CENNI DI GEOMETRIA SOLIDA

Così come la geometria piana, anche la solida è stata organizzata dai matematici secondo una struttura "ipotetico-deduttiva": definizioni, assiomi, teoremi.

Noi qui ci proponiamo di darne una presentazione snella, che attiri l'attenzione sugli aspetti accattivanti di questo splendido argomento, quindi cercheremo un compromesso fra il rigore e la semplicità/brevità, rinunciando deliberatamente a un'esposizione esaustiva, troppo ingombrante per i nostri scopi.

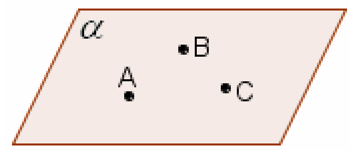
Iniziamo.

1. NOZIONI GENERALI

Un "piano" è un'entità geometrica indicata con una lettera greca e caratterizzata da una famiglia di assiomi: eccone qui di seguito due.

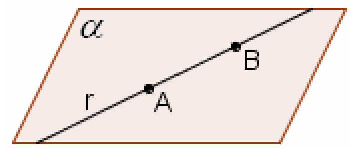
Assioma: **per 3 punti distinti, non allineati, passa un piano e uno solo**
(conseguenza: due rette incidenti individuano uno e un solo piano).

Per questo motivo, **un piano si può indicare anche tramite una terna di suoi punti non allineati: piano α o piano ABC.**

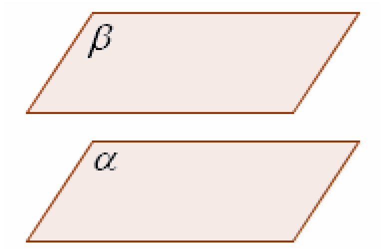


Assioma: **se due punti di una retta giacciono su di un piano, anche tutti gli altri punti della retta appartengono a quel piano**

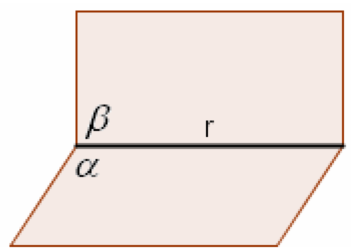
Quindi **il piano è illimitato in tutte le direzioni**: i nostri disegni, per cercare di comunicare l'idea di tridimensionalità nell'ambito bidimensionale del foglio, devono occultare questa caratteristica, che comunque va sempre tenuta presente.



Piani paralleli: non hanno nessun punto in comune, oppure coincidono

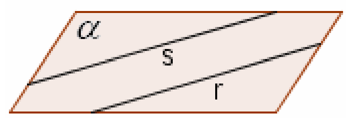


Piani incidenti: non sono paralleli; si può dimostrare che l'insieme dei loro punti comuni è una retta.



Rette sghembe nello spazio: non appartengono al medesimo piano, e non hanno punti comuni.

Rette parallele nello spazio: appartengono al medesimo piano, e non hanno punti comuni, oppure ne hanno infiniti (coincidono).



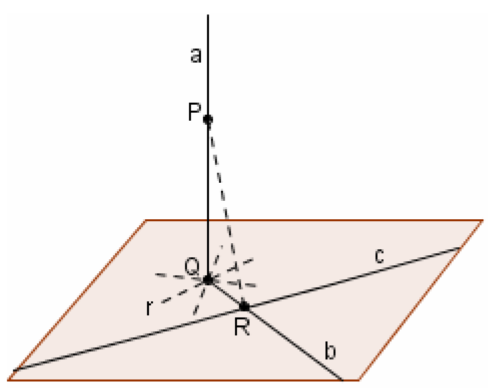
Definizione di perpendicolarità retta-piano:

una retta si dice perpendicolare ad un piano se e solo se è perpendicolare a tutte le rette di quel piano, passanti per il punto in cui la retta e il piano si tagliano
(ciò avviene senz'altro, come si può dimostrare, ogniqualvolta sia noto che è perpendicolare ad *almeno due* di quelle rette).

(NOTA: quando pensiamo, ad esempio, alla perpendicolarità fra la retta **a** e la retta **r** della figura, la pensiamo nell'ambito di *quel* piano che è individuato dalle due rette in questione **a, r**)

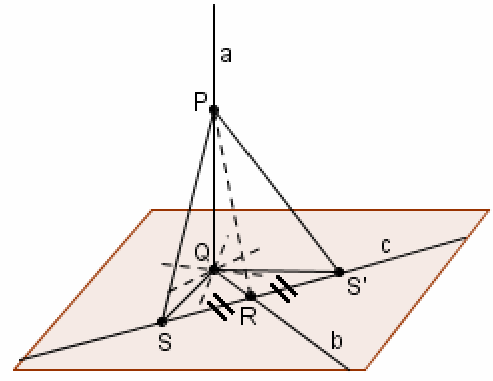
TEOREMA DELLE TRE PERPENDICOLARI
(è sovente utilizzato per giustificare una perpendicolarità in un contesto tridimensionale):

se si conduce una perpendicolare *a* ad un piano, e dal piede Q di questa si traccia la perpendicolare *b* ad una terza retta *c* che giace sul piano, l'ultima retta menzionata (*c*) risulta perpendicolare al piano individuato dalle prime due ($c \perp$ PQR)



Il Teorema delle Tre Perpendicolari

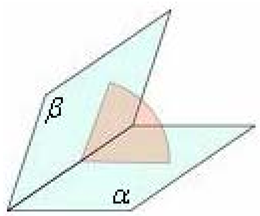
Dimostrazione del Teorema



Sulla retta c, da parti opposte rispetto a R, prendiamo due punti S ed S', equidistanti da R: $RS = RS'$.
Congiungiamo sia Q che P con S e con S'.
E' $QS = QS'$ perché i due triangoli QRS, QRS' sono uguali per il 1° Criterio; ma allora anche i due triangoli PQS, PQS' sono uguali per il 1° Criterio, e di conseguenza è $PS = PS'$.
Il triangolo PSS' è dunque isoscele, e pertanto PR, mediana relativa alla base, fa anche da altezza: è perciò

$$P\widehat{R}S = P\widehat{R}S' = 90°$$

e allora la retta c è perpendicolare nel punto R alla retta PR; ma la retta c era già, nello stesso punto R, appendicolare anche alla retta b; e quindi c, essendo perpendicolare, nel punto R, a due rette del piano PQR, è perpendicolare a tale piano, come volevasi dimostrare.

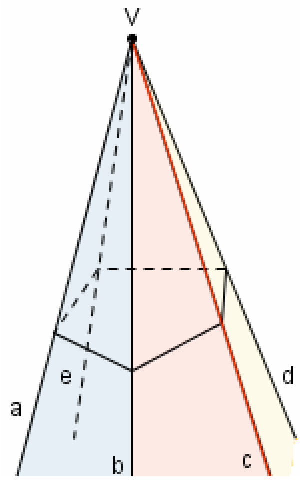


Un angolo fra due piani,
o "**angolo diedro**",
o semplicemente "**DIEDRO**"

(*immagine opera di Luca Antonelli, da Wikimedia Commons, qui utilizzata con licenza GFDL, GNU Free Documentation License*)

Qui a destra, una figura che va pensata estesa illimitatamente verso il basso, detta "**ANGOLOIDE**".

La somma delle ampiezze delle facce di un angoloide (in questo caso abbiamo 5 facce) è sempre <360°.



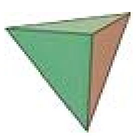
Un "**POLIEDRO**" è un solido delimitato da facce di forma poligonale.

Un poliedro si dice "**regolare**" o "**platonico**" quando le sue facce sono *poligoni regolari, tutti uguali fra loro.*

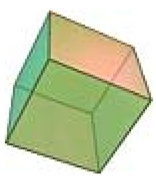
Si dimostra che esistono solo 5 tipi di POLIEDRI REGOLARI:

- il tetraedro regolare,
- l'esaedro regolare o cubo,
- l'ottaedro regolare,
- l'icosaedro regolare,
- il pentadodecaedro regolare.

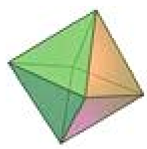
Le immagini sottostanti hanno come autore Cyp (*GFDL* , *Creative Commons Attribution Non-Commercial Share-Alike license version 2.0*)



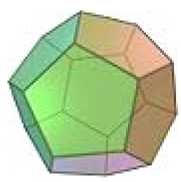
Tetraedro regolare
(4 facce triangolari equilatere, 4 vertici, 6 spigoli)



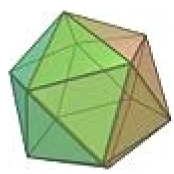
Cubo
(6 facce quadrate, 8 vertici, 12 spigoli)



Ottaedro regolare
(8 facce triangolari equilatere, 6 vertici, 12 spigoli)



Pentadodecaedro regolare
(12 facce pentagonali regolari, 20 vertici, 30 spigoli)



Icosaedro regolare
(20 facce triangolari equilatere, 12 vertici, 30 spigoli)

Per *tutti* i poliedri, regolari e non regolari, purché siano "*convessi*" (= senza "rientranze"), vale la rilevante

FORMULA DI EULERO:

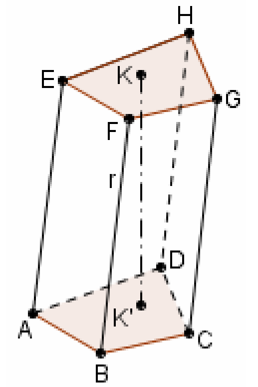
f+v = s+2

" il numero delle facce più quello dei vertici è uguale al numero degli spigoli, più 2 "

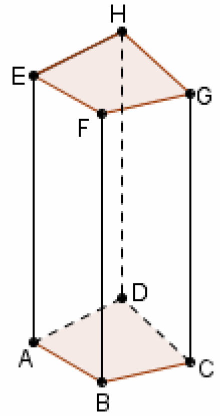
Un “**PRISMA**” è un solido delimitato da
due “basi” poligonali uguali e parallele fra loro (= giacenti su piani fra loro paralleli)
e da una superficie laterale costituita da parallelogrammi (da rettangoli, se il prisma è “retto”).
Si dice “**altezza**” **di un prisma**, la **distanza** (= segmento di perpendicolare) **fra i piani delle due basi**.

