rightarrow$ |

2) Sempre con riferimento alla figura di prima, disegna la **CONTROIMMAGINE** A*B*C* di ABC:

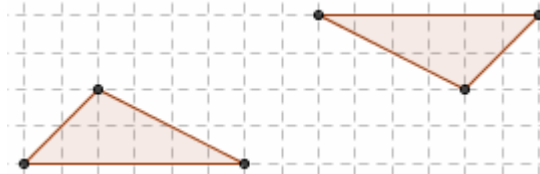
- | | |
|---|--|
| a) nella simmetria di centro D $\Rightarrow$ | b) nella simmetria di asse f $\Rightarrow$ |
| c) nella traslazione di vettore $\vec{v}$ $\Rightarrow$ | d) nell'omotetia di centro D e rapporto $-1/3$ $\Rightarrow$ |

3) Di quali sono i **punti uniti**, le **rette di punti uniti**, le **rette unite** di una

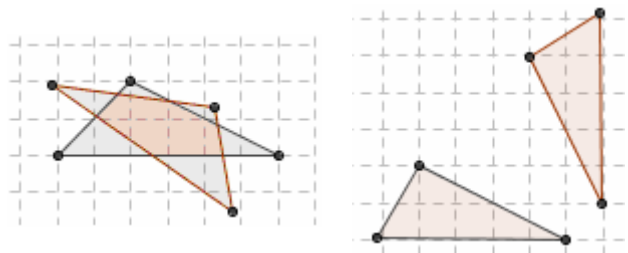
- | | | | | |
|-----------------------|----------------------|----------------|--------------|---------------------------|
| a) simmetria centrale | b) simmetria assiale | c) traslazione | d) rotazione | e) omotetia $\Rightarrow$ |
|-----------------------|----------------------|----------------|--------------|---------------------------|

- 4) Di **qual è la trasformazione inversa** di una
 a) simmetria centrale b) simmetria assiale c) traslazione d) rotazione e) omotetia ➡
- 5) Di **che trasformazione si ottiene componendo** due:
 a) simmetrie centrali b) simmetrie assiali c) traslazioni
 d) rotazioni con lo stesso centro e) omotetie con lo stesso centro ➡
- 6) Fra le seguenti trasformazioni, **riconosci quelle isometriche**:
 a) simmetria centrale b) simmetria assiale c) traslazione d) rotazione e) omotetia ➡

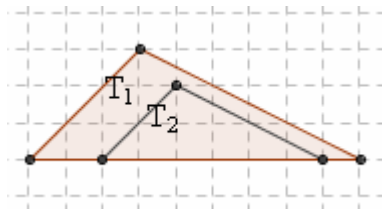
- 7) I due triangoli della figura qui a fianco sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto ad un certo punto. Dove si trova il punto? ➡



- 8a, 8b) Ecco due coppie di triangoli simmetrici l'uno dell'altro rispetto ad una certa retta. Per ciascuna coppia, disegna la retta. ➡



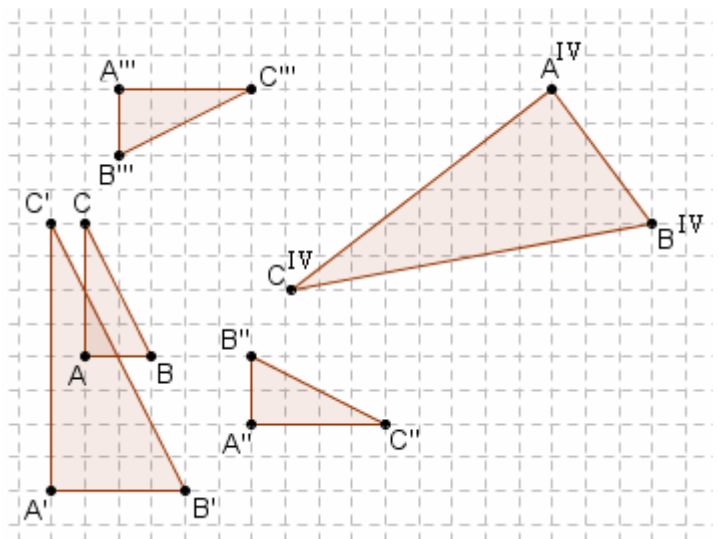
- 9) Con riferimento alla figura qui a fianco, che rappresenta due triangoli “omotetici”, stabilisci il centro e il rapporto:
 a) dell'omotetia che muta T_1 in T_2
 b) dell'omotetia che muta T_2 in T_1 ➡



- 10) Nella seguente figura, della quale riporterai sul tuo quaderno solo ciò che ti interessa, stabilisci quale affinità (eventualmente composta) fa passare da ABC ad

- a) $A'B'C'$ b) $A''B''C''$
 c) $A'''B'''C'''$ d) $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$

(è possibile rispondere in più modi, anche diversi da quelli che puoi vedere indicati cliccando sulla freccia ➡)

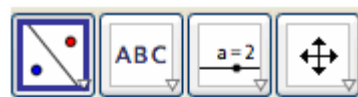


- 11) Fra le 4 **affinità** del precedente esercizio 10), stabilisci quali sono “dirette” e quali “inverse” ➡

- 12) Tramite il freeware **GEOGEBRA**, realizza qualche affinità a tua scelta, utilizzando in modo opportuno i comandi ottenibili cliccando sul triangolino in basso a destra del tasto



(che sono poi quelli riportati qui a fianco)



- Simmetria assiale
 Simmetria centrale
 Inversione circolare
 Rotazione
 Traslazione
 Omotetia

14. APPROFONDIMENTO: TRASFORMAZIONI UN PO' PIU' GENERALI

Il nostro discorso sulle trasformazioni piane si è ben presto focalizzato su trasformazioni molto “regolari”, e precisamente quelle che “conservano l’allineamento e l’ordine dei punti allineati”: le cosiddette AFFINITA'. Tuttavia, abbiamo subito evidenziato che esistono pure trasformazioni geometriche non dotate di questa regolarità.

INVERSIONE PER RAGGI VETTORI RECIPROCI

Un bell'esempio è rappresentato dalla “**inversione per raggi vettori reciproci**”.

Fissata su di un piano una circonferenza di centro O e raggio r , ad ogni punto P del piano (distinto da O)

si fa corrispondere quel punto P' , che appartiene alla semiretta OP ed è tale che $OP \cdot OP' = \frac{r^2}{OP}$.

La figura qui a fianco mostra:

- ❑ un segmento AB e la sua immagine (che risulta essere un arco di circonferenza)
- ❑ un altro segmento CD e la sua immagine (ancora un arco di circonferenza).

Si obietterà tuttavia:

ma non si tratta di una VERA trasformazione piana!
Infatti, il punto O è privo di immagine.

L'osservazione è giusta.

Se un punto P è vicinissimo a O ,
la sua immagine P' sarà esterna alla circonferenza
e lontanissima da O ; in pratica, l'immagine di O
dovrebbe essere un ... “punto all'infinito”.

Siamo allora di fronte ad una ESTENSIONE del concetto di “trasformazione piana”:

la corrispondenza del piano in sé, che stiamo considerando, non è perfettamente biunivoca.

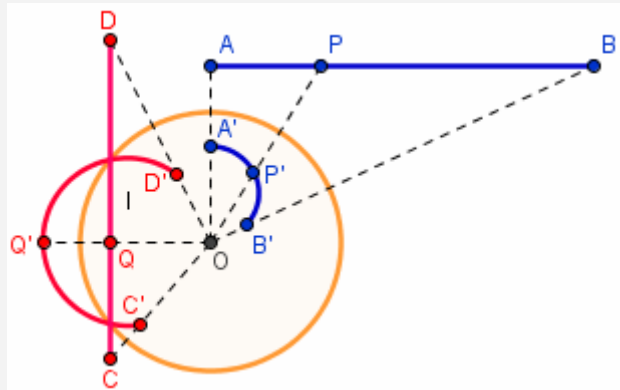
Essa diventa tuttavia biunivoca se togliamo dal piano il punto O ;

oppure, se decidiamo di far corrispondere al punto O ... il punto O stesso

(ma in questo caso, introdurremmo una “forzatura”:

se i punti vicini a O vengono trasformati in punti lontani da O ,

non è molto coerente convenire che l'immagine di O sia O stesso).



TRASFORMAZIONI PROIETTIVE

Bellissime trasformazioni sono le
“trasformazioni proiettive” (o “proiettività”).

Siano fissati nello spazio due piani α e β ,
incidenti o paralleli.

Fissiamo inoltre un punto O

che non stia né sull'uno, né sull'altro piano.

Tracciamo una retta per O :

questa intersecherà il piano α in un punto P

(se non è parallela ad α),

e il piano β in P'

(se non è parallela a β).

Diremo che P' è il corrispondente di P

nella trasformazione che chiameremo

“proiezione di centro O ”.

Anche in questo caso,

occorre essere un po' “elastici”.

Se i due piani α , β sono paralleli,

tutto regolare perché ad ogni punto del primo

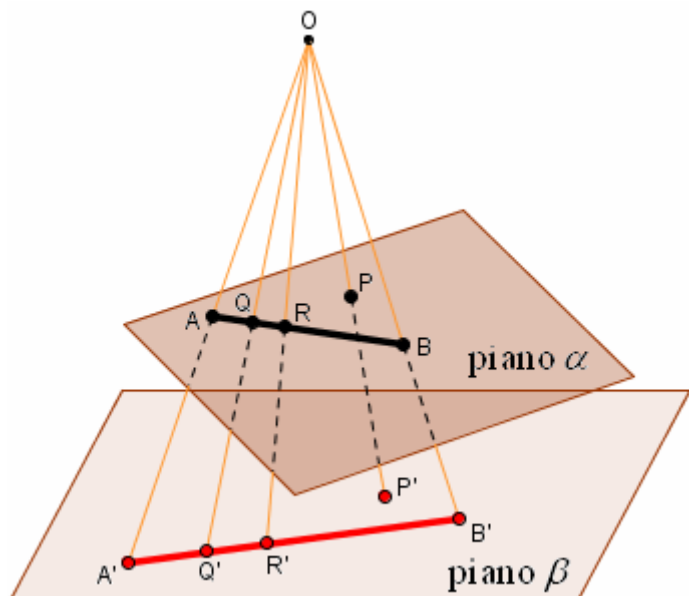
resta effettivamente associato

uno e un solo punto del secondo.

