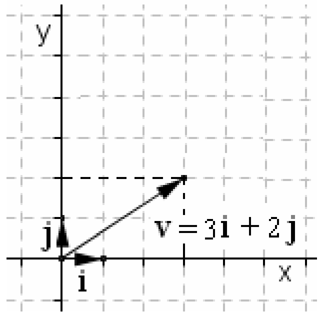
I VETTORI E I CONCETTI DI DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

1. UN “VETTORE” E’ INDIVIDUATO DALLA SEQUENZA DELLE SUE COMPONENTI



Nel Volume 1 abbiamo presentato il concetto di “vettore” nel modo seguente:

« Si dice “*vettore*” l’entità astratta che rappresenta
ciò che hanno in comune tutti i segmenti orientati *equipollenti* ad uno dato
(= aventi stesso modulo, direzione e verso di uno dato) **».**

Abbiamo poi parlato di “*componenti cartesiane*” di un vettore,
e ci si può facilmente convincere che **un vettore è univocamente individuato**

- **dalla coppia (se il vettore è pensato sul piano)**
- **o dalla terna (se è pensato nello spazio)**

delle sue componenti cartesiane.

Osserva infatti la figura in alto:
possiamo dire che il vettore $\mathbf{v}$ è “individuato” dalla coppia (3, 2) delle sue componenti,
per significare che nota la coppia, è noto anche il vettore (senza ambiguità), e viceversa.

Quindi un vettore nel piano “coincide sostanzialmente” con una coppia ordinata di numeri reali,
mentre un vettore nello spazio “coincide sostanzialmente” con una terna ordinata di numeri reali.

E pertanto d’ora in poi un vettore come quello in figura verrà indicato, anziché come $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$,
semplicemente come (3, 2), coppia ordinata di numeri che preferiremo disporre in colonna: $\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

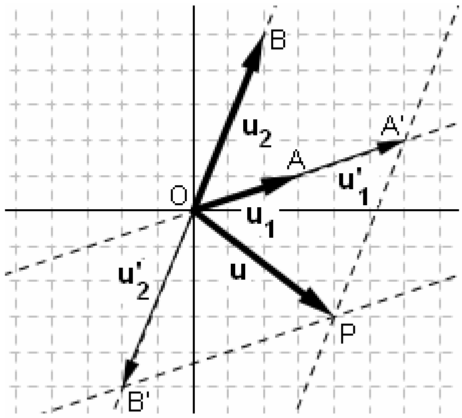
Un vettore nello spazio tridimensionale si potrà poi indicare con una terna ordinata, **es.** $\begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-5} \\ \mathbf{7} \end{pmatrix}$.

Per “COMBINAZIONE LINEARE” di due o più vettori si intende ciò che si ottiene moltiplicando, eventualmente, i vettori stessi ciascuno per un numero reale, poi sommando fra loro i risultati.
Insomma, dati ad esempio i vettori $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ e $\mathbf{u_3}$, sono loro combinazioni lineari:

$$3\mathbf{u_1} - 5\mathbf{u_2} + 12\mathbf{u_3}, \quad \text{oppure} \quad \mathbf{u_1} - \mathbf{u_2} - \mathbf{u_3}, \quad \text{o} \quad \sqrt{5}\mathbf{u_1} + \frac{3}{4}\mathbf{u_2} - \frac{1}{7}\mathbf{u_3} \quad \ldots$$

Ci domandiamo ora:
dati, sul piano, tre vettori,
sarà sempre possibile esprimerne uno come combinazione lineare degli altri due?

❑ ESEMPIO 1



Osserva la figura qui a fianco,
e in essa considera i tre vettori $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}, \mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}, \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OB}$.
Per la “punta” P di $\mathbf{u}$ si sono tracciate:

- la parallela a $\mathbf{u}_2$, fino a intersecare in A’ la retta di $\mathbf{u}_1$
- e la parallela a $\mathbf{u}_1$, fino a intersecare in B’ la retta di $\mathbf{u}_2$;

sono stati così determinati i vettori $\mathbf{u}'_1 = \overrightarrow{OA'}$ e $\mathbf{u}'_2 = \overrightarrow{OB'}$.
Ora, come si vede, risulta $\mathbf{u} = \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2$, e poiché

- $\mathbf{u}'_1$ si può ottenere da $\mathbf{u}_1$
  raddoppiandone il modulo a verso invariato,
- mentre $\mathbf{u}'_2$ si può ottenere da $\mathbf{u}_2$ cambiandone il verso,

in definitiva sarà $\mathbf{u} = \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

Anche algebricamente:
chiedersi se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ può essere espresso come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

equivale a domandarsi se esistono due numeri reali λ_1, λ_2 tali che $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, quindi

se il sistema $\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = -3 \end{cases}$ ammette soluzione. La risposta è senz’altro affermativa perché $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$,

e risolvendo, con un metodo qualsiasi, il sistema, si trovano anche i valori di λ_1, λ_2 ossia $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$.

2. VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI E INDIPENDENTI

Preso un insieme di due o più vettori, nel piano o nello spazio, essi potranno essere fra loro "linearmente dipendenti" oppure "linearmente indipendenti". Vediamo le definizioni di questi concetti.

Due, o più, vettori si dicono "linearmente dipendenti"

I) **se fra essi ce n'è almeno uno che può essere scritto come combinazione lineare degli altri**

II) oppure, condizione che si può dimostrare essere equivalente alla I),
se esiste una loro combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, che dia il vettore nullo.

Quindi **due, o più, vettori saranno invece "linearmente indipendenti"**

I) **se nessuno fra essi può essere scritto come combinazione lineare degli altri**

II) oppure, in alternativa, **se l'unica loro combinazione lineare,
avente per risultato il vettore nullo, è quella a coefficienti tutti nulli:**

$\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}$ linearmente indipendenti se e solo se $\lambda_1\mathbf{u_1} + \lambda_2\mathbf{u_2} + \ldots + \lambda_n\mathbf{u_n} = \vec{\mathbf{0}} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

I tre vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dell'esempio precedente erano perciò linearmente dipendenti.

❑ ESEMPIO 2

Consideriamo, nello spazio tridimensionale, i tre vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Supponiamo che una loro combinazione lineare $\lambda_1\mathbf{u_1}+\lambda_2\mathbf{u_2}+\lambda_3\mathbf{u_3}$ dia come risultato il vettore nullo:

allora sarà $\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \quad\;\; = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$.

Un sistema come questo, coi termini noti tutti nulli, si dice "*omogeneo*".
Un sistema omogeneo ammette senz'altro almeno una soluzione: la soluzione nulla, quella in cui tutte le incognite valgono 0.

Andiamo a calcolare il determinante della matrice

dei coefficienti delle incognite: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$.

Cosa possiamo concludere? Che il nostro sistema è determinato, quindi ha una e una sola soluzione.
E poiché la terna $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ è soluzione, essa sarà anche l'*unica* soluzione possibile.
In definitiva, non esiste alcuna altra combinazione lineare dei nostri tre vettori, oltre a quella che ha coefficienti tutti nulli, in grado di dare come risultato il vettore nullo.
E perciò i tre vettori considerati sono linearmente indipendenti.

❑ ESEMPIO 3

Passiamo ora ad esaminare i tre vettori $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Se osserviamo che il terzo è uguale alla somma dei primi due, divisa per 4,
ne dedurremo subito che i tre vettori in gioco sono linearmente dipendenti
(uno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri: $\mathbf{u_3} = \frac{1}{4}\mathbf{u_1} + \frac{1}{4}\mathbf{u_2}$).

Senza questa osservazione, la dipendenza lineare si sarebbe potuta desumere impostando la condizione

$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, equivalente al sistema $\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$

il cui determinante dei coefficienti delle incognite è $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Il sistema, avendo determinante nullo, non è dunque determinato,
e sarà allora o impossibile o indeterminato.
… Ma impossibile non è, avendo l'evidente soluzione $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; per esclusione sarà dunque indeterminato, e avrà allora infinite soluzioni, quindi ne avrà (infinite) altre oltre alla $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Esisterà perciò una combinazione lineare dei vettori dati, a coefficienti non tutti nulli,
tale da generare il vettore nullo: i vettori in esame sono linearmente dipendenti.

3. MA "COM'E' FATTA" UNA FAMIGLIA DI VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI?

Pensiamo dapprima a una famiglia composta da DUE vettori soltanto.
Essi saranno fra loro linearmente dipendenti se ce n'è uno, fra i due, che possa essere espresso come combinazione lineare dell'altro, ossia che sia uguale all'altro, moltiplicato per uno scalare; … ma ciò evidentemente avviene se e solo se i due vettori hanno la stessa direzione! Insomma:
DUE vettori sono fra loro linearmente dipendenti se e solo se giacciono sulla stessa retta.