- **Prisma “retto”**: gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.
- **Prisma “regolare”**: prisma retto, la cui base è un poligono regolare.
- **Parallelepipedo**: prisma le cui 6 facce sono parallelogrammi (a 2 a 2 uguali, e giacenti su piani paralleli)
- **Parallelepipedo rettangolo**: le facce sono 6 rettangoli (è la tipica forma di una “scatola”).

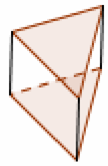
Un **prisma non retto** e una sua altezza KK'



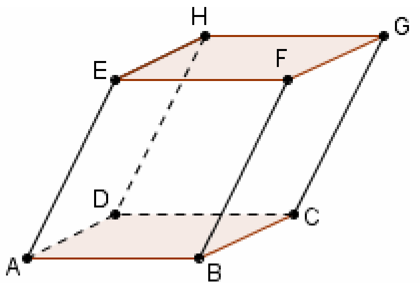
Un **prisma retto**; EA = FB = GC = HD ne sono altezze



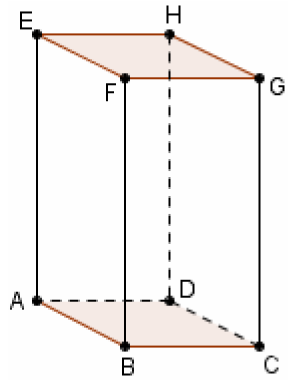
Qui a fianco, un **prisma regolare** avente per base un triangolo equilatero



Un **parallelepipedo generico**

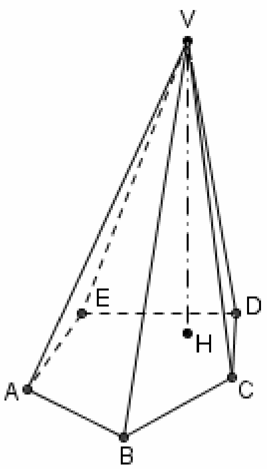


Un **parallelepipedo rettangolo**

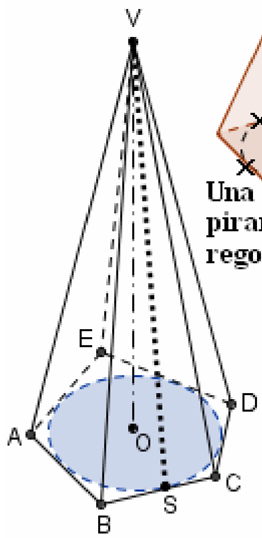


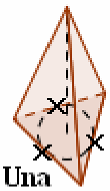
Una “**PIRAMIDE**” è un solido delimitato da una “base” poligonale e da una superficie laterale
formata da triangoli, ottenuti congiungendo un punto V (“vertice”) coi vertici della base.
Si dice “**altezza**” **di una piramide**, la **distanza fra il vertice e il piano della base**.

- **Piramide "retta"**: la sua base è un poligono *circoscrivibile ad una circonferenza*, e inoltre l'altezza della piramide ha il suo piede *proprio nel centro* di questa circonferenza
- In una *piramide retta*, le altezze dei triangoli che formano la superficie laterale sono *tutte uguali* fra loro: una qualsiasi di queste altezze uguali si dice “**apotema**” della piramide.
  Ribadiamolo: il concetto di “*apotema*” di una piramide
  NON ha senso per una piramide *qualsiasi*, ma solo per una piramide *retta*.
- **Piramide “regolare”**: è una piramide retta, avente per base un poligono regolare
- **Tronco di piramide**: si ottiene intersecando una piramide con un piano parallelo alla base



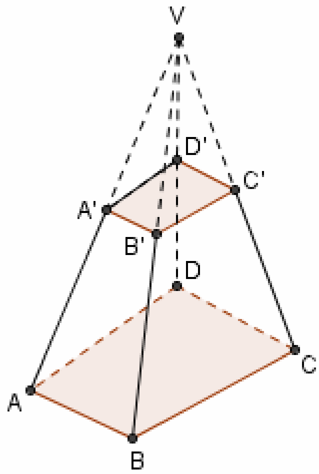
Una **piramide generica** con la sua altezza VH



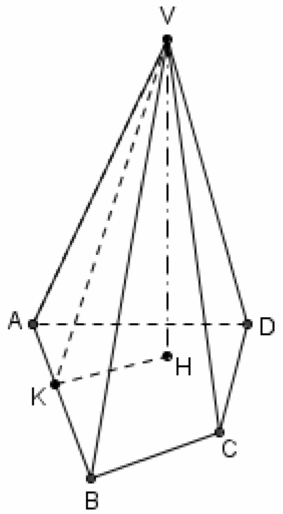


Una piramide regolare

Una **piramide retta**; VS è uno dei suoi apotemi.



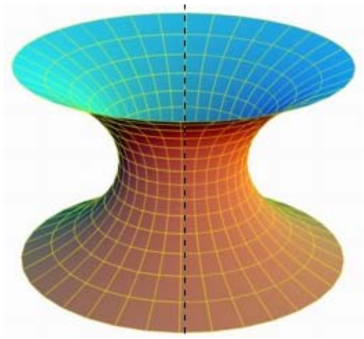
Un **tronco di piramide** (è come se fosse la differenza di due piramidi!)



Delle 5 figure, quella più a destra si riferisce al seguente enunciato: “*In una piramide qualsiasi (anche non retta), detti V il vertice, AB un lato della base, H la proiezione di V sul piano della base, e K la proiezione di H su AB, si ha che VK è l'altezza del triangolo VAB* ”. Dài, che qualcosa di già visto ti consente di dimostrarlo!

2. SUPERFICI E SOLIDI DI ROTAZIONE

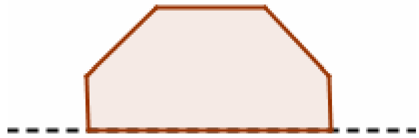
La figura qui sotto mostra una **SUPERFICIE DI ROTAZIONE**, **generata da una curva che ruota intorno ad una retta**; tratteggiato, il suo "**asse di rotazione**".



Nella figura qui a sinistra, compaiono anche dei "**meridiani**" (ciascuno è uguale alla curva che viene fatta ruotare intorno all'asse) e dei "**paralleli**" (circonferenze, aventi il centro sull'asse di rotazione).

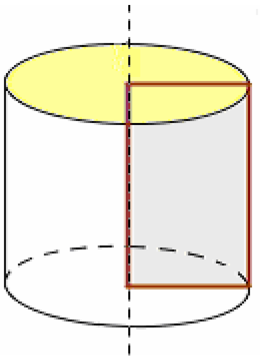
Immagini: dai siti https://www.indiana.edu/ www.softcom.net/users/sbmathias/series.htm

Se invece di una curva facciamo ruotare intorno all'asse una superficie, avremo un

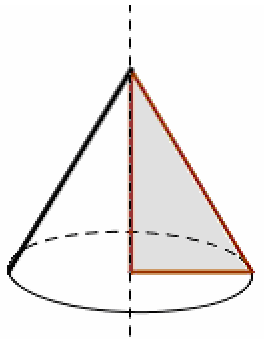


SOLIDO DI ROTAZIONE:

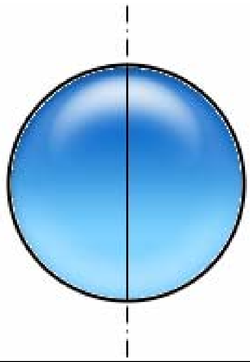
Un "**CILINDRO CIRCOLARE RETTO**" è il **solido di rotazione** generato da un **rettangolo** nel ruotare di un giro completo **intorno ad un suo lato.**



Un "**CONO CIRCOLARE RETTO**" è il **solido di rotazione** generato da un **triangolo rettangolo** nel ruotare di un giro completo **intorno ad un suo cateto.**



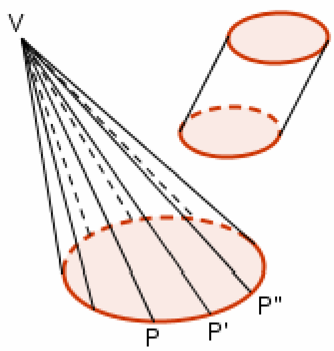
Anche una SFERA si può pensare come ottenibile ruotando un cerchio intorno a un suo diametro.



Abbiamo sopra definito cosa si intende per "cono *circolare retto*": ma più in generale, togliendo gli aggettivi, si può chiamare "**CONO**" qualunque solido ottenibile prendendo una porzione limitata di piano ("base") avente come contorno una curva chiusa di forma *arbitraria*, poi un punto V ("vertice") esterno al piano della base, e congiungendo V con tutti i punti P appartenenti al contorno della base. In questo senso, le "piramidi" non sono altro che "coni" particolari.

Lo stesso dicasi per il **CILINDRO**; esistono anche **cilindri** "non retti", come quello piccolino che abbiamo messo accanto al cono qui a fianco, o cilindri la cui base non è un cerchio, ma un'altra superficie a contorno chiuso.

Va comunque detto che **la maggior parte dei testi quando parla di "cilindro" o di "cono" sottintende "circolare retto".**



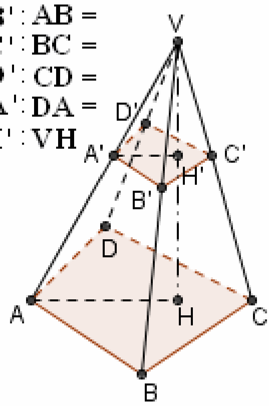
LE SEZIONI DI UNA PIRAMIDE CON PIANI PARALLELI ALLA BASE SONO POLIGONI SIMILI AL POLIGONO DI BASE,
e il RAPPORTO DI SIMILITUDINE E' UGUALE a $VH':VH$ (figura), **cioè AL RAPPORTO FRA LE DISTANZE della sezione e della base rispettivamente, DAL VERTICE della piramide.**

ANALOGAMENTE AVVIENE PER UN CONO.