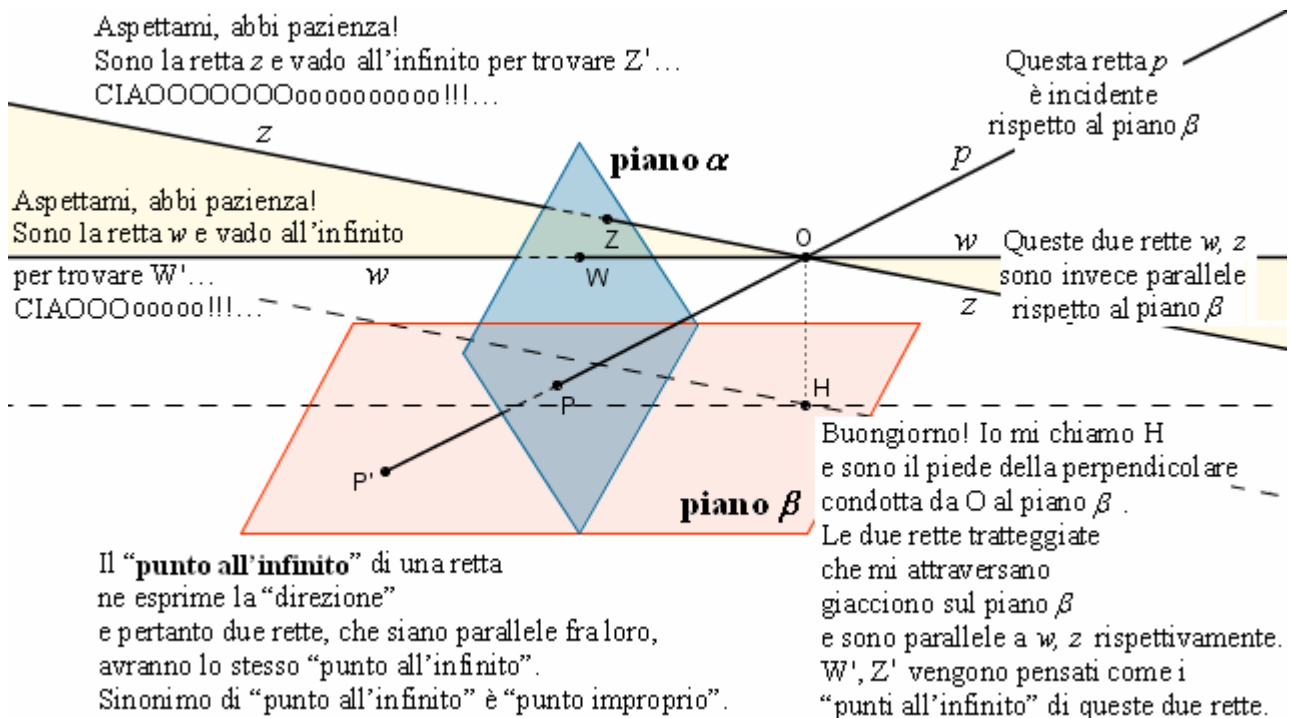
Se invece i due piani NON sono paralleli, una retta passante per O , e parallela a β ,

intersecherà α in un punto W , ma NON andrà poi ad intersecare β .

Dunque W si troverebbe a non avere immagine.



Tuttavia, come la figura sottostante dovrebbe ben illustrare, in questo caso possiamo pensare che a W corrisponda uno dei “punti all’infinito” di β . Vale a dire, per “trovare un’immagine” anche a W , noi andiamo a “completare” il piano β con un “punto all’infinito”. Anzi, lo completeremo con **infiniti** “punti all’infinito”, ciascuno associato ad una determinata “direzione” su β .



- E' evidente che anche il piano α andrà pensato “completato coi suoi punti all’infinito” (ciascuno associato a una “direzione” su α).
E certo! In tal modo, infatti, si troverà un controimmagine anche a quei punti di β , che altrimenti non l'avrebbero, in quanto appartenenti ad una retta per O , parallela ad α .
- Anziché a proiezioni “centrali” potremmo pensare anche a **proiezioni “parallele”**: si sceglie una direzione nello spazio e ad ogni punto P di α , si fa corrispondere quel punto P' di β , tale che la retta PP' abbia QUELLA direzione.

TRASFORMAZIONI TOPOLOGICHE

Fra le trasformazioni piane diamo infine un cenno alla famiglia delle cosiddette trasformazioni *topologiche*.

Prendiamo un foglio realizzato in gomma e disegniamoci sopra una circonferenza.

Se ora tiriamo il foglio in modo da deformarlo, la circonferenza si trasformerà in una curva chiusa la cui forma dipenderà dal modo particolare con cui avremo deformato il foglio.

Possiamo dire, in termini intuitivi, che una trasformazione si dice “topologica”

se la figura immagine può essere pensata come ottenibile dalla figura iniziale mediante una deformazione continua, a base di piegamenti stiramenti o compressioni, senza però che intervengano strappi o tagli.

Le figure che vengono sottoposte a trasformazioni di questo tipo, ne vengono profondamente “sconvolte”, tuttavia qualche proprietà si conserva anche qui, nel passaggio da una figura alla sua immagine:

ad esempio, il numero degli eventuali buchi, su di una superficie, rimane invariato in ogni trasformazione topologica della superficie stessa.

E' evidente che, se pensiamo a “piegamenti” oltre che a “stiramenti”, di una superficie, non potremo pretendere di rimanere su di un piano, ma opereremo “in tre dimensioni”.

D'altra parte, anche nel considerare le proiettività, abbiamo fatto ricorso a DUE piani distinti, collocati nello SPAZIO TRIDIMENSIONALE.

Insomma, il discorso ci ha condotto, a partire dallo studio delle trasformazioni piane, a uscire dall' “appiattimento” su di un piano, per concepire situazioni più generali ... ma senza dubbio, perlomeno curiose.

Se avrai occasione di approfondire il discorso sulle trasformazioni proiettive e topologiche, scoprirai un mondo affascinante, in qualche modo “sopraelevato” rispetto alla “normale” geometria, la quale, da questo punto di osservazione privilegiato, svelerà nuovi insospettati segreti.

Un'indicazione bibliografica: “Che cos'è la matematica?” di R. Courant e H. Robbins, edizioni Boringhieri 1971.

15. TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE (soprattutto: affinità) NEL PIANO CARTESIANO

Nel piano cartesiano, una trasformazione può essere descritta dalle due equazioni che fanno passare dalle coordinate del “punto iniziale” (x, y) a quelle del “punto finale” (x', y')

$$t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$$

Si può dimostrare che le AFFINITA'

(= le trasformazioni che mutano rette in rette, conservando l'ordine dei punti allineati) sono tutte e sole quelle trasformazioni le cui equazioni sono “LINEARI” (= “di 1° grado”), ossia della forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases},$$

PURCHÉ PERÒ si abbia

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 :$$

infatti se tale determinante si annulla, la corrispondenza non è biunivoca (vedi NOTA).

FRA LE AFFINITA', SONO poi ISOMETRIE quelle per le quali il determinante D è tale che siano verificate ENTRAMBE LE CONDIZIONI SEGUENTI:

- 1) $D = +1$ oppure $D = -1$
- 2) gli elementi di una diagonale sono uguali e quelli dell'altra opposti.

Le trasformazioni il cui determinante soddisfa alla condizione 2), ma non necessariamente alla 1), sono invece le **SIMILITUDINI** (= composizioni di un'ISOMETRIA con un'OMOTETIA, o viceversa).

NOTA In effetti, fissata a piacere una coppia (x', y') , la risoluzione rispetto a x, y del sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}, \text{ che poi equivale a } \begin{cases} ax + by = x' - m \\ cx + dy = y' - n \end{cases}$$

permette di risalire alla coppia incognita (x, y) cui la (x', y') corrisponde. Ma se il determinante dei coefficienti delle incognite $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ è nullo, tale sistema risulta impossibile o indeterminato: quindi il punto (x', y') non ha, in tal caso, nessuna controimmagine, oppure ne ha infinite.

Per la quantità $D = ad - bc$ (“costante di affinità” o “rapporto di affinità”) si può dimostrare che

- 1) il suo valore assoluto esprime il rapporto S'/S fra le aree di due figure corrispondenti qualsiasi F' ed F :

$$|ad - bc| = \frac{S'}{S}$$

- 2) il suo segno indica:

- ♫ se è positivo, che la trasformazione muta un poligono in un altro poligono, i cui vertici si susseguono nello stesso ordine (orario o antiorario) che avevano nel poligono iniziale (si parlerà di affinità “**DIRETTA**”);
- ♫ se è negativo, che la trasformazione muta un poligono in un altro poligono, i cui vertici si susseguono in ordine inverso rispetto ai vertici del poligono iniziale (si parlerà di affinità “**INVERSA**”).

In sintesi: $ad - bc > 0 \rightarrow$ affinità **DIRETTA**
 $ad - bc < 0 \rightarrow$ affinità **INVERSA** (NOTA)

NOTA Gli aggettivi “diretta” e “inversa” qui usati vanno d'accordo, come è intuitivo e si potrebbe dimostrare, col significato che era stato loro attribuito nel paragrafo 7, quando, parlando di isometrie, avevamo convenuto di classificare una isometria come “diretta” nel caso fosse associabile ad un movimento rigido che non comportasse ribaltamenti ma solo strisciamenti, “inversa” nel caso contrario. **OCCHIO INVECE** a non confondere la locuzione “affinità inversa” con “affinità inversa di un'altra affinità”.

Esempio

Consideriamo la trasformazione t descritta dalle equazioni $t: \begin{cases} x' = 2x - y + 5 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$

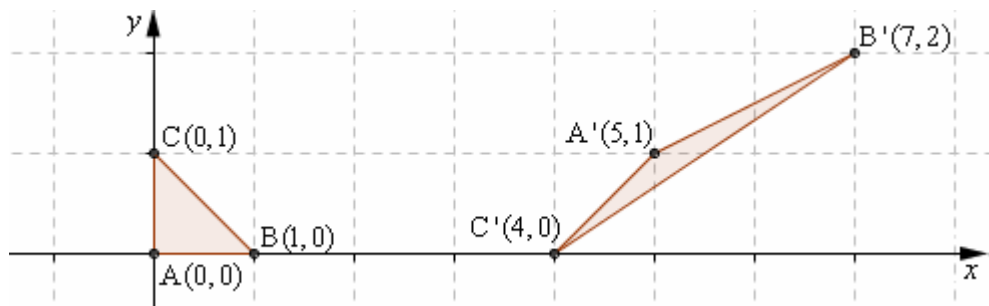
Innanzitutto, questa trasformazione è un'affinità, perché le sue equazioni sono di 1° grado con

$$\overline{ad - bc} = 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 = -2 + 1 = -1 \neq 0.$$

Non è però una isometria (non si realizza la seconda delle due condizioni caratterizzanti).