Esaminiamo ora il caso in cui i vettori della famiglia sono TRE.

Supponiamo per ora che i tre vettori in gioco APPARTENGANO A UNO STESSO PIANO.
E in relazione a questa situazione geometrica, andiamo a rivisitare l'ESEMPIO 1.
Immaginiamo di sostituire, in esso, i vettori $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$ con un'altra coppia di vettori, purché entrambi diversi dal vettore nullo e caratterizzati, come lo erano $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$, da direzioni differenti; nonché di sostituire $\mathbf{u}$ con un qualsiasi vettore giacente nel piano su cui stanno $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$.
Comprendiamo che col medesimo procedimento grafico messo in atto nell'ESEMPIO 1 ci sarà possibile esprimere $\mathbf{u}$ come combinazione lineare di $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$, ossia: come risultante della somma di due vettori, ottenibili "allungando" o "accorciando", ed eventualmente sottoponendo a un cambiamento di verso, $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$.

Da questa osservazione possiamo trarre due conclusioni interessanti:

I) **nel piano, due vettori entrambi non nulli, che abbiano direzioni diverse, permettono, se combinati linearmente con coefficienti opportuni, di "generare" tutti gli altri vettori: si dice che costituiscono una "base" per i vettori del piano;**

II) **nel piano, non possiamo avere un famiglia di vettori linearmente indipendenti, che sia formata da più di 2 vettori: il numero massimo di vettori linearmente indipendenti, nel piano, è 2.**

Se invece andiamo a considerare TRE vettori $\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3}$ NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE, questi potranno costituire, a seconda dei casi, una famiglia di vettori linearmente dipendenti o indipendenti, ma nel primo caso (se, cioè, sono linearmente dipendenti fra loro) ce ne sarà almeno uno che potrà essere espresso come combinazione lineare degli altri due, ossia come risultato della somma di due vettori ottenibili da quelli tramite allungamento, o accorciamento, con eventuale cambiamento di verso: è facile convincersi che in questo caso tutti e tre i vettori apparterranno a uno stesso piano. Insomma,
TRE vettori, nello spazio tridimensionale, sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.

Inoltre, con ragionamenti basati su procedimenti grafici simili, nello spazio, a quelli visti nell'ESEMPIO 1 relativo al piano, si può trarre che nello spazio tridimensionale, data una famiglia di 3 vettori tutti non nulli e linearmente indipendenti, cioè non complanari, qualsiasi altro vettore potrebbe essere generato come loro combinazione lineare, a patto di fissare i coefficienti in modo opportuno:
4 vettori nello spazio sono SEMPRE linearmente dipendenti fra loro!
Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti, nello spazio, è 3.

ESERCIZI

1) I tre vettori $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti?

2) I vettori $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti: a) verificalo, e determina una loro combinazione lineare, a coefficienti non tutti nulli, che dia il vettore nullo; b) esprimi poi il primo vettore come combinazione lineare degli altri due.

3) Dimostra che i tre vettori $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

4) Fra le seguenti famiglie di vettori, riconosci quali sono formate da vettori linearmente dipendenti.

a) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\9\end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$ b) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}-4\\3\\5\end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ c) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

5) Per quale valore del parametro k la seguente è una famiglia di vettori linearmente dipendenti? $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}k\\-8\\11\end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}$

6) L'insieme dei polinomi in una variabile, di grado ≤ 3, è uno "spazio vettoriale": ossia, ciascun polinomio ax^3+bx^2+cx+d è individuato in modo univoco dalla sequenza (a, b, c, d) dei suoi 4 coefficienti e le operazioni di somma di polinomi e di prodotto di un polinomio per un numero reale godono delle stesse proprietà che caratterizzano le omonime operazioni coi vettori geometrici. Secondo te, quale potrebbe essere una "base" in questo spazio vettoriale?

6') I quattro polinomi $-x^3+x$, $2x^3+4x^2-4$, $-2x^2+3x-2$, $2x^2-1$ sono linearmente indipendenti?

RISPOSTE

1) Sì, lo si può affermare immediatamente: 3 vettori nel piano sono SEMPRE linearmente dipendenti fra loro.