Nella figura a fianco questo enunciato (che non dimostriamo) è visualizzato nel caso di una piramide a base quadrangolare.

Inoltre **il rapporto fra le *aree* della sezione e della base è uguale al rapporto fra i *quadrati* delle loro distanze** dal vertice.

$$A'B':AB = B'C':BC = C'D':CD = D'A':DA = VH':VH$$



3. IL VOLUME DI UN SOLIDO

Così come, per misurare un segmento, si prende come unità di misura un altro segmento,
e per misurare una superficie si prende come unità di misura un'altra superficie,
allo stesso modo per misurare un solido (l'"**estensione**" di un solido)
si prende come unità di misura un altro solido.

"Misurare" un solido S significa dunque

- prendere un altro solido di riferimento **U** (che farà da "unità di misura")
- e chiedersi quante volte **U** è contenuto in **S**.

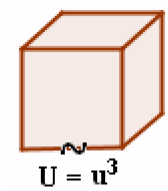
Il procedimento di misura potrà avere come risultato un numero intero, razionale o eventualmente irrazionale.
Vedi a questo proposito il capitolo sulla misura delle superfici: il discorso è perfettamente analogo.

Di solito, il calcolo della misura dell'estensione di un solido (misura che verrà chiamata "**volume**")
è richiesto in un contesto nel quale già sono stati misurati dei segmenti,
con l'utilizzo di un determinato segmento **u**, scelto come unità di misura per questi.
In tal caso, è sempre conveniente adottare come unità di misura **U** per i solidi,
il cubo avente per lato il segmento **u**. Tale cubo viene generalmente indicato col simbolo $\mathbf{u^3}$.

Insomma:

se si è scelto questo segmento come unità di misura per le lunghezze …

… per calcolare i volumi si sceglierà come unità di misura questo cubo:

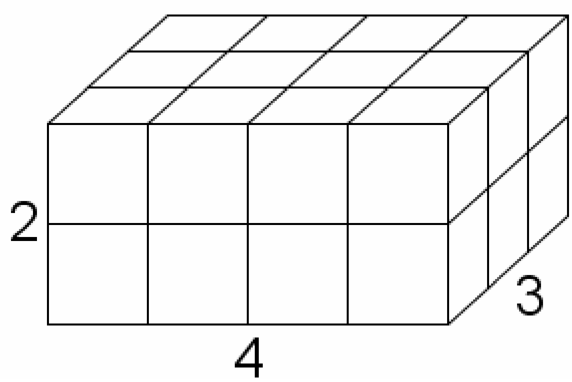


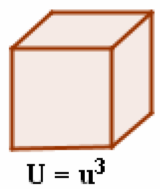
La figura sottostante è riferita ad un caso particolare; comunque, generalizzando in modo opportuno,
si dimostra facilmente che nel caso di un **parallelepipedo rettangolo** i cui lati abbiano misura intera,
la misura del volume del solido è uguale al prodotto delle misure delle tre dimensioni.

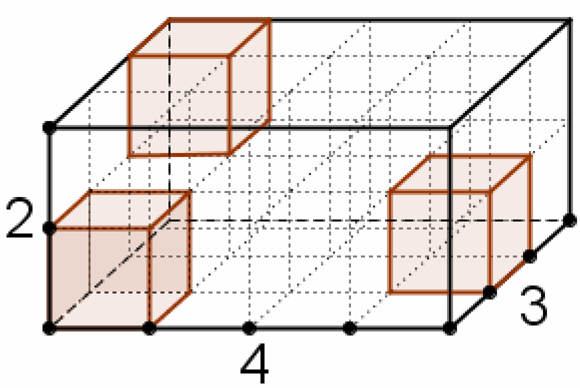
Se le misure delle dimensioni di un parallelepipedo rettangolo sono 4, 3 e 2, come in figura, si capisce che al "piano terra" ci staranno $4 \cdot 3 = 12$ cubetti di lato unitario, ma essendoci anche un "piano superiore" quindi 2 piani, in totale nel parallelepipedo potremo contare $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ cubetti unitari.

Il volume di questo parallelepipedo è perciò dato da $4 \cdot 3 \cdot 2$, ossia dal prodotto delle tre dimensioni.

Ma si può poi provare che lo stesso vale pure se le misure delle dimensioni sono, tutte o in parte, non intere (razionali, o anche irrazionali).







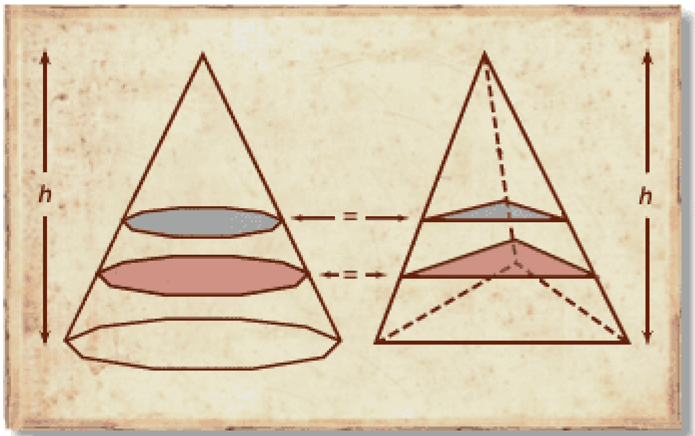
In definitiva, il **volume di un parallelepipedo rettangolo**
le cui dimensioni misurino a, b, c $(a, b, c \in \mathbb{R})$
è dato da

$$\boxed{\mathbf{V = a \cdot b \cdot c}} = (\mathbf{a \cdot b}) \cdot \mathbf{c} = \boxed{\mathbf{S_{base} \cdot altezza}}$$

4. IL PRINCIPIO DI CAVALIERI E LA SUA APPLICAZIONE AL CALCOLO DEI VOLUMI DI PRISMI, CILINDRI, PIRAMIDI E CONI

ASSIOMA: il "PRINCIPIO DI CAVALIERI" (Bonaventura Cavalieri, 1598-1647)

" Se due solidi possono essere disposti in modo tale che, sezionandoli con un fascio di piani paralleli, ciascun piano individua sui due solidi due sezioni equivalenti (= con la stessa area), allora i due solidi sono equivalenti (= hanno ugual volume) "

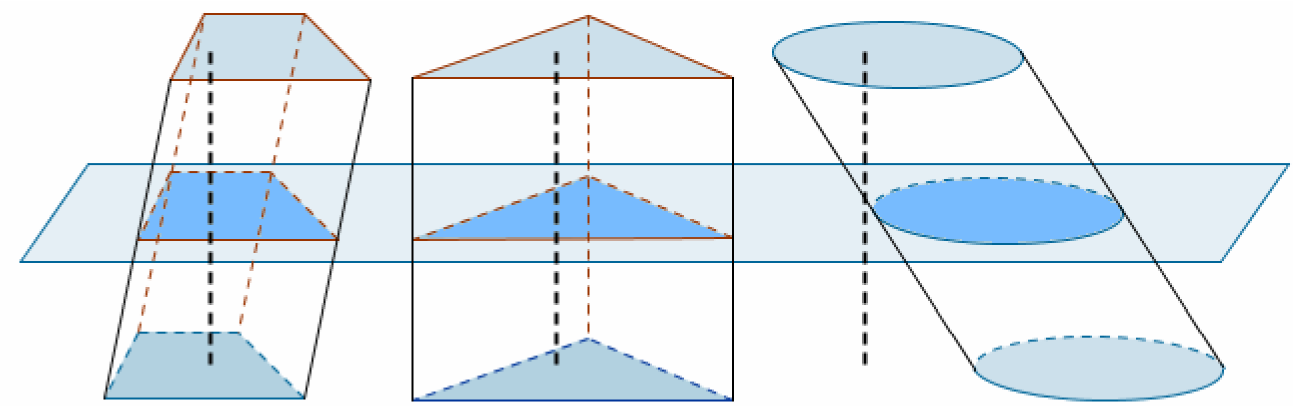


© 2000 Encyclopædia Britannica, Inc.

(*immagine opera di Anton, da Wikimedia Commons, qui utilizzata con licenza GFDL, GNU Free Documentation License*)

Teorema 1: due prismi, o un prisma e un cilindro, o due cilindri, aventi basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

Dimostrazione: per il Principio di Cavalieri.



Nella dimostrazione dell'enunciato di cui sopra occorre anche tener conto del fatto (intuitivo, ma comunque dimostrabile) che le sezioni di un prisma, o di un cilindro, con piani paralleli alle basi, sono tutte uguali (fra loro e con le basi)

CONSEGUENZE: FORMULA PER IL VOLUME DI UN PRISMA O DI UN CILINDRO

Un prisma è dunque, in particolare, equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente base equivalente e altezza uguale a quella del prisma.

E anche un cilindro è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente base equivalente e altezza uguale a quella del cilindro.