“Esploriamo” ora il comportamento di questa affinità

andando a vedere, ad esempio, come opera sul triangolo ABC di vertici A(0,0); B(1,0); C(0,1):



Abbiamo disegnato il triangolo ABC e il suo trasformato A'B'C'. Dalla figura si può notare che

un'affinità, in genere, non conserva né le distanze (ad esempio, B'C' non è uguale a BC),
né i rapporti fra i segmenti (ad es., il rapporto AC/AB non è uguale ad A'C'/A'B')
e neppure gli angoli: quindi, in generale, un'affinità muta sia le forme che le dimensioni delle figure.

Però in un'affinità è costante il rapporto S'/S fra le aree di due superfici corrispondenti, e tale rapporto costante è uguale al valore assoluto di quel determinante $ad - bc$ che viene chiamato “costante di affinità” o anche “rapporto di affinità”.

Nel nostro caso $ad - bc = -1$, quindi $|ad - bc| = 1$ e ciò significa che in questa particolare affinità che abbiamo scelto come esempio, si ha sempre $S'/S = 1$ (vale a dire, si conservano le aree).

In effetti si può facilmente verificare che l'area del triangolo A'B'C' è uguale all'area del triangolo ABC.

Abbiamo anche scritto che, se $ad - bc > 0$, si parla di affinità “diretta”, se $ad - bc < 0$ di affinità “inversa” (un'affinità diretta conserva il “verso” delle figure,

mentre un'affinità inversa effettua una specie di “ribaltamento”, invertendo il verso delle figure).

Nel nostro caso, $ad - bc = -1$ quindi **l'affinità da noi considerata è “inversa”.**

In effetti, nel percorrere il perimetro di ABC troviamo, procedendo in senso **antiorario**, prima A, poi B, poi C, mentre se vogliamo percorrere il perimetro del **triangolo immagine A'B'C'** in modo da incontrare prima A', poi B', poi C', dovremo procedere in senso **orario**.

3 COPPIE DI PUNTI CORRISPONDENTI INDIVIDUANO UNIVOCAMENTE UN’AFFINITÀ’

Poiché l'equazione di una generica affinità è $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ e quindi contiene 6 parametri,

un'affinità è univocamente determinata quando, per 3 punti non allineati del piano, siano assegnati i rispettivi 3 punti corrispondenti, anch'essi non allineati.

Infatti tale conoscenza porta complessivamente a poter scrivere 6 condizioni!

Ad esempio, sapere che un'affinità t si comporta nel modo seguente:

$$(0,0) \xrightarrow{t} (5,1); \quad (1,0) \xrightarrow{t} (7,2); \quad (0,1) \xrightarrow{t} (4,0)$$

permette di scrivere, sostituendo nel sistema $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$:

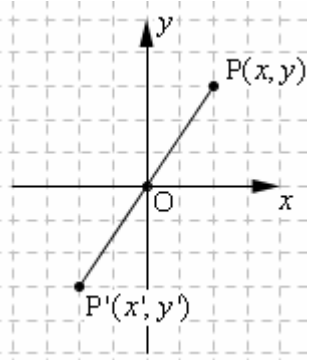
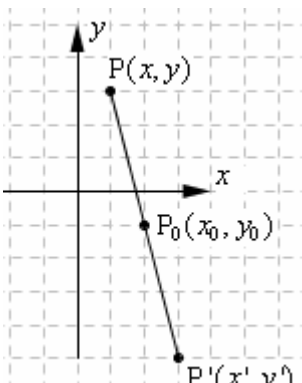
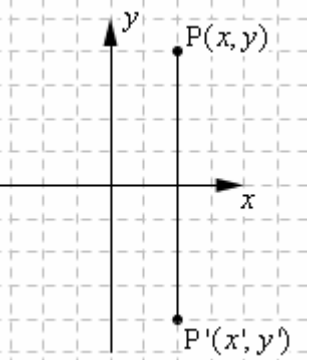
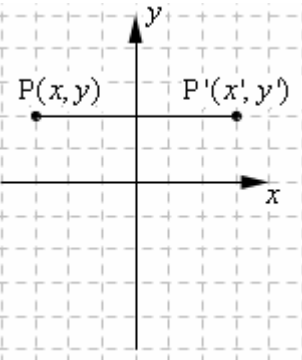
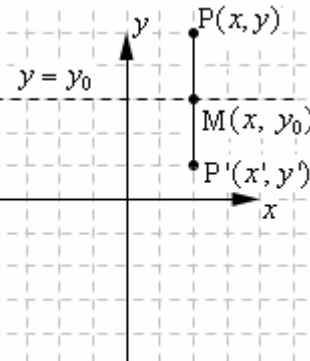
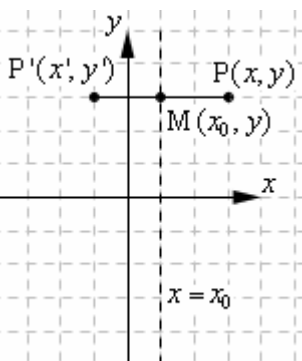
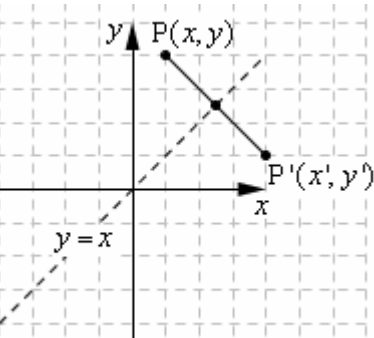
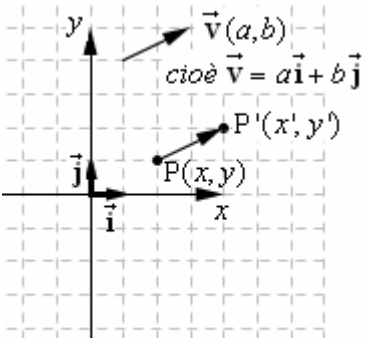
$$\begin{array}{lll} 5 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + m & 7 = a \cdot 1 + b \cdot 0 + m & 4 = a \cdot 0 + b \cdot 1 + m \\ 1 = c \cdot 0 + d \cdot 0 + n & 2 = c \cdot 1 + d \cdot 0 + n & 0 = c \cdot 0 + d \cdot 1 + n \end{array}$$

Tali 6 condizioni, poste a sistema, consentiranno di determinare i valori dei 6 parametri a, b, c, d, m, n .

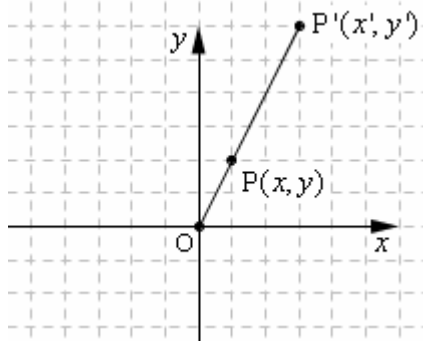
Se ci provi, troverai

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad d = -1, \quad m = 5, \quad n = 1.$$

16. AFFINITA' PARTICOLARI (TRASLAZIONI, SIMMETRIE, OMOTETIE) DESCRITTE IN COORDINATE, NEL PIANO CARTESIANO

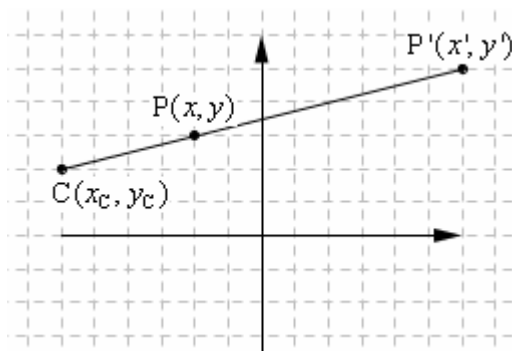
SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE  $S_0 : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$	SIMMETRIA RISPETTO AD UN PUNTO  P_0 è il punto medio del segmento PP', perciò (ascissa punto medio = media ascisse estremi, idem per l'ordinata) $x_0 = \frac{x + x'}{2} \rightarrow x' = 2x_0 - x$ $y_0 = \frac{y + y'}{2} \rightarrow y' = 2y_0 - y$ $S_{P_0} : \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$
SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE x  $S_{asse\ x} : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE y  $S_{asse\ y} : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$
SIMMETRIA RISPETTO A UNA PARALLELA ALL'ASSE x  M è il punto medio di PP', perciò $y_0 = \frac{y + y'}{2}$ $\downarrow$ $y' = 2y_0 - y$ $S_{y=y_0} : \begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$	SIMMETRIA RISPETTO A UNA PARALLELA ALL'ASSE y  M è il punto medio di PP', perciò $x_0 = \frac{x + x'}{2}$ $\downarrow$ $x' = 2x_0 - x$ $S_{x=x_0} : \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases}$
SIMMETRIA RISPETTO ALLA BISETTRICE DEL 1° E 3° QUADRANTE  $S_{y=x} : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	TRASLAZIONE DI VETTORE $\vec{v}(a, b)$ ossia di componente orizzontale a e verticale b  $\vec{v}(a, b)$ cioè $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ $\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ $\vec{i}, \vec{j}$ sono i cosiddetti "versori" degli assi (di modulo unitario). Nell'esempio a fianco, è $a=2, b=1$

OMOTETIA DI CENTRO L'ORIGINE E RAPPORTO $k \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (nella figura è $k = 3$)



$$\omega_{O,k} : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

OMOTETIA DI CENTRO $C(x_C, y_C)$ E RAPPORTO $k \in \mathbb{R}^*$ (nella figura è $k = 3$)



$$CP' = k \cdot CP \text{ (segmenti orientati)}$$

↓

$$x_{P'} - x_C = k(x_P - x_C)$$

$$y_{P'} - y_C = k(y_P - y_C)$$

$$\omega_{C,k} : \begin{cases} x' - x_C = k(x - x_C) \\ y' - y_C = k(y - y_C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_C \\ y' = ky + (1-k)y_C \end{cases} \text{ da cui, ponendo } \begin{cases} (1-k)x_C = a \\ (1-k)y_C = b \end{cases}$$

$$\omega_{C,k} : \begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases} \text{ (NOTA)}$$

NOTA Se le equazioni di un'omotetia sono assegnate sotto la forma $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$

allora sarà possibile risalire al centro di omotetia in due modi alternativi:

1) ricordando le posizioni

$$a = (1-k)x_C$$

$$b = (1-k)y_C$$

da cui:

$$x_C = \frac{a}{1-k}$$

$$y_C = \frac{b}{1-k}$$

2) oppure semplicemente determinando il punto unito della trasformazione.