2) a) $\lambda_1\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ equivale a $\begin{cases}3\lambda_1+4\lambda_2-2\lambda_3=0\\ \lambda_1+2\lambda_2=0\\ \lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}$;

$$\begin{vmatrix}3&4&-2\\1&2&0\\1&5&3\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}4&-2\\5&3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\1&3\end{vmatrix}=-1\cdot(12+10)+2\cdot(9+2)=-22+22=0$$

abbiamo sviluppato il determinante secondo la sua seconda riga

per cui il sistema non è determinato; esso sarà allora indeterminato, perché impossibile certamente non è in quanto ammette la soluzione $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.
Esisteranno perciò altre (infinite) terne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, oltre a quella nulla, tali da soddisfare il sistema.
Determiniamo una di queste terne.

$$\begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_2\\ 3\cdot(-2\lambda_2)+4\lambda_2-2\lambda_3=0\\ -2\lambda_2+5\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_2\\ -6\lambda_2+4\lambda_2-2\lambda_3=0\\ 3\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_2\\ -2\lambda_2-2\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_2\\ \lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_2\\ \lambda_2\ \textit{qualsiasi}\\ \lambda_3=-\lambda_2\end{cases}$$

Una terna non nulla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ che risolve il sistema è dunque, ad esempio, la $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$.

E si ha $-2\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

[Chiaramente, questa è solo una fra le infinite combinazioni lineari, a coefficienti non tutti nulli, dei nostri tre vettori, che danno come risultato il vettore nullo.
Le altre si ottengono rimpiazzando la terna $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$ con un'altra ad essa proporzionale]

b) $-2\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2}-\mathbf{u_3}=\vec{\mathbf{0}} \to -2\mathbf{u_1}=-\mathbf{u_2}+\mathbf{u_3};\ \ 2\mathbf{u_1}=\mathbf{u_2}-\mathbf{u_3};\ \ \mathbf{u_1}=\frac{1}{2}\mathbf{u_2}-\frac{1}{2}\mathbf{u_3}$

3) $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ equivale a $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1+2\lambda_2=0\\ -\lambda_2=0\end{cases}$; $\begin{cases}\lambda_2=0\\ \lambda_1=-2\lambda_2=-2\cdot 0=0\\ 0+\lambda_3=0;\ \lambda_3=0\end{cases}$; $\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}$

quindi in effetti i tre vettori dati sono linearmente indipendenti, perché l'unica loro combinazione lineare, in grado di dare come risultato il vettore nullo, è quella a coefficienti tutti nulli.

Più rapidamente, si sarebbe potuto calcolare il determinante $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Il fatto che tale determinante sia diverso da 0 ci assicura che il sistema è determinato, vale a dire ha una e una sola soluzione. E siccome, essendo il sistema "omogeneo", cioè coi termini noti tutti nulli, la terna $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ è soluzione, si tratterà dunque dell'*unica* soluzione.

4) a) lin. dip. b) lin. ind. c) lin. ind. 5) $k=6$ (deve annullarsi il determinante …)

6) La base più semplice è senz'altro la quaterna di polinomi $x^3, x^2, x, 1$ (polinomi che si riducono ciascuno a un monomio!), identificabili con le quaterne ordinate (1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1).
Infatti, combinando linearmente questi 4 polinomi, è possibile ottenere qualsivoglia polinomio della forma ax^3+bx^2+cx+d.

6') I polinomi in questione "si identificano" con le quaterne $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\0\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Dobbiamo chiederci se l'uguaglianza $\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\4\\0\\-4\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\-2\\3\\-2\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

può essere verificata solo con $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, oppure no.

Siccome tale uguaglianza equivale al sistema $\begin{cases}-\lambda_1+2\lambda_2=0\\ 4\lambda_2-2\lambda_3+2\lambda_4=0\\ \lambda_1+3\lambda_3=0\\ -4\lambda_2-2\lambda_3-\lambda_4=0\end{cases}$

andremo a calcolare il determinante dei coefficienti delle incognite in tale sistema:
si constata che è uguale a 0, quindi si avranno anche (infinite) altre soluzioni oltre alla soluzione nulla.
I vettori in gioco sono linearmente *dipendenti*.

GRAZIE alla professoressa Adriana Garroni del Dipartimento di Matematica dell'Università "La Sapienza" di Roma, per le preziose indicazioni in relazione all'argomento "vettori".