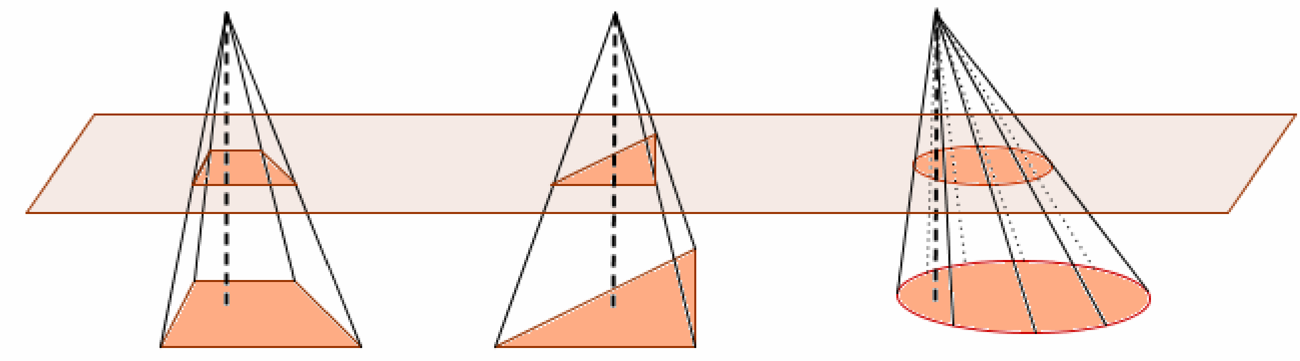
Quindi per calcolare il volume di un prisma qualsiasi o di un cilindro qualsiasi la formula da utilizzare è la stessa che abbiamo visto (paragrafo 3) valere per il parallelepipedo rettangolo, ossia

$$\boxed{V = S_{base} \cdot altezza}$$

che nel caso di un *cilindro*, retto o non retto, *a base circolare* di raggio r, diventa $\mathbf{V = \pi r^2 \cdot h}$

Teorema 2: due piramidi, o una piramide e un cono, o due coni,
aventi basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

Dimostrazione: per il Principio di Cavalieri.



Nella dimostrazione dell'enunciato di cui sopra occorre anche tener conto del fatto che
date due piramidi, o due coni, o una piramide e un cono, se i due solidi hanno ugual altezza e basi equivalenti, sezionando i due solidi con due piani aventi ugual distanza dal vertice, si ottengono sezioni fra loro equivalenti (questo è conseguenza dell'ultimo teorema del paragrafo 2).

Teorema
Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza.

Dimostrazione

Possiamo pensare di sostituire qualunque piramide assegnata, con una qualsiasi piramide *a base triangolare*, purché tale seconda piramide abbia altezza uguale e base equivalente a quella della piramide originaria. Infatti la "vecchia" piramide e quest'altra "nuova" saranno equivalenti per il precedente Teorema 2; mentre il Teorema 1 ci assicura che prismi con basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti.

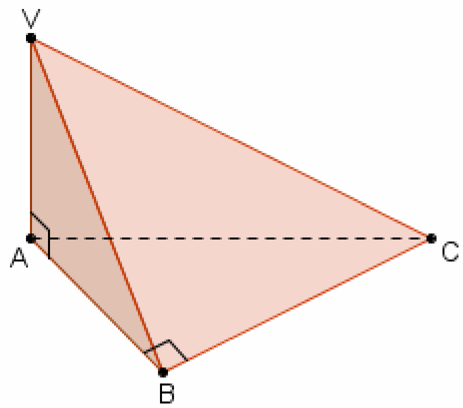
Noi supporremo che la "nuova" piramide, equivalente alla "vecchia", abbia

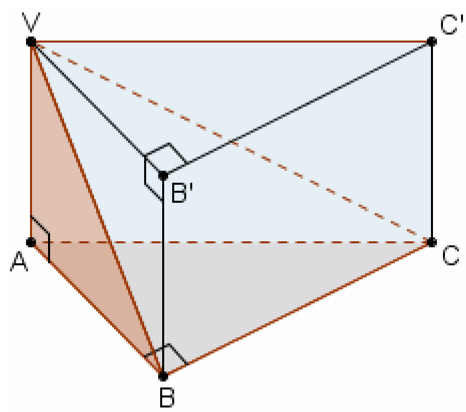
- come base un triangolo rettangolo
- e il vertice tale che la sua proiezione sul piano della base
  cada proprio nel vertice di uno degli angoli acuti del triangolo di base

(in realtà, nessuna di queste due condizioni è indispensabile per la dimostrazione,
tuttavia in questo modo la comprensione dei disegni dovrebbe probabilmente risultare meno difficoltosa).

Partiamo dunque dalla piramide ABCV della figura qui a destra, e innanzitutto costruiamo il prisma ABCC'B'V avente base ABC e altezza AV.

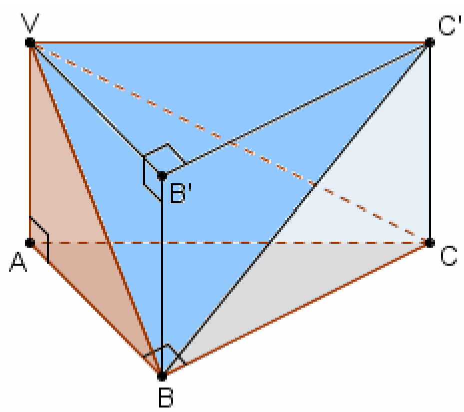
Ci proponiamo di dimostrare che la piramide ABCV è la terza parte del prisma ABCC'B'V .

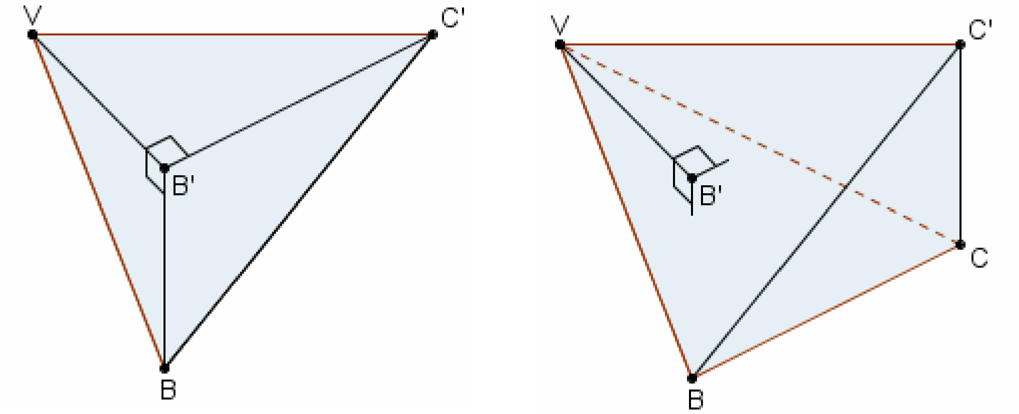




In pratica, alla piramide è stato aggiunto il solido BCC'B'V , che ha forma di piramide a base rettangolare.

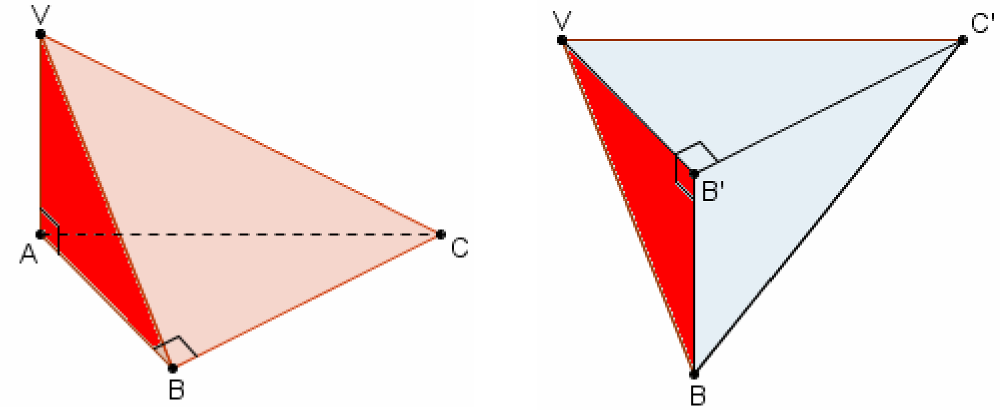
Adesso tracciamo la diagonale BC' del rettangolo BCC'B' , che è la base del solido piramidale BCC'B'V che abbiamo aggiunto alla piramide iniziale; il piano passante per i 3 punti B, C' e V divide la piramide a base rettangolare BCC'B'V in due piramidi a base triangolare, che sono BC'B'V e BCC'V . La prima è facile da visualizzare, la seconda un po' meno: penso saranno utili le due figure seguenti, che mostrano tali due piramidi singolarmente:





Nella seconda figura abbiamo lasciato anche il segmento VB', per evidenziare che esso fa da altezza per *entrambe* le piramidi se ne prendiamo come basi BC'B' e BCC' rispettivamente; ma allora, dato che i due triangoli BC'B' e BCC' sono uguali fra loro in quanto ottenuti dividendo un rettangolo con una sua diagonale, le due piramidi, per avere ugual base e uguale altezza, **sono equivalenti**.

Riconsiderando ora la piramide ABCV di partenza, scopriamo che essa è equivalente alla BC'B'V perché

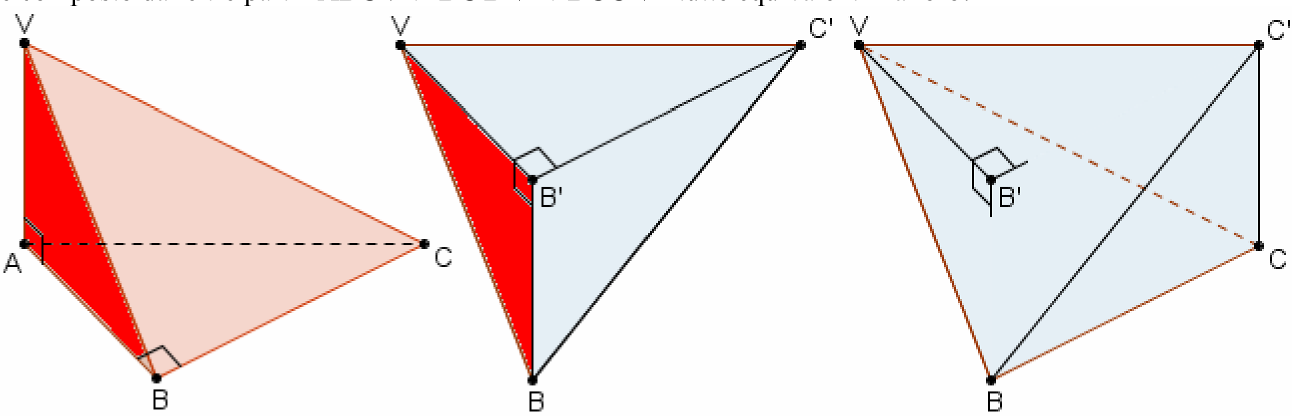


se si prendono per basi ABV e BB'V rispettivamente, le altezze corrispondenti sono CB e C'B', ed essendo

- ABV = BB'V (triangoli in cui un rettangolo viene spezzato da una diagonale)
- e CB = C'B' (lati opposti di un rettangolo),

ABCV e BC'B'V hanno ugual base e ugual altezza.