Esempio:

per trovare il centro C dell'omotetia $\begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y + 5 \end{cases}$

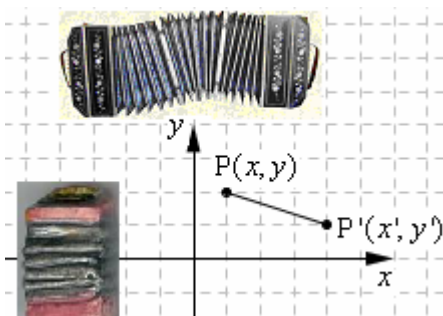
mi basta trovare il punto (x, y)

la cui immagine (x', y') coincide con (x, y) !

$$\begin{cases} x = 3x - 4 \\ y = 3y + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5/2 \end{cases} \quad C\left(2, -\frac{5}{2}\right)$$

DILATAZIONE DI CENTRO L'ORIGINE E RAPPORTI h (orizzontale), k (verticale)

$h, k \in \mathbb{R}^*$; nella figura è $h = 4, k = 1/2$



$$d_{O,h,k} : \begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$$

Nella figura, la fisarmonica orizzontale si apre ($h=4$), quella verticale si chiude ($k=1/2$)

Generalizzazione: se il centro non fosse l'origine ma un dato punto

$$C(x_C, y_C),$$

le equazioni diventerebbero

$$d_{C,h,k} : \begin{cases} x' - x_C = h(x - x_C) \\ y' - y_C = k(y - y_C) \end{cases}$$

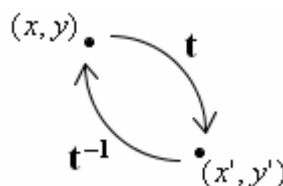
17. COME SCRIVERE LE EQUAZIONI DELLA TRASFORMAZIONE INVERSA DI UNA TRASFORMAZIONE DATA

Consideriamo una trasformazione t di equazioni

$$t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$$

Per “**trasformazione inversa**” della t si intende, come sappiamo, quella **trasformazione** (si indica con t^{-1})

che fa “tornare indietro”, dal punto (x', y') al punto (x, y) .



Abbiamo già osservato che:

- l'inversa di una traslazione è la traslazione di vettore opposto;
- l'inversa di un'omotetia di centro C e rapporto k è l'omotetia di centro C e rapporto $1/k$;
- l'inversa di una simmetria (centrale o assiale) è la simmetria stessa; ecc.

Ma **come si fa, data una trasformazione, a scrivere le equazioni della trasformazione inversa?** Vediamo.

Si prendono le equazioni della trasformazione data ...

IN GENERALE:

$$t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$t: \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$$

... e si risolve il sistema rispetto a x ed y , isolando cioè x, y :

$$t^{-1}: \begin{cases} x = C(x', y') \\ y = D(x', y') \end{cases} \quad (1)$$

$$t^{-1}: \begin{cases} x = \frac{x' + 2}{3} \\ y = \frac{y' + 4}{3} \end{cases} \quad (1)$$

NOTA: in questo caso
il procedimento di inversione
è stato semplicissimo;
nella pagina a fianco
troverai esercizi più complicati

Fatto! Ecco che abbiamo ricavato le equazioni della trasformazione inversa.

In questo momento nelle equazioni della trasformazione inversa, così come le abbiamo ottenute, il punto INIZIALE è indicato con (x', y') e il punto FINALE con (x, y) : $(x', y') \xrightarrow{t^{-1}} (x, y)$.

MA NOI, SE VOGLIAMO, POSSIAMO SCAMBIARE I SIMBOLI, indicando, in queste equazioni della trasformazione inversa, il punto INIZIALE con (x, y) e quello FINALE con (x', y') :

$$(x, y) \xrightarrow{t^{-1}} (x', y'),$$

il che corrisponde a pensare la t^{-1} come una trasformazione a sé stante, liberandoci dal doverla per forza immaginare come l'inversa di un'altra.

Se facciamo così, otteniamo:

$$t^{-1}: \begin{cases} x' = C(x, y) \\ y' = D(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

$$t^{-1}: \begin{cases} x' = \frac{x + 2}{3} \\ y' = \frac{y + 4}{3} \end{cases} \quad (2)$$

... ed è importante capire che le equazioni (1) e le equazioni (2) sono ... LA STESSA COSA, nel senso che sia le (1) che le (2) individuano la medesima trasformazione, la nostra brava t^{-1} ...

... la differenza sta solo nei simboli con cui si indicano le coordinate del punto iniziale e di quello finale.

RICAPITOLAZIONE

Sia t la trasformazione di equazioni $t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$

Se vogliamo scrivere le EQUAZIONI DELLA TRASFORMAZIONE INVERSA t^{-1}

1) invertiamo le equazioni di t isolando, in esse, x e y e ottenendo $t^{-1}: \begin{cases} x = C(x', y') \\ y = D(x', y') \end{cases}$

2) scambiamo (x, y) con (x', y') (almeno nei casi in cui vogliamo pensare la t^{-1} come una trasf. a sé stante)

così da scrivere la t^{-1} nella forma, equivalente alla precedente ma più consueta, $t^{-1}: \begin{cases} x' = C(x, y) \\ y' = D(x, y) \end{cases}$

ALTRI ESEMPI

□ Invertire la trasformazione $t: \begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2y - 4 \end{cases}$

Interpreto le equazioni come finalizzate a ricavare la coppia (x, y) nota la coppia (x', y') ; scambio perciò i membri e innanzitutto faccio in modo che a primo membro ci siano soltanto x e y :

$$\begin{cases} x - y = x' \\ 2y - 4 = y' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = x' \\ 2y = y' + 4 \end{cases}$$

dopodiché ricavo x e y :

$$\begin{cases} y = \frac{y' + 4}{2} \\ x = x' + y = x' + \frac{y' + 4}{2} = \frac{2x' + y' + 4}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2x' + y' + 4}{2} \\ y = \frac{y' + 4}{2} \end{cases}$$

Ora posso scambiare la coppia (x, y) con la (x', y') e, se voglio, spezzare le frazioni:

$$t^{-1} \begin{cases} x' = \frac{2x + y + 4}{2} \\ y' = \frac{y + 4}{2} \end{cases} \text{ oppure } t^{-1} \begin{cases} x' = x + \frac{1}{2}y + 2 \\ y' = \frac{1}{2}y + 2 \end{cases}$$

□ Invertire la trasformazione $t: \begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x - 2y \end{cases}$

Porto x e y , che sono le mie incognite, a primo membro: $\begin{cases} 2x + y = x' - 1 \\ x - 2y = y' \end{cases}$

dopodiché ricavo x e y :

$$\begin{cases} x = y' + 2y \\ 2(y' + 2y) + y = x' - 1; \quad 2y' + 4y + y = x' - 1; \quad 5y = x' - 2y' - 1; \quad y = \frac{x' - 2y' - 1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x' - 2y' - 1}{5} \\ x = y' + 2y = y' + 2 \cdot \frac{x' - 2y' - 1}{5} = y' + \frac{2x' - 4y' - 2}{5} = \frac{5y' + 2x' - 4y' - 2}{5} = \frac{2x' + y' - 2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2x' + y' - 2}{5} \\ y = \frac{x' - 2y' - 1}{5} \end{cases}$$

Ora posso scambiare la coppia (x, y) con la (x', y') e, se voglio, spezzare le frazioni:

$$t^{-1} \begin{cases} x' = \frac{2x + y - 2}{5} \\ y' = \frac{x - 2y - 1}{5} \end{cases} \text{ oppure } t^{-1} \begin{cases} x' = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{2}{5} \\ y' = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$$

□ Invertire la trasformazione $t: \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - 3y \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = x' & (1) - (2) \\ x - 3y = y' & (1) \end{cases} \begin{cases} 4y = x' - y'; \quad y = \frac{x' - y'}{4} \\ x = x' - y = x' - \frac{x' - y'}{4} = \frac{4x' - x' + y'}{4} = \frac{3x' + y'}{4} \end{cases} \rightarrow t^{-1} \begin{cases} x' = \frac{3x + y}{4} \\ y' = \frac{x - y}{4} \end{cases}$$

**18. EQUAZIONE DELL'IMMAGINE DI UNA CURVA ASSEGNATA, ovvero:
data una trasformazione, tramite le sue equazioni, e data una curva, tramite la sua equazione,
scrivere l'equazione della curva immagine.**

Consideriamo la trasformazione t di equazioni $t: \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$

e prendiamo la curva γ di equazione $\gamma: y = 2x + 1$

Vogliamo determinare l'equazione della curva immagine $\gamma' = t(\gamma)$.

Ragioniamo in questo modo: la curva immagine $\gamma' = t(\gamma)$ è l'insieme dei punti del piano cartesiano, le cui CONTROIMMAGINI appartengono alla curva γ .

Prendiamo perciò un generico punto del piano cartesiano.

Indichiamone le coordinate con (x', y') , perché noi vogliamo pensare quel punto come l'IMMAGINE di un altro punto (x, y) al quale ci proponiamo di risalire.

Che coordinate avrà la CONTROIMMAGINE del nostro punto (x', y') ?

Per rispondere dovremo INVERTIRE le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{x' + 2}{3} \\ y = \frac{y' + 4}{3} \end{cases}$$

e con ciò possiamo dire che la controimmagine di un generico punto (x', y') del piano cartesiano

è il punto le cui coordinate sono $\left(\frac{x' + 2}{3}, \frac{y' + 4}{3}\right)$

Adesso possiamo impostare la seguente catena di doppie implicazioni:

$$(x', y') \in \gamma' \leftrightarrow \left(\frac{x' + 2}{3}, \frac{y' + 4}{3}\right) \in \gamma \leftrightarrow \frac{y' + 4}{3} = 2 \cdot \frac{x' + 2}{3} + 1 \leftrightarrow y' = 2x' + 3$$

Pertanto un generico punto (x', y') del piano cartesiano appartiene alla curva γ'

se e solo se le sue coordinate verificano l'uguaglianza $y' = 2x' + 3$.