Ma allora il prisma ABCC'B'V, avente la stessa base e la stessa altezza della piramide iniziale ABCV, è composto dalle tre parti ABCV + BC'B'V + BCC'V tutte equivalenti fra loro!



Ciascuna delle tre parti è perciò 1/3 del prisma; in particolare, $ABCV = \frac{1}{3} ABCC'B'V$ e la tesi è dimostrata.

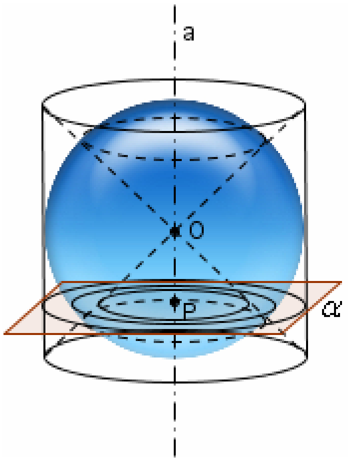
CONSEGUENZE: FORMULA PER IL VOLUME DI UNA PIRAMIDE O DI UN CONO

Poiché dunque una piramide, o un cono, hanno volume uguale a 1/3 del volume di un prisma che ha base equivalente e altezza uguale, per calcolare il volume di una piramide o di un cono la formula da utilizzare sarà

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_{base} \cdot altezza = \frac{S_{base} \cdot altezza}{3}}$$

5. IL VOLUME DELLA SFERA

Teorema: il volume di una sfera è dato da $\frac{4}{3}\pi r^3$



Dimostrazione

"Incastriamo"
(in geometria si dice: "inscriviamo")
la sfera di raggio r in un cilindro retto,
che avrà dunque il diametro delle basi e l'altezza
entrambi uguali al diametro della sfera.

I due coni aventi per vertice il centro della sfera
e aventi per basi le due basi del cilindro
formano un solido simile ad una clessidra.

Pensiamo ora **allo strano solido ottenibile
prendendo il cilindro e togliendogli i punti della clessidra:
chiameremo questo solido "anticlessidra".**

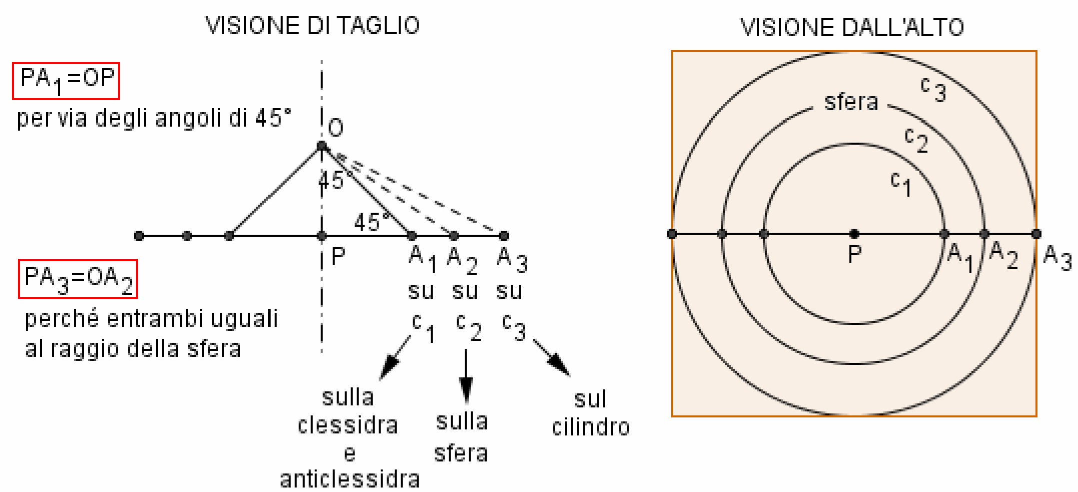
Perché mai ci interessa l' "anticlessidra"?
Perché **ci proponiamo di dimostrare che tale anticlessidra è equivalente alla sfera**!!!

Infatti, consideriamo un piano α che intersechi perpendicolarmente, all'interno del cilindro,
l'asse di simmetria a della figura.
Su tale piano

- la sfera staccherà un cerchio (avente come contorno la circonferenza *intermedia* nella figura)
- l'anticlessidra staccherà una corona circolare (compresa fra le circ. *più interna* e *più esterna* della figura).

Ci basterà perciò dimostrare che il cerchio e la corona circolare sono equivalenti,
per poter affermare, grazie al Principio di Cavalieri, l'equivalenza fra la sfera e l'anticlessidra.

A tale scopo, immaginiamo di guardare la figura "di taglio", con gli occhi giusto all'altezza del piano α.



$$\textit{Area cerchio entro } c_2 = \boxed{\pi \cdot \mathrm{PA}_2^{\,2}}$$

$$\textit{Area corona tra } c_1 \textit{ e } c_3 = \pi \cdot \mathrm{PA}_3^{\,2} - \pi \cdot \mathrm{PA}_1^{\,2} = \pi \cdot \left(\mathrm{PA}_3^{\,2} - \mathrm{PA}_1^{\,2}\right) \overset{\text{NOTA}}{=} \pi \cdot \left(\mathrm{OA}_2^{\,2} - \mathrm{OP}^2\right) \overset{\text{PITA-GORA}}{=} \boxed{\pi \cdot \mathrm{PA}_2^{\,2}}$$

NOTA: $\mathrm{PA}_3 = \mathrm{OA}_2,\ \mathrm{PA}_1 = \mathrm{OP}$ (vedi annotazioni sulla figura)

Allora per calcolare il volume della sfera basterà calcolare il volume dell'anticlessidra,
a sua volta uguale alla differenza fra il volume del cilindro e quello della clessidra.

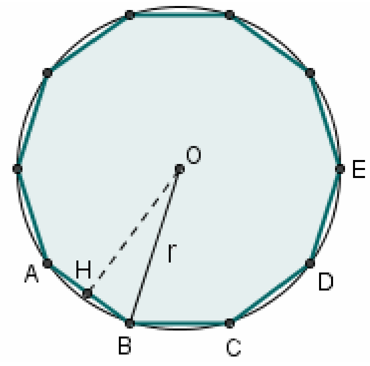
$$\boxed{\textit{Volume sfera}} = \boxed{\textit{Volume anticlessidra}} = \textit{Volume cilindro} - \textit{Volume clessidra} =$$
$$= \textit{Volume cilindro} - 2 \cdot \textit{Volume di un cono} =$$
$$= \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{6-2}{3}\pi r^3 = \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

6. AREE DI SUPERFICI DI SOLIDI DI ROTAZIONE

Ci occuperemo solo di un caso particolarmente semplice, che tuttavia dovrebbe essere istruttivo:
la superficie laterale di un cono circolare retto.

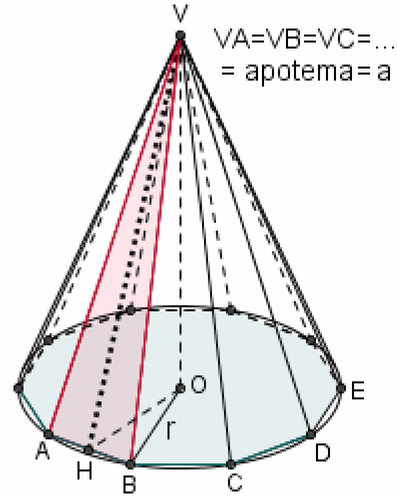
Sia dato un cono circolare retto, il cui cerchio di base abbia raggio di misura r, e il cui apotema misuri a.

Immaginiamo di inscrivere nella circonferenza di base un poligono regolare …



… dopodiché, congiungeremo i vertici del poligono col vertice del cono.

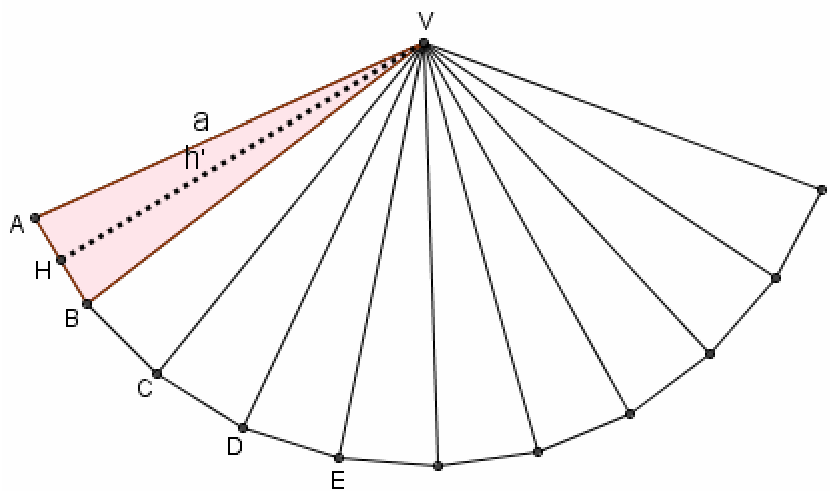
In tal modo, la superficie laterale del nostro cono sarà approssimata da un insieme di triangoli: l'approssimazione sarà tanto più precisa, quanto più numerosi saranno i triangoli. →



Una superficie è un insieme di punti; per "area" si intende "quel numero che misura l'estensione di una superficie". Tuttavia, sovente si dice "*superficie*" col significato di "*area di una superficie*".

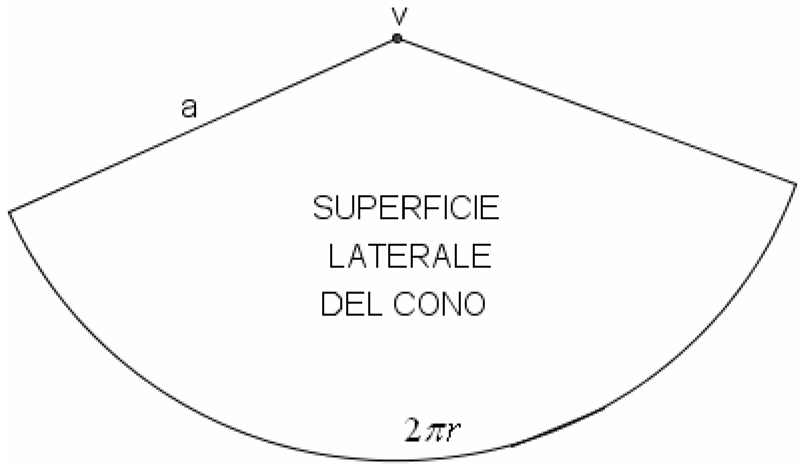
Nel nostro caso, il poligono inscritto era un decagono, e la superficie laterale del cono ne è risultata approssimata nel modo illustrato dalla figura sottostante, da cui si trae:

$$\text{approssimazione sup.lat.cono} =$$
$$= \text{somma aree triangoli} =$$
$$= \frac{AB \cdot h'}{2} + \frac{BC \cdot h'}{2} + \frac{CD \cdot h'}{2} + \ldots =$$
$$= \frac{(AB + BC + CD + \ldots) \cdot h'}{2} =$$
$$= \frac{perimetro_{poligono} \cdot h'}{2}$$
$$(h' = VH)$$



dove $h' = VH$ *non* è esattamente l'apotema del cono, ma differisce ben poco da esso, e anzi sarebbe ancora più prossimo all'apotema $a = VA$ del cono se i lati del poligono, anziché 10, fossero 1000 o 1000000.

Se il poligono avesse un numero *grandissimo* di lati, l'approssimazione si farebbe *estremamente* precisa e avremmo una situazione tendente a quella a fianco raffigurata, dove il raggio del settore circolare è uguale all'apotema del cono e al posto della spezzata ABCDE … (=perimetro del poligono inscritto) abbiamo un arco di circonferenza di lunghezza uguale alla lunghezza $2\pi r$ della circonferenza di base del cono.



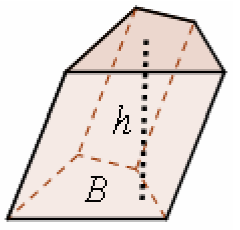
Tutto ciò ci porta a stabilire in definitiva che la superficie laterale del nostro cono è

$$\frac{2\pi r \cdot a}{2} = \boxed{\pi r a},$$ essendo *r* il raggio di base, e *a* l'apotema del cono.

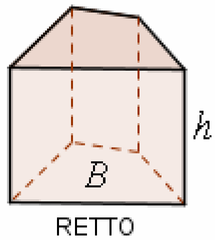
7. SPECCHIETTO DELLE FORMULE STUDIATE; ALTRE FORMULE

Lunghezza di una circonferenza = $2\pi r$ Area di un cerchio = πr^2 $\pi = 3{,}14159...$

Volume di un parallelepipedo o di un prisma =
$= S_{base} \cdot h$

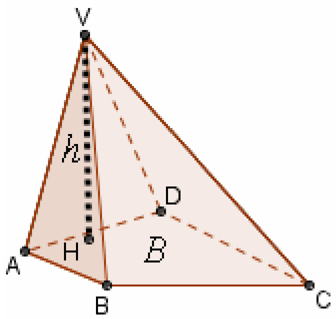


Superficie laterale di un prisma RETTO =
$= \ perimetro_{base} \cdot h$



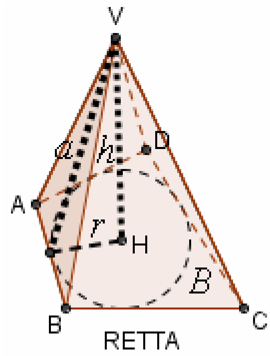
Un prisma è RETTO quando gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.

Volume di una piramide =
$$= \frac{S_{base} \cdot h}{3}$$



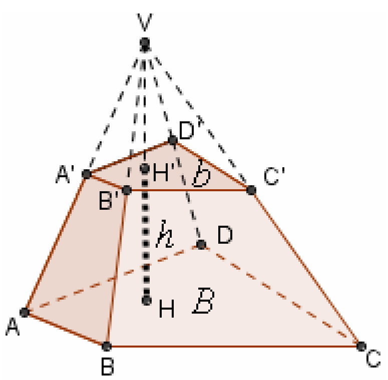
Una piramide è equivalente (come volume) alla *terza parte* di un prisma di uguale base e uguale altezza.

Superficie laterale di una piramide RETTA=
$$= \frac{perimetro_{base} \cdot apotema}{2}$$



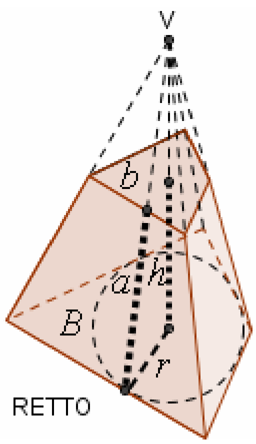
Una piramide è RETTA quando la base è un poligono circoscrivibile a un cerchio, e la proiezione del vertice sul piano della base cade proprio nel centro di questo cerchio.

Volume di un tronco di piramide =
$$\frac{\left(B + b + \sqrt{Bb}\right) \cdot h}{3}$$ *(B, b aree delle basi;* $h =$ HH')



Se non si ricorda la formula si può ricavare il volume come differenza fra i volumi di due piramidi; per calcolare le altezze di queste si potrà tener conto del teorema nel riquadro in fondo al paragrafo 2.

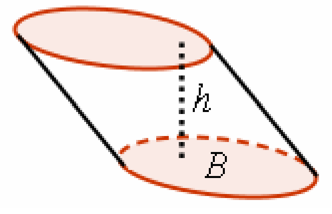
Superficie laterale di un tronco di piramide RETTA =
$$\frac{\left(perimetro\ base\ magg. + perimetro\ base\ min.\right) \cdot a}{2}$$



a indica l'apotema del *tronco*, differenza fra gli apotemi delle due piramidi.

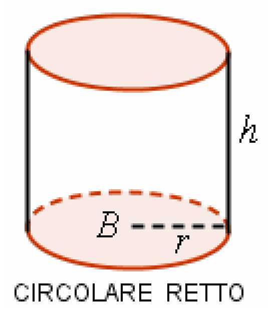
Se non si ricorda la formula si può operare per differenza fra le superfici laterali di due piramidi.

Volume di un cilindro = $S_{base} \cdot h$



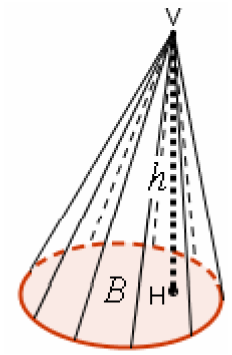
NOTA:
Di norma i testi, parlando di *cilindro*,
intendono riferirsi a
quello che noi chiamiamo *cilindro circolare retto*

Volume di un cilindro CIRCOLARE RETTO = $\pi r^2 h$
Sup. lat. di un cilindro CIRCOLARE RETTO = $2\pi r \cdot h$



Un cilindro è CIRCOLARE RETTO quando le basi sono cerchi, e la superficie laterale è costituita da segmenti perpendicolari ai piani delle basi.

Volume di un cono = $\dfrac{S_{base} \cdot h}{3}$

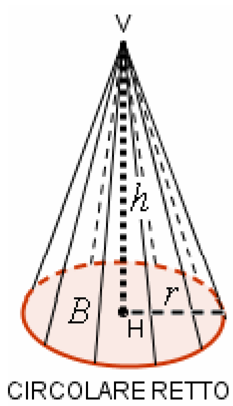


Un cono è equivalente (come volume)
alla *terza parte* di un cilindro
di uguale base e uguale altezza.

NOTA:
Di norma i testi, parlando di *cono*,
intendono riferirsi a
quello che noi chiamiamo *cono circolare retto*

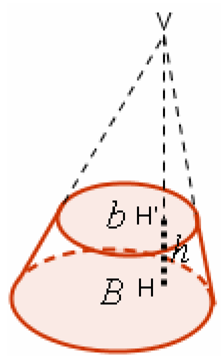
Volume di un cono CIRCOLARE RETTO = $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Superficie laterale di un cono CIRCOLARE RETTO =
$= \dfrac{2\pi r \cdot a}{2} = \pi r a$



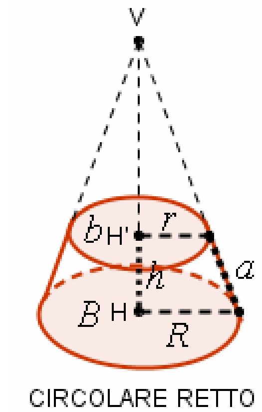
Un cono è CIRCOLARE RETTO quando la base è un cerchio, e la proiezione del vertice sul piano della base cade proprio nel centro di questo cerchio.

Volume di un tronco di cono = $\dfrac{\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)}{3}$



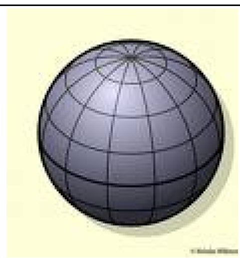
(ma è ricavabile anche
come differenza fra i volumi di due coni)

Superficie laterale di un tronco di cono
CIRCOLARE RETTO = $\pi(R + r)a$



Volume di una sfera = $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

"Della sfera il volume qual è?
Quattro terzi pi greco erre tre"



Superficie di una sfera = $4\pi r^2$

La superficie di una sfera è
4 volte quella di un suo cerchio massimo

Immagine dal sito
http://soho-modern.com/circles.pps
di Stephen Hu

8. ESERCIZI (risposte alle pagg. 344 -345)

1) Per 3 punti distinti, non allineati, passa un piano e uno solo.
E se i tre punti distinti fossero invece allineati, per essi quanti piani passerebbero?