Ma ciò significa che quest'ultima equazione, la $y' = 2x' + 3$,

E' GIA' L'EQUAZIONE di γ' cercata,

proprio perché è un'uguaglianza che è verificata se e solo se (x', y') è un punto di γ' !

I simboli x' , y' sono qui usati per indicare le coordinate del generico punto del piano cartesiano.

Dunque, volendo, essi possono essere tranquillamente sostituiti con i più consueti simboli x , y .

Concludendo, l'equazione di γ' è: $y = 2x + 3$.

RICAPITOLAZIONE E GENERALIZZAZIONE

Sia t la trasformazione di equazione $t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$

e sia γ una curva di equazione $y = f(x)$ oppure $F(x, y) = 0$.

Se vogliamo scrivere l' EQUAZIONE DELLA CURVA IMMAGINE γ' , i passi sono i seguenti:

- 1) **INVERTIAMO** le equazioni $\begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$ in modo da ottenere $\begin{cases} x = C(x', y') \\ y = D(x', y') \end{cases}$
- 2) **SOSTITUIAMO** nell'equazione della curva data
- 3) **SOPPRIMIAMO GLI APICI.**

OSSERVAZIONE

Se abbiamo a disposizione le equazioni della TRASFORMAZIONE INVERSA,

già nella forma "a simboli scambiati" $t^{-1}: \begin{cases} x' = C(x, y) \\ y' = D(x, y) \end{cases}$,

il procedimento equivale semplicemente a

SOSTITUIRE I SECONDI MEMBRI DI QUESTE EQUAZIONI nell'equazione della curva assegnata.

19. EQUAZIONE DELLA CONTROIMMAGINE DI UNA CURVA DATA

Data una trasformazione t di equazioni $t: \begin{cases} x' = A(x, y) \\ y' = B(x, y) \end{cases}$

e data una curva γ di equazione $y = f(x)$ oppure $F(x, y) = 0$,

SE SI SOSTITUISCONO NELL'EQUAZIONE DELLA CURVA γ , AL POSTO DI x E y , I DUE SECONDI MEMBRI $A(x, y)$ E $B(x, y)$,

SI OTTIENE L'EQUAZIONE ...

NON DELL'IMMAGINE, BENSÌ DELLA CONTROIMMAGINE DELLA CURVA CONSIDERATA.

Ad esempio, con $t: \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$ e $\gamma: y = 2x + 1$,

facendo la sostituzione $y = 2x + 1 \rightarrow 3y - 4 = 2(3x - 2) + 1$

si perviene a $y = 2x + \frac{1}{3}$ che è la *controimmagine* della γ

(puoi controllarlo agevolmente con un disegno se osservi che la trasformazione t del nostro esempio è l'omotetia di rapporto 3 e centro (1,2))

GIUSTIFICAZIONE

Un generico punto (x, y) del piano cartesiano appartiene alla curva controimmagine di γ se e solo se l'immagine di (x, y) , ossia il punto di coordinate $x' = 3x - 2$, $y' = 3y - 4$, appartiene a γ .

Ma ciò avviene se e solo se ,

sostituendo le espressioni $3x - 2$, $3y - 4$ al posto di x e di y rispettivamente, nell'equazione di γ , si ottiene un'uguaglianza vera.

Riassumendo tutto il ragionamento in una catena di doppie implicazioni:

$$(x, y) \in t^{-1}(\gamma) \leftrightarrow (3x - 2, 3y - 4) \in \gamma \leftrightarrow 3y - 4 = 2(3x - 2) + 1$$

ESERCIZI SU:

TRASFORMAZIONE INVERSA, CURVA IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

Ecco qui di seguito una piccola rassegna di affinità. Scegline una e rispondi ai quesiti sottostanti.

$$\begin{aligned} t_1: \begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y \end{cases} & \quad t_2: \begin{cases} x' = -x + 6 \\ y' = -y - 4 \end{cases} & \quad t_3: \begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = y \end{cases} & \quad t_4: \begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y - 4 \end{cases} \\ t_5: \begin{cases} x' = 3x \\ y' = -2y \end{cases} & \quad t_6: \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x - y - 1 \end{cases} & \quad t_7: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} & \quad t_8: \begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases} & \quad t_9: \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases} \end{aligned}$$

- 1) Quanto vale la “costante di affinità” $D = ad - bc$?
 - 2) L'affinità in esame è diretta o è inversa?
 - 3) E' una isometria?
 - 4) E' un “caso particolare” fra quelli del paragrafo 16 (traslazione, simmetria rispetto a un punto o a una parallela agli assi, omotetia ...)?
- 1) Determina, tramite passaggi algebrici, le equazioni dell'affinità inversa.
 - 2) L'affinità in esame è involutoria?
 - 3) Nel caso l'affinità considerata fosse “particolare”, abbi cura di controllare se è confermato che
 - l'inversa di una traslazione è la traslazione di vettore opposto;
 - l'inversa di un'omotetia di rapporto k è un'omotetia con lo stesso centro, e rapporto $1/k$;
 - l'inversa di una simmetria (centrale o assiale) è la simmetria stessa
- Determina l'immagine e poi la controimmagine:
 - della retta $r: y = 2x + 1$
 - della circonferenza $\gamma: x^2 + y^2 = 1$

SOLUZIONI + link agli SVOLGIMENTI COMPLETI: pagina seguente

SOLUZIONI

Per gli SVOLGIMENTI COMPLETI, puoi cliccare su questa freccia ➡

t_1	a1) D = +4 a2) Diretta a3) No a4) Sì, omotetia	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}$ b2) No b3) OK	c1) Immagine: $y = 2x - 8$ c1) Controimmagine: $y = 2x - \frac{7}{2}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$
t_2	a1) D = +1 a2) Diretta a3) Sì a4) Sì, simm. centr.	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = -x + 6 \\ y' = -y - 4 \end{cases}$ b2) Sì b3) OK	c1) Immagine: $y = 2x - 17$ c1) Controimmagine: $y = 2x - 17$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 51 = 0$ c2) Controimm.: $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 51 = 0$
t_3	a1) D = -1 a2) Inversa a3) Sì a4) Sì, simm. ass.	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = y \end{cases}$ b2) Sì b3) OK	c1) Immagine: $y = -2x + 9$ c1) Controimmagine: $y = -2x + 9$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$
t_4	a1) D = +1 a2) Diretta a3) Sì a4) Sì, traslazione	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = x - 6 \\ y' = y + 4 \end{cases}$ b2) No b3) OK	c1) Immagine: $y = 2x - 15$ c1) Controimmagine: $y = 2x + 17$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 51 = 0$ c2) Controimm.: $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 51 = 0$
t_5	a1) D = -6 a2) Inversa a3) No a4) Sì, dilatazione	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}$ b2) No b3) ➡	c1) Immagine: $y = -\frac{4}{3}x - 2$ c1) Controimmagine: $y = -3x - \frac{1}{2}$ c2) Immagine: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ c2) Controimmagine: $9x^2 + 4y^2 = 1$
t_6	a1) D = -3 a2) Inversa a3) No a4) No	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{x+y+1}{3} \\ y' = \frac{2x-y-1}{3} \end{cases}$ b2) No b3) Non rientra fra i casi part. visti	c1) Immagine: $y = -2$ c1) Controimmagine: $y = -\frac{2}{3}$ c2) Imm.: $5x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 4y - 7 = 0$ c2) Contr.: $5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 2y = 0$
t_7	a1) D = -1 a2) Inversa a3) Sì a4) Sì, simm. ass.	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ b2) Sì b3) OK	c1) Immagine: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ c1) Controimmagine: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 = 1$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 = 1$
t_8	a1) D = +2 a2) Diretta a3) No a4) No	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{x+y}{2} \\ y' = \frac{-x+y-2}{2} \end{cases}$ b2) No b3) Non rientra fra i casi part. visti	c1) Immagine: $y = -3x - 4$ c1) Controimmagine: $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ c2) Controimm.: $2x^2 + 2y^2 + 4y + 1 = 0$
t_9	a1) D = +1 a2) Diretta a3) Sì a4) No	b1) Inversa: $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$ b2) No b3) Non rientra fra i casi part. visti	c1) Immagine: $y = -2x - 1$ c1) Controimmagine: $y = \frac{2}{11}x + \frac{5}{11}$ c2) Immagine: $x^2 + y^2 = 1$ c2) Controimmagine: $x^2 + y^2 = 1$

20. EQUAZIONI DELLA TRASFORMAZIONE COMPOSTA (detta anche “trasformazione PRODOTTO”)

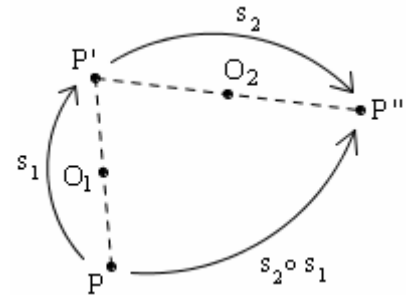
Sappiamo che “comporre” due trasformazioni significa “applicarle successivamente”.

Consideriamo ad esempio due punti fissi O_1 e O_2 , e

- ♫ applichiamo al generico punto P del piano innanzitutto la simmetria s_1 di centro O_1 , ottenendo un certo punto P' ;
- ♫ poi, a questo P' , applichiamo la simmetria s_2 di centro O_2 pervenendo ad un nuovo punto P'' .

Possiamo ora pensare alla trasformazione che muta *direttamente* P in P'' : questa sarà indicata con $s_2 \circ s_1$ (si scrive per prima la trasformazione che viene applicata per ultima!) e sarà chiamata

“trasformazione composta”, o anche “trasformazione prodotto”.



- Osserviamo che **la composizione di due trasformazioni non è, in generale, commutativa**: vai a riprendere l'esempio appena fatto, e verifica che $s_2 \circ s_1 \neq s_1 \circ s_2$.
- Ribadiamo ancora:
SI DEVE APPLICARE PER PRIMA LA TRASFORMAZIONE CHE È SCRITTA PER ULTIMA.
Se trovo scritto $f \circ g$ devo applicare prima g e poi f
(ciò vale sia con le trasformazioni che, più in generale, con tutte le funzioni).