2) Come mai dal fatto che per 3 punti distinti, non allineati, passa un piano e uno solo, discende come conseguenza che *due rette incidenti individuano un piano e uno solo*?

3) Un icosaedro ha 20 facce e 30 spigoli. Quanti vertici ha?

4) "In una piramide qualsiasi (anche non retta), detti V il vertice, AB un lato della base, H la proiezione di V sul piano della base, e K la proiezione di H su AB, si ha che VK è l'altezza del triangolo VAB": dimostra questo enunciato (*figura*).

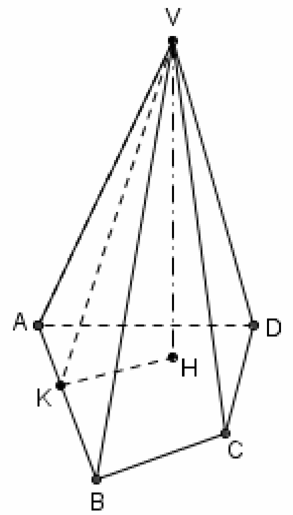


Figura 4 - Una piramide

5) Quanto misura la diagonale di un cubo di lato unitario?

Indicazione (con riferimento alla figura): traccia BD e BH; ora, HD è perpendicolare a BD: perché? Pitagora 2 volte.

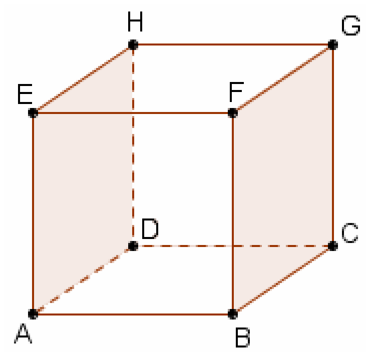
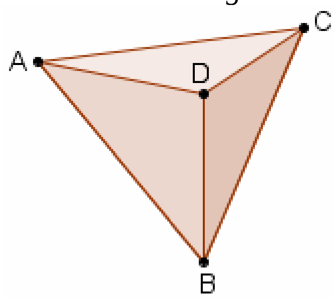


Figura 5 - Un cubo

6) Se un tetraedro regolare ha lato di lunghezza 1, quanto misura la sua altezza?

Indicazione: immagina di sezionare il tetraedro regolare con un piano che passi per uno degli spigoli, e sia perpendicolare a un altro spigolo; otterrai un triangolo; quanto misurano i suoi lati? Poi …

Figura 6 - Un tetraedro regolare



7) Completa le parti mancanti, indicate coi puntini di sospensione.

Teorema riguardante la sezione di una piramide con un piano parallelo alla base

"Se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base, la sezione è un poligono simile al poligono che fa da base per la piramide. Inoltre, i lati corrispondenti (e i perimetri) di questi due poligoni simili stanno fra loro come le rispettive distanze dal vertice della piramide, e le aree stanno fra loro come i quadrati di tali distanze".

Dimostrazione

Nella figura qui a fianco, $A'B'C'D'$ è il poligono sezione della piramide con un piano parallelo alla base ABCD.

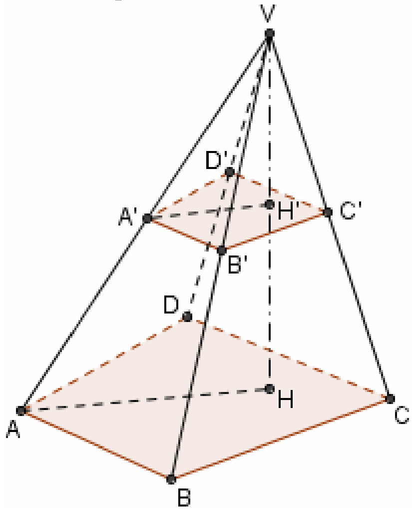
Dico che il poligono $A'B'C'D'$ è simile al poligono ABCD. Infatti: i segmenti $A'B'$ e AB sono paralleli, in quanto le rette su cui giacciono stanno su due piani paralleli e pertanto non possono avere punti comuni.

Ma allora i due triangoli $VA'B'$ e VAB sono simili perché … e quindi
$A'B' : AB = VA' : VA = VB' : VB$.

Ora per la similitudine (stesso motivo) di $VB'C'$ e VBC si ha pure
$VB' : VB = VC' : VC = B'C' : BC$
e ne consegue $A'B' : AB = B'C' : BC$.

Continuando in modo analogo, si dimostra che è
$A'B' : AB = B'C' : BC = C'D' : CD = D'A' : DA$
quindi i poligoni $A'B'C'D'$ e ABCD hanno i lati in proporzione.

Per poter concludere che sono simili occorre ancora far vedere che …



Ma in effetti è $A'\widehat{B'}C' = A\widehat{B}C$ perché hanno i lati paralleli e concordi (si può dimostrare che il teorema, da noi visto sul piano, vale pure nello spazio) e analogamente per le altre coppie di angoli corrispondenti.

E così la similitudine è dimostrata.

La proporzione $A'B' : AB = VH' : VH$ (e analogamente per le altre coppie di lati corrispondenti) si giustifica considerando ora la similitudine dei triangoli … con le considerazioni seguenti: …
Infine, è noto che i perimetri di due triangoli simili stanno fra loro come … e quindi nel nostro caso come … mentre le aree stanno fra loro come … e quindi nel nostro caso come …

8) Una piramide retta ha per base un esagono regolare di lato 1, e ha altezza 2. Calcola spigolo laterale e apotema.

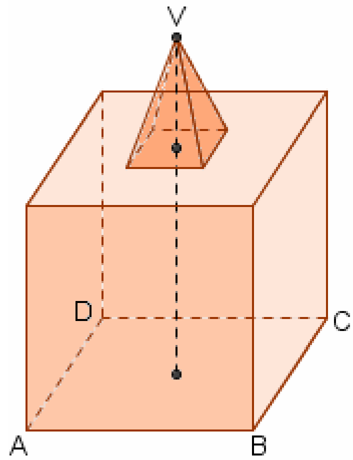
9) Una piramide retta ha per base un triangolo equilatero di lato 1, e ha altezza pure uguale a 1. Calcola spigolo laterale e apotema.

10) Quanto distano due vertici opposti di un ottaedro regolare di spigolo unitario?

11) Una piramide retta la cui base è un quadrato il cui lato misura 2 ha altezza anch'essa uguale a 2. Stabilisci quanto misurano: a) lo spigolo laterale b) l'apotema c) il lato del cubo inscritto

12) Una piramide viene intersecata da un piano, parallelo alla base, che taglia l'altezza in due parti delle quali quella contenente il vertice è 1/3 dell'altra. Se l'area della base della piramide misura *B*, quanto misura l'area della sezione?

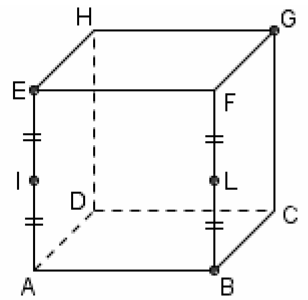
13) Un cubo di lato 2 ha in comune la base ABCD con una piramide retta di altezza 3. La piramide spunta perciò fuori dal cubo. E' richiesto di determinare il volume di questo solido, e la sua superficie totale (*vedi figura qui a fianco*).



14) Di un tronco di cono si suppongono note: l'area *B* della base maggiore, l'area *b* della base minore, la misura *h* dell'altezza. Ricava le altezze delle due piramidi di cui il tronco è la differenza e deduci da tutto ciò la formula per il volume del tronco di piramide, riportata al paragrafo precedente.

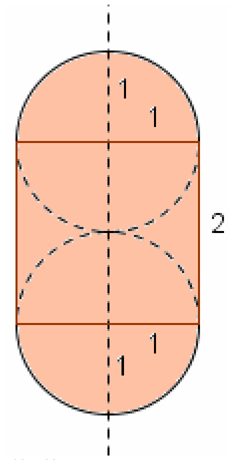
15) Tagliando una piramide con un piano, a metà della sua altezza, si ottiene un tronco di piramide. Qual è il rapporto fra il volume del tronco e quello della piramide intera? La risposta dipende dalla forma della piramide?

16) La figura qui sotto rappresenta un cubo di lato 1. Trova i volumi dei due solidi ottenibili tagliando il cubo con il piano passante
 a) per i tre punti B, E, G
 b) per i tre punti I, L, C

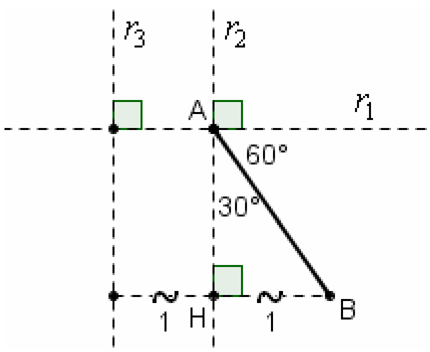


17) Dal vertice A di un triangolo equilatero ABC di lato 1 si alza un segmento AD perpendicolare al piano ABC, e di lunghezza 1. Trova volume e superficie totale del tetraedro ABCD e spiega perché *non* si tratta di una piramide retta sulla base ABC.

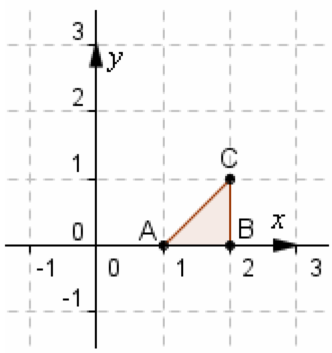
18) Calcola volume e superficie totale del solido a forma di pastiglia che si ottiene ruotando di un giro completo intorno all'asse tratteggiato, la superficie raffigurata, composta da un quadrato di lato 2 più due semicerchi di diametro 2.