Facciamo un esempio che mostri come si scrivono le equazioni della trasformazione composta, date le equazioni delle trasformazioni componenti:

$$t_1 : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y - 3 \end{cases} \quad t_2 : \begin{cases} x' = 2x \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Se è richiesto di ricavare le equazioni di $t_2 \circ t_1$, allora faccio così (devo applicare prima t_1 e poi t_2):

$$(x, y) \xrightarrow{t_1} (x', y') \xrightarrow{t_2} (x'', y'')$$

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = 2x' \\ y'' = y' + 1 \end{cases} = \begin{cases} x'' = 2(x + y) = 2x + 2y \\ y'' = y - 3 + 1 = y - 2 \end{cases}$$

e ho, in definitiva:

$$t_2 \circ t_1 : \begin{cases} x'' = 2x + 2y \\ y'' = y - 2 \end{cases}$$

I punti iniziale e finale sono qui indicati rispettivamente con (x, y) e (x'', y'') ; per ripristinare la notazione più consueta, potrei, volendo, trascrivere ribattezzando il punto finale con (x', y') :

$$t_2 \circ t_1 : \begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

ESERCIZI SULLA TRASFORMAZIONE COMPOSTA

1) Andando a riprendere le affinità $t_1 \dots t_9$ di cui all'esercizio precedente:

- a) scegli qualche coppia t_i, t_j e scrivi le equazioni della trasformazione composta $t_i \circ t_j$;
- b) componi qualche trasformazione con la sua inversa, per verificare che così facendo si ottiene l'identità, ossia la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

2) Le equazioni di due generiche traslazioni sono $\tau_1 : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ $\tau_2 : \begin{cases} x' = x + c \\ y' = y + d \end{cases}$

Fanne, con passaggi algebrici, la composizione e verifica che si ottiene ancora una traslazione.

21. LO STUDIO DI UN'AFFINITÀ

ESEMPIO. Studiare l'affinità t di equazioni $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$

“Studiare” un'affinità significa determinarne le caratteristiche essenziali e perciò:

- 1) **stabilire il valore del determinante $D = ad - bc$ che è detto “costante di affinità”,**
 - il cui *segno* ci dice se l'affinità in questione è (vedi paragrafo 15)
 - *diretta* ($D > 0$), cioè “*conserva il verso delle figure*”
 - o *inversa* ($D < 0$), cioè “*inverte il verso delle figure*”
 - il cui *valore assoluto* ci dà il rapporto S'/S fra l'area di una figura “trasformata” e l'area della figura di partenza
 - e la cui *osservazione* ci permette di riconoscere se eventualmente si tratti di una isometria o di una similitudine, o comunque di un caso particolare
- 2) **determinare gli eventuali “punti uniti”**
(così facendo, si troveranno anche le eventuali “rette di punti uniti”)
- 3) **determinare le eventuali “rette unite”.**

OSSERVAZIONE PRELIMINARE IMPORTANTE

Prima di tutto converrà però osservare bene le equazioni dell'affinità, perché se per caso si riconosce subito che si tratta di una “affinità notevole” (traslazione, simmetria centrale o assiale, omotetia...), allora è INUTILE fare tanti calcoli!

Ad esempio, in una omotetia è geometricamente ovvio che

- *l'unico punto unito è il centro di omotetia*
- *non si ha nessuna retta di punti uniti*
- *e si hanno invece infinite rette unite (tutte e sole quelle passanti per il centro di omotetia).*

Se non siamo in un caso particolare, invece, si opererà come illustrato qui di seguito.

1) CALCOLO DEL DETERMINANTE $D = ad - bc$ (costante di affinità o “rapporto” di affinità)

$$t: \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$$

Ho trascritto le equazioni incolonnando i termini in modo opportuno; questo per evitare possibili errori di distrazione nel calcolo della costante di affinità D .

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

- Essendo $D < 0$, l'affinità è **inversa** (cioè inverte il verso delle figure)
- Essendo $|D| = 2$, l'affinità **raddoppia le aree**
- La trasformazione **non è un'isometria**
(ricordiamo che si ha una isometria se e solo se D vale $+1$ o -1 , e inoltre ha gli elementi di una diagonale uguali fra loro e quelli dell'altra diagonale opposti fra loro) e neppure una *similitudine*.

2) DETERMINAZIONE DEI PUNTI UNITI

Un punto P si dice “unito” in una trasformazione t se è mutato in sé stesso dalla t ; in altre parole, se l'immagine di P attraverso la t è lo stesso P ; insomma, se $t(P) = P$.

Perciò $P(x, y)$ è unito se e solo se $(x', y') = (x, y)$.

Per la ricerca dei punti uniti basterà perciò sostituire, nelle equazioni della trasformazione, x e y al posto di x' e y' , per poi risolvere il sistema in x, y così ottenuto.

$$\begin{cases} x = y - x \\ y = 2y - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow U\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ è punto unito}$$

3) DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE

Nell'affinità da noi considerata $t: \begin{cases} x' = y - x \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$ non si hanno rette di punti uniti:

infatti abbiamo visto che c'è un solo punto unito, quello di coordinate $(1/2, 1)$.

Si potrebbero però avere *rette unite*

(riguardo alla differenza fra “retta unita” e “retta di punti uniti”,

pensa sempre al caso della simmetria assiale:

l'asse di simmetria è una retta “di punti uniti”, caso particolare di retta “unita”,

mentre sono rette “unite”, ma non “di punti uniti”, tutte quelle perpendicolari all'asse di simmetria).

Per la determinazione delle rette unite, ti presento due metodi:

- il primo è quello più “spontaneo”, ma comporta di solito calcoli piuttosto pesanti;
- l'altro è più ingegnoso e veloce.

□ 1° METODO PER LA DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE

a) Consideriamo la generica retta $r: y = mx + q$

b) scriviamo le equazioni della sua trasformata $r' = t(r)$

c) e chiediamoci infine sotto quali condizioni per i parametri m, q la retta r' coincide con r .

Osserviamo che in questo modo

VENGONO “TAGLIATE FUORI” LE RETTE PARALLELE ALL'ASSE y ,

la cui equazione non si può portare sotto la “forma esplicita” $y = mx + q$.

Vuol dire che ALLA FINE COMPLETEREMO IL PROCEDIMENTO

occupandoci anche di tali rette, che inizialmente escludiamo dalla nostra attenzione.

$$t: \begin{cases} x' = y - x \\ y' = 2y - 1 \end{cases} \quad t^{-1}: \begin{cases} y = \frac{y'+1}{2} \\ x = y - x' = \frac{y'+1}{2} - x' = \frac{y'+1-2x'}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{r: y = mx + q} \rightarrow r': \frac{y'+1}{2} = m \cdot \frac{y'+1-2x'}{2} + q \quad \text{e, sopprimendo gli apici e facendo i calcoli,}$$

$$\boxed{r':} \quad y + 1 = my + m - 2mx + 2q; \quad (1 - m)y = -2mx + m + 2q - 1; \quad \boxed{y = -\frac{2m}{1-m}x + \frac{m+2q-1}{1-m} \quad (m \neq 1)}$$

$$\boxed{r' \equiv r} \leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2m}{1-m} = m \\ \frac{m+2q-1}{1-m} = q \end{cases}$$

Riflettiamo sulla condizione posta, $m \neq 1$.

Essa significa che il procedimento di isolare y

è possibile solo nel caso $m \neq 1$;

occorre allora chiedersi cosa accadrebbe nel caso $m = 1$.

Risposta immediata:

la retta r' sarebbe parallela all'asse y , mentre r non lo è;

quindi, nel caso $m = 1$, r non sarebbe unita.

$$\begin{cases} -2m = m - m^2; & m^2 - 3m = 0; & m(m - 3) = 0; & m = 0 \vee m = 3 \\ \dots \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{m=0} \\ \frac{2q-1}{1} = q; \quad \boxed{q=1} \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} \boxed{m=3} \\ \frac{3+2q-1}{1-3} = q; \quad 2+2q = -2q; \quad \boxed{q = -\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Abbiamo così trovato le *rette unite*: $\boxed{r_1: y = 1}$ e $\boxed{r_2: y = 3x - \frac{1}{2}}$.

Come si diceva prima, a questo punto

il procedimento di ricerca delle rette unite non è ancora terminato.

Prendendo come “generica retta” $y = mx + q$,

abbiamo escluso dalla nostra considerazione le rette parallele all'asse y .

Ma anche una retta “verticale” (equazione: $x = k$) potrebbe eventualmente essere retta unita.

Dunque:

$$r: x = k \rightarrow r': \frac{y+1-2x}{2} = k$$

e si vede che r' non può, per alcun valore di k , essere verticale,

perché il termine in y non se ne può andare.

Quindi r , se è verticale, non può essere unita.

□ **2° METODO (PIU' VELOCE) PER LA DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE**

Possiamo risparmiare un bel po' di calcoli col seguente ragionamento:

una retta r è unita nell'affinità t se e solo se coincide con la sua immagine, cioè risulta $t(r) = r$.
Ma allora, se r è unita, anche la CONTROIMMAGINE di r è r (e viceversa)!

Quindi

il 2° metodo consiste nel determinare le equazioni della retta CONTROIMMAGINE di r anziché della retta immagine

(il procedimento è più facile, perché non si è costretti ad invertire l'affinità!);

poi si confronterà r con la sua controimmagine, per stabilire quando coincidono
(= per quali valori di m, q coincidono).

$$t: \begin{cases} x' = y - x \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$$

$$r: y = mx + q \rightarrow$$

$$t^{-1}(r): 2y - 1 = m(y - x) + q; \dots; (2 - m)y = -mx + q + 1;$$

Con $m=2$
 $t^{-1}(r)$ è verticale
e non può quindi
coincidere con r ,
che non lo è
 $\uparrow$
($m \neq 2$)

$$y = -\frac{m}{2-m}x + \frac{q+1}{2-m} \quad (m \neq 2)$$

$$t^{-1}(r) \equiv r \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m}{2-m} = m \\ \frac{q+1}{2-m} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m = 2m - m^2; & m^2 - 3m = 0; & m(m-3) = 0; & m = 0 \vee m = 3 \\ \frac{q+1}{2-m} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ \frac{q+1}{2} = q \end{cases} \vee \begin{cases} m = 3 \\ \frac{q+1}{2-3} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ q = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} m = 3 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{da cui } \boxed{r_1: y = 1}, \quad \boxed{r_2: y = 3x - \frac{1}{2}}$$

Come al solito, abbiamo lasciato da parte provvisoriamente le rette verticali, e ora dovremo occuparci anche di esse:

$$r: x = k \rightarrow t^{-1}(r): y - x = k \quad \text{che non può coincidere con } x=k, \text{ per nessun valore di } k.$$

UN ALTRO ESEMPIO.

Studiare l'affinità t di equazioni $\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = 2 - y \end{cases}$

1) CALCOLO DEL DETERMINANTE $D = ad - bc$ (costante di affinità)

$$t: \begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = -y + 2 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

- Essendo $D < 0$, l'affinità è **inversa** (cioè inverte il verso delle figure)
- Essendo $|D| = 1$, l'affinità **conserva le aree** (muta sempre una figura, in un'altra con la stessa area)
- La trasformazione **non è un'isometria**
(è vero che D vale -1 ,
ma non accade che gli elementi di una diagonale siano uguali e quelli dell'altra diagonale opposti)
e nemmeno una *similitudine*.

2) DETERMINAZIONE DEI PUNTI UNITI

$$\begin{cases} x = x - 2y + 2 \\ y = 2 - y \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 2 \\ 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \text{qualsiasi} \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \text{sono uniti tutti i punti con coordinate } (x, 1) \\ \text{vale a dire la retta } \boxed{y=1} \text{ è una } \boxed{\text{retta di punti uniti}}$$

3) DETERMINAZIONE DELLE RETTE UNITE

Utilizziamo il 2° metodo, più comodo e veloce!

$$r: y = mx + q \rightarrow$$

$$t^{-1}(r): 2 - y = m(x - 2y + 2) + q;$$

$$2 - y = mx - 2my + 2m + q;$$

$$(2m - 1)y = mx + 2m + q - 2;$$

$$y = \frac{m}{2m-1}x + \frac{2m+q-2}{2m-1} \left(m \neq \frac{1}{2}; \text{ ma con } m = 1/2 \text{ si verifica subito} \right) \\ \text{che la retta non può essere unita}$$

$$t^{-1}(r) \equiv r \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2m-1} = m \\ \frac{2m+q-2}{2m-1} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 2m^2 - m; & 2m^2 - 2m = 0; & m(m-1) = 0; & m = 0 \vee m = 1 \\ \frac{2m+q-2}{2m-1} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ \frac{q-2}{-1} = q \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ \frac{2+q-2}{2-1} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ q - 2 = -q \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ q = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ q = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} m = 1 \\ q = \text{qualsiasi!} \end{cases} \quad \text{Si può poi controllare che} \\ \text{nessuna retta verticale } (x = k) \text{ è unita}$$

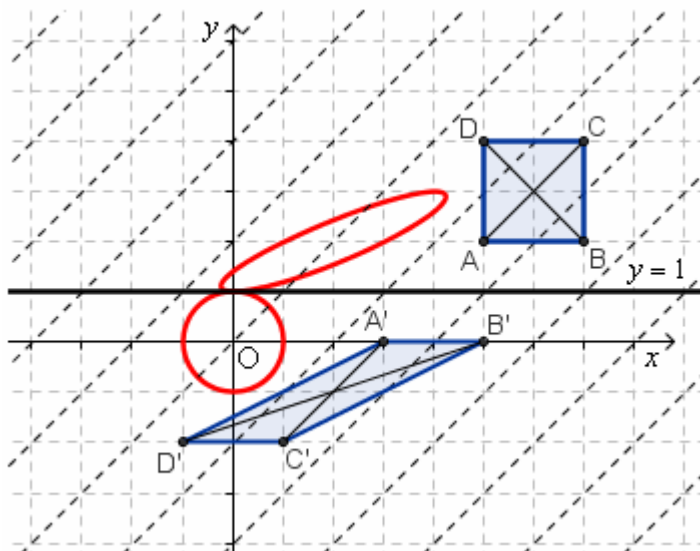
E' perciò unita la retta con $m=0$ e $q=1$, ossia la $\boxed{y=1}$

(in effetti, l'avevamo trovata già prima come retta di punti uniti!)

e sono unite tutte le rette con $m=1$ e q qualsiasi, ossia tutte le rette di equazione $\boxed{y = x + q}$

(esse costituiscono il fascio di tutte le rette parallele alla bisettrice del 1° e 3° quadrante).

In definitiva, abbiamo in questa trasformazione una retta formata da punti uniti, più infinite altre rette, che sono "unite" ma non "di punti uniti".



La figura qui a fianco cerca di dare un'idea di come operi questa affinità, mostrando

- la retta di punti uniti (a tratto marcato),
- alcune fra le infinite rette unite (tratteggiate)
- e inoltre una circonferenza con la rispettiva immagine, un quadrato con diagonali e la rispettiva immagine

22. ESERCIZI SULLE AFFINITA' (soluzioni alle pagine 312-313-314)

□ Studia le affinità seguenti:

- 1) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = 2x \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = x - y \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = 4x + y - 1 \\ y' = -x + 2y + 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + 4 \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = x + 3y \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x' = \frac{-x + 2y + 2}{3} \\ y' = \frac{4x + y - 2}{3} \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$
- 10) $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = -2x + 2y + 6 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + 2 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x' = x \\ y' = x - y \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x' = 7x + 24y \\ y' = 24x - 7y \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$
- 15) $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 15 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{14}{5}x - \frac{2}{5}y \end{cases}$ 17) $\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y' = -\frac{1}{2}y + 6 \end{cases}$

□ Esercizi vari

- 19) Considera l'affinità di equazioni: $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = 2x - y \end{cases}$
e trova l'immagine e la controimmagine della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$
(circonferenza di centro l'origine e raggio 1)
- 20) Considera l'affinità di equazioni: $\begin{cases} x' = 3x - 2y - 1 \\ y' = 4x + y + 1 \end{cases}$
e trova l'immagine e la controimmagine della retta $x + y = 1$
- 21) Scrivi le equazioni:
a) della simmetria di centro (2,3) b) della simmetria di centro (-3,0)
- 22) Scrivi le equazioni:
a) della simmetria s_1 di centro $C_1(1,1)$ b) della simmetria s_2 di centro $C_2(4,2)$
c) Successivamente, scrivi le equazioni dell'affinità composta $s_2 \circ s_1$, osservando che si tratta di una traslazione, il cui vettore è il doppio del vettore $\overline{C_1C_2}$
- 23) Dimostra *facendo uso di equazioni* che, in generale, il *prodotto*
(= composizione, applicazione successiva)
di due simmetrie di centri $C_1(x_1, y_1)$, $C_2(x_2, y_2)$
è una traslazione il cui vettore è $2 \cdot \overline{C_1C_2}$
(supponendo di applicare prima s_1 poi s_2).
- 24) Scrivi le equazioni:
a) della simmetria il cui asse è la retta $x = 3$
b) della simmetria il cui asse è la retta $y = -1$
- 25) Scrivi le equazioni della simmetria: a) il cui asse è la retta $x = 1/2$ b) il cui asse è la retta $y = 1$
c) Successivamente, componi le due affinità
constatando che si ottiene la simmetria centrale di centro (1/2, 1).
Osserviamo che questa può anche essere interpretata
come una rotazione di 180° intorno al punto (1/2, 1):
ciò conferma che la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti è una rotazione.
- 26) Componi le due simmetrie assiali di assi $x = 1$ e $x = 3$,
constatando che (gli assi essendo paralleli) si ottiene una traslazione.

- 27) Componi (nell'ordine) le due simmetrie assiali aventi per assi l'asse x e, rispettivamente, la retta $y = x$.
Applica poi la trasformazione ottenuta al triangolo OAB, con $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,2)$, per constatare che si tratta di una rotazione di 90° in senso antiorario intorno all'origine.
- 28) Se io ti dico che le due curve di equazioni $x^2 + xy = 1$; $x^2 + xy + 2y = 5$ sono simmetriche l'una dell'altra rispetto a un punto, tu riesci a trovarmi le coordinate del punto?
- 29) Si sa che la curva di equazione $x^2 - xy + y^2 - x - 4y + 7 = 0$ è simmetrica rispetto a un punto ("simmetrica" vuol dire "simmetrica di sé stessa", ossia "mutata in sé stessa dalla simmetria"). Trovare le coordinate del punto.
- 30) Scrivi le equazioni:
a) dell'omotetia di centro $(3, 4)$ e rapporto -2
b) dell'omotetia di centro $(0, 1)$ e rapporto 3
- 31) Scrivi le equazioni:
a) dell'omotetia ω_1 di centro $C_1(1,2)$ e rapporto $k_1 = 3$
b) e dell'omotetia ω_2 di centro $C_2(4,-1)$ e rapporto $k_2 = 1/6$
c) Successivamente, scrivi le equazioni dell'affinità composta $\omega_2 \circ \omega_1$, osservando che si tratta ancora di un'omotetia, il cui rapporto è il prodotto dei rapporti delle due omotetie di partenza, e il cui centro è allineato coi loro centri.
- 32) Scrivi le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = 4x$.
- 33) Scrivi le equazioni della simmetria assiale di asse $r: y = x - 1$
Determina poi i punti uniti e le rette unite servendoti delle equazioni trovate: constaterai, come del tutto prevedibile, che c'è tutta una retta di punti uniti (la $r: y = x - 1$, ovviamente) mentre sono rette unite, senza essere rette di punti uniti, tutte le $y = -x + q$, $q \in \mathbb{R}$.
- 34) Si può dimostrare che un'affinità è individuata in modo unico se, per 3 punti non allineati del piano, vengono assegnate le rispettive immagini (anch'esse non allineate).
Ciò premesso, determina l'affinità che fa corrispondere le seguenti coppie di punti:
 $O(0,0) \rightarrow O'(1,0)$ $A(1,0) \rightarrow A'(2,1)$ $B(0,1) \rightarrow B'(3,3)$
- 35) Determina le equazioni dell'affinità che fa corrispondere le seguenti coppie di punti:
 $A(1,1) \rightarrow A'(0,4)$ $B(0,2) \rightarrow B'(2,4)$ $C(-1,1) \rightarrow C'(2,2)$
e successivamente trove gli elementi uniti.
- 36) Spiega perché non può esistere nessuna affinità che trasformi la terna di punti $(1,3); (2,6); (3,9)$ nella terna $(1,1); (2,3); (3,2)$.
- 37) Determina i coefficienti a, b, c, d, m, n in modo che l'affinità $\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$ ammetta $y = x$ come retta di punti uniti, e muti $W(1,2)$ in $W'(2,0)$
Successivamente, stabilisci se l'affinità ammette altre rette unite oltre alla $y = x$.
- 38) Esistono valori dei parametri a, b tali che l'affinità $\begin{cases} x' = (a-1)x + by \\ y' = cx + (a-3)y + 4 \end{cases}$ sia un'isometria?

39) UNA PROPRIETA' INTERESSANTE

Dimostra che **ogni affinità "conserva il punto medio dei segmenti"**, nel senso che l'immagine, attraverso una qualsiasi affinità, del punto medio di un segmento AB, è *sempre* coincidente col punto medio del corrispondente segmento A'B' (ricorda che l'ascissa del punto medio è la media delle ascisse, e analogamente per le ordinate).

SOLUZIONI

- 1) $D = 6$: affinità diretta che moltiplica per 6 le aree. Punto unito: l'origine. Rette unite: $y = 0$; $y = -x$.
- 2) $D = -2$: aff. inversa che raddoppia le aree. Punto unito: $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$. Rette unite: $y = -2x - 2$; $y = x - \frac{1}{2}$.
- 3) $D = -2$: affinità inversa che raddoppia le aree. Punto unito: l'origine. Rette unite: $y = \frac{1}{3}x$; $x = 0$.
- 4) $D = 9$: affinità diretta che moltiplica per 9 le aree. Punto unito: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Retta unita: $y = -x$.
- 5) $D = 1$. E' un'isometria diretta; ha come punto unito $(-2, 2)$ e non ha nessuna retta unita.
- 6) $D = -3$: affinità inversa che triplica le aree.
Punto unito: $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$. Due rette sono unite: la $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ e la $x = 1$.
- 7) $D = 2$. E' una similitudine diretta, che raddoppia le aree (quindi, essendo una similitudine, ingrandisce i segmenti in "scala", moltiplicandone le lunghezze per $\sqrt{2}$); ha come punto unito $(0, 0)$ e non ha nessuna retta unita.
- 8) $D = -1$: affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti: $y = 2x - 1$.
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle di coefficiente angolare -1 ($y = -x + q$, $q \in \mathbb{R}$).
- 9) $D = -1$. E' una isometria inversa. Ha tutta una retta di punti uniti, la $y = 2x$,
e ha altre infinite rette unite, quelle della forma $y = -\frac{1}{2}x + q$, $q \in \mathbb{R}$.
- 10) $D = 2$: affinità diretta che raddoppia le aree. Non ha punti uniti. Ha una retta unita: la $y = 2x$.
- 11) $D = -1$. E' una isometria inversa. Non ha punti uniti. Ha una retta unita, la $y = x + 1$.
- 12) $D = -1$: affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti: $y = \frac{1}{2}x$.
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle parallele all'asse y ($x = k$, $k \in \mathbb{R}$).
- 13) $D = -625$. E' una similitudine inversa. In questa similitudine, dato che le aree vengono moltiplicate per 625, le lunghezze dei segmenti vengono moltiplicate per 25.
Ha come punto unito l'origine, e ha le due rette unite $y = \frac{3}{4}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$.
- 14) $D = -1$: affinità inversa che conserva le aree. Ha una retta di punti uniti: $y = x$.
Rette unite: oltre alla precedente, tutte quelle di coeff. ang. 3 ($y = 3x + q$, $q \in \mathbb{R}$).
- 15) Avrai riconosciuto che si tratta della traslazione il cui vettore ha componenti $(3, 15)$.
E' dunque un'isometria diretta (se calcoli la costante di affinità, la troverai uguale a +1 e vedrai che nel determinante i termini su di una diagonale sono uguali e quelli sull'altra diagonale entrambi nulli e quindi interpretabili come opposti) e non ha punti uniti, ma in compenso ha come rette unite tutte quelle parallele al vettore di traslazione, ossia tutte quelle di equazione $y = 5x + q$, $q \in \mathbb{R}$.
- 16) $D = -2$: affinità inversa che raddoppia le aree. Ha una retta di punti uniti: $y = 2x$.
Oltre alla precedente, sono rette unite tutte le $y = -\frac{7}{4}x + q$, $q \in \mathbb{R}$.
- 17) $D = 3$: affinità diretta che triplica le aree.
Ammette tutta una retta di punti uniti (la $y = -x - 1$)
e infinite rette unite (quelle di equazione $y = x + q$, $q \in \mathbb{R}$).
- 18) Ti sei accorto che si tratta di un'omotetia?
Essa dimezza le lunghezze e moltiplica per $\frac{1}{4}$ le aree;
l'unico suo punto unito è il centro di omotetia $(2, 4)$
e ha invece infinite rette unite: se le ricerchi algebricamente, troverai
♫ le rette di equazione $y = mx - 2m + 4$,
le quali, come puoi constatare sostituendo, passano tutte per il punto $(2, 4)$,
e hanno inclinazione non verticale che varia al variare di m ;
♫ più la $x = 2$, che è poi la retta verticale passante per $(2, 4)$.

19) Immagine: $5x^2 + 2y^2 - 2xy + 20x - 4y + 11 = 0$

Controimmagine: $5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y + 3 = 0$

20) Immagine: $3x - 5y + 19 = 0$.

Controimmagine: $y = 7x - 1$

21) a) $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = 6 - y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -6 - x \\ y' = -y \end{cases}$

22) a) $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = 8 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$

c) Componendo, si ottiene $\begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ che è effettivamente una traslazione,

il cui vettore ha componenti $(6, 2)$ mentre le componenti di $\overline{C_1C_2}$ sono $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (3, 1)$

23) La simmetria di centro $C_1(x_1, y_1)$ ha equazioni: $\begin{cases} x' = 2x_1 - x \\ y' = 2y_1 - y \end{cases}$

e quella di centro $C_2(x_2, y_2)$ ha equazioni: $\begin{cases} x' = 2x_2 - x \\ y' = 2y_2 - y \end{cases}$.

Componiamole: $s_1: \begin{cases} x' = 2x_1 - x \\ y' = 2y_1 - y \end{cases}$ $s_2: \begin{cases} x'' = 2x_2 - x' \\ y'' = 2y_2 - y' \end{cases}$

$s_2 \circ s_1: \begin{cases} x'' = 2x_2 - x' = 2x_2 - (2x_1 - x) = 2x_2 - 2x_1 + x = x + 2(x_2 - x_1) \\ y'' = 2y_2 - y' = 2y_2 - (2y_1 - y) = 2y_2 - 2y_1 + y = y + 2(y_2 - y_1) \end{cases}$

e $\begin{cases} x'' = x + 2(x_2 - x_1) \\ y'' = y + 2(y_2 - y_1) \end{cases}$ è proprio una traslazione, il cui vettore ha componenti $(2(x_2 - x_1), 2(y_2 - y_1))$ che sono proprio le componenti del vettore $2\overline{C_1C_2}$

24) a) $\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2 - y \end{cases}$

25) a) $\begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - y \end{cases}$

26) L'affinità composta è $\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y \end{cases}$: si tratta effettivamente di una traslazione.

27) Si ottiene $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

28) Sottoponiamo una delle due curve, ad esempio la $x^2 + xy = 1$,

alla simmetria centrale avente per centro un punto (x_0, y_0) da determinarsi

(basterà effettuare, nell'equazione della curva, le sostituzioni $x \rightarrow 2x_0 - x$, $y \rightarrow 2y_0 - y$).

Imponiamo poi che l'equazione così ottenuta coincida con l'equazione dell'altra curva.

Otteniamo così un sistema di tre equazioni nelle due incognite x_0, y_0 .

Tale sistema, nonostante il numero delle incognite superi il numero delle equazioni,

è, eccezionalmente, possibile (si usa dire: "compatibile"), per il fatto che l'esercizio era stato costruito "ad hoc",

in modo che le due curve fossero, effettivamente, simmetriche rispetto ad un punto.

Si trova $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

29) $P_0(2, 3)$

$$30) \text{ a) } \begin{cases} x' = -2x + 9 \\ y' = -2y + 12 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y - 2 \end{cases}$$

$$31) \text{ a) } \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x' = \frac{1}{6}x + \frac{10}{3} \\ y' = \frac{1}{6}y - \frac{5}{6} \end{cases} \quad \text{c) } \omega_2 \circ \omega_1 = \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 3 \\ y' = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{6} = k_1 \cdot k_2; \\ C(6, -3) \text{ che è allineato} \\ \text{con } C_1(1, 2) \text{ e } C_2(4, -1) \end{matrix}$$

32) Le relazioni che fanno passare dalla coppia (x, y) alla (x', y') si possono scrivere tenendo conto che:

- il punto medio del segmento PP' deve appartenere alla $y = 4x$: $\frac{y+y'}{2} = 4 \cdot \frac{x+x'}{2}$
- la retta PP' dev'essere perpendicolare alla $y = 4x$ e quindi avere coefficiente angolare $-1/4$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{1}{4}$$

Ponendo a sistema le due relazioni e risolvendo rispetto a x', y' si ottiene:

$$\begin{cases} x' = -\frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y \\ y' = \frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y \end{cases}$$

Per un controllo di correttezza,
puoi applicare la trasformazione a qualche punto del piano,
ad esempio $O(0, 0)$; $A(1, 4)$; $B(4, -1)$, od altri.

$$33) \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

$$34) \begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

$$35) \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$$

Punto unito: $(-2, -4)$.

Rette unite: $r_1: y = -(\sqrt{2} - 1)x - 2(\sqrt{2} + 1)$, $r_2: y = (\sqrt{2} + 1)x + 2(\sqrt{2} - 1)$

36) Semplice: i primi 3 punti sono fra loro allineati, ma allora dovrebbero esserlo anche le rispettive immagini (un'affinità conserva l'allineamento!), mentre non lo sono.

$$37) \begin{cases} x' = y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Sono rette unite tutte quelle di coefficiente angolare -2 :
 $y = -2x + q, q \in \mathbb{R}$

38) Sì: $a = 2, b = c = 0$

39) Devi considerare una generica affinità

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$$

due generici punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$,

il punto medio $M\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}\right)$ del segmento AB ,

poi calcolare le coordinate delle rispettive immagini A' , B' ed M' ,
infine trovare le coordinate del punto medio del segmento $A'B'$
e constatare che tale punto medio coincide con M' .