19) Il segmento AB viene ruotato di un giro completo intorno alla retta r_1. Determina l'area della superficie di rotazione. Stesso quesito con riferimento a r_2, r_3.



20) Calcola il volume del solido ottenibile ruotando il triangolo ABC intorno a) all'asse *x* b) all'asse *y*

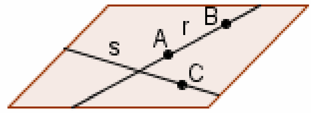


21) Determina il lato del cubo inscritto in una piramide regolare con base quadrata, nella quale il lato del quadrato di base abbia misura *a* e l'altezza abbia misura *h*.

RISPOSTE

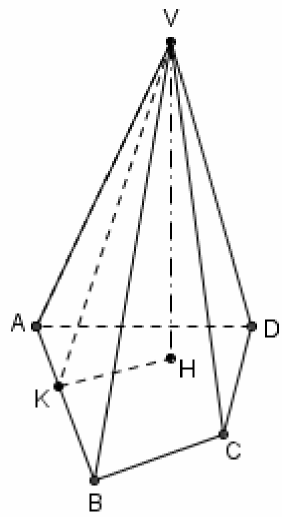
1) Per 3 punti allineati passano infiniti piani.

2) Perché su una delle rette possiamo prendere 2 punti qualsiasi A e B, e sull'altra un terzo punto C (purché non sia proprio l'intersezione fra le due) e avremo quindi 3 punti non allineati, per i quali passerà 1 e 1 solo piano, su cui le 2 rette giaceranno completamente perché se 2 punti di una retta appartengono ad un piano, vi appartengono di certo anche tutti gli altri punti della retta.

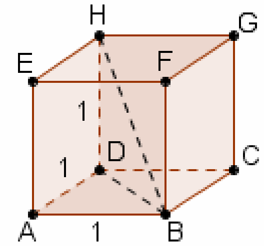


3) f+v = s+2 (formula di Eulero) da cui, nel caso di un icosaedro (s=30, f=20), v = s+2−f = 30+2−20=12.

4) Nella situazione della figura, VK è l'altezza del triangolo VAB per il Teorema delle 3 perpendicolari. Infatti VH è perpendicolare al piano ABCD, e dal piede H di questa perpendicolare parte una seconda retta, la HK, che è perpendicolare ad una terza retta, la AB, giacente su quel piano: ma allora questa terza retta, secondo il teorema citato, è perpendicolare al piano individuato dalle prime due, che è poi il piano VHK:
e ciò significa che AB è perpendicolare a tutte le rette di VHK passanti per K, quindi è perpendicolare anche a VK, come volevasi dimostrare.

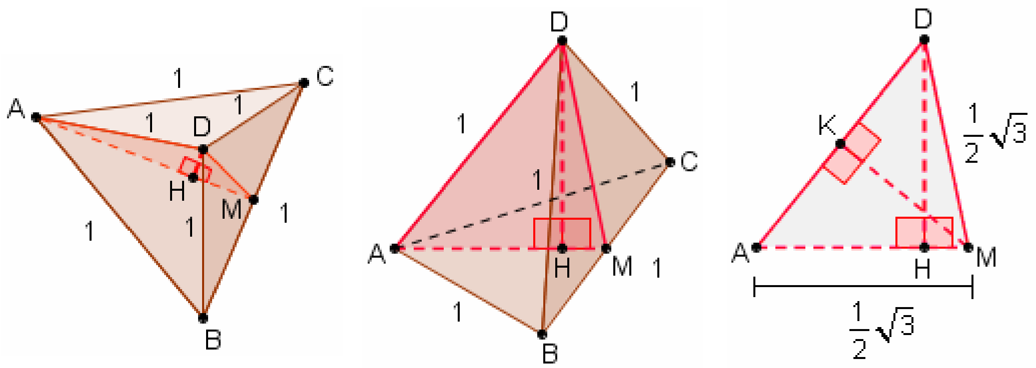


5) Innanzitutto, con riferimento alla figura, HD è perpendicolare a BD perché HD è perpendicolare, in D, alle due rette DA e DC, ma allora sarà perpendicolare a tutte le rette del piano da esse individuato, passanti per D: e BD è una di queste.
Ora $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
e $HB = \sqrt{HD^2 + BD^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$



6) Se un tetraedro regolare ha lato di lunghezza 1, quanto misura la sua altezza?

DM e AM, altezze di triangoli equilateri di lato 1, misurano ciascuno $\frac{1}{2}\sqrt{3}$



Con riferimento alla figura più a destra, possiamo calcolare l'altezza DH procedendo ad esempio così: calcoliamo l'area del triangolo AMD prendendo come base AD e come altezza MK:

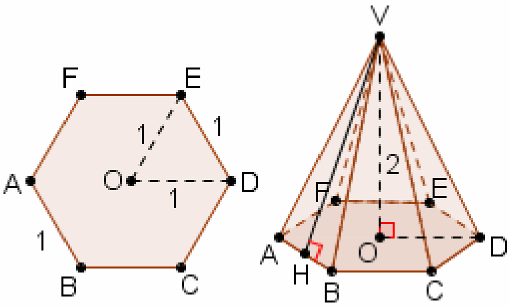
$$MK = \sqrt{DM^2 - DK^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad S_{AMD} = \frac{AD \cdot MK}{2} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

dopodiché, prendendo invece come base AM e come altezza DH: $DH = \frac{2S_{AMD}}{AM} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

7) $VA'B'$ e VAB sono simili perché *hanno gli angoli rispettivamente uguali (uno in comune, due coppie di corrispondenti rispetto a parallele con trasversale)* o anche: *per il Corollario del 1° Crit. di Similitudine.*
Per poter concludere che sono simili occorre ancora far vedere che *hanno gli angoli rispettivamente uguali.*
La proporz. $A'B' : AB = VH' : VH$ si giustifica considerando ora la similitudine dei triangoli $VH'A'$, VHA con le considerazioni seguenti: *tale similitudine ci dice che* $VA' : VA = VH' : VH$ *, ma sapevamo che era* $VA' : VA = A'B' : AB$ *quindi ne deduciamo che* $A'B' : AB = VH' : VH$.
Infine, è noto che i perimetri di due triangoli simili stanno fra loro *come due lati omologhi* e quindi nel nostro caso come $VH' : VH$ mentre le aree *come i quadrati di due lati omologhi* $\left(VH'^2 : VH^2\right)$.

8) $\textit{spigolo laterale} = \mathrm{VD} = \sqrt{\mathrm{OD}^2 + \mathrm{VO}^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\textit{apot.} = \mathrm{VH} = \sqrt{\mathrm{VB}^2 - \mathrm{HB}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$



9) $\textit{spigolo laterale} = \frac{2}{\sqrt{3}};\ \ \textit{apotema} = \sqrt{\frac{13}{12}}$

10) $\sqrt{2}$

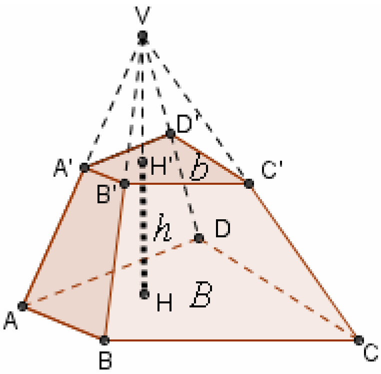
11) $\textit{spigolo laterale} = \sqrt{6};\ \ \textit{apotema} = \sqrt{5};\ \ \ell = 1$

12) $\frac{1}{16}B = \frac{B}{16}$

13) $\textit{Volume} = 8 + \frac{4}{27} = \frac{220}{27}$ $\quad$ $\textit{Sup. totale} = 4 \cdot 6 - \frac{4}{9} + \frac{\frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3}}{2} = 24 - \frac{4}{9} + \frac{4\sqrt{10}}{9} = \frac{212 + 4\sqrt{10}}{9} = \frac{4}{9}\left(53 + \sqrt{10}\right)$

14)

$\mathrm{VH}' = x,\ \ \mathrm{VH} = x + h$.



E' noto (teorema sulle sezioni di una piramide con piani paralleli alla base, paragrafo 2, ripreso poi nell'esercizio 7 di questa rassegna), che vale la proporzione $b : B = \mathrm{VH}'^2 : \mathrm{VH}^2$

quindi si avrà $b : B = x^2 : (x+h)^2$ da cui

$Bx^2 = b(x+h)^2$ ...

$(B-b)x^2 - 2bhx - bh^2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{bh \pm \sqrt{b^2h^2 + (B-b)bh^2}}{B-b} = \frac{bh \pm \sqrt{Bbh^2}}{B-b} = h\frac{b \pm \sqrt{Bb}}{B-b}$$

Delle due soluzioni quella col "–" è <0 $\left(B > b \textit{ e quindi } \sqrt{Bb} > \sqrt{b^2} = b\right)$ e perciò non accettabile.

Resta l'altra, che porta a

$$\mathrm{VH}' = h\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b}; \qquad \mathrm{VH} = \mathrm{VH}' + h = h\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b} + h = \frac{h\sqrt{Bb} + \cancel{bh} + Bh - \cancel{bh}}{B-b} = h\frac{\sqrt{Bb}+B}{B-b}$$

per cui il volume del tronco, differenza dei volumi delle due piramidi, sarà

$$\frac{B \cdot h\frac{\sqrt{Bb}+B}{B-b}}{3} - \frac{b \cdot h\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b}}{3} = \frac{Bh\frac{\sqrt{Bb}+B}{B-b} - bh\frac{\sqrt{Bb}+b}{B-b}}{3} = \frac{Bh\sqrt{Bb} + B^2h - bh\sqrt{Bb} - b^2h}{3(B-b)} =$$

$$= \frac{h\sqrt{Bb}\,(B-b) + h\left(B^2 - b^2\right)}{3(B-b)} = \frac{h\sqrt{Bb}\cancel{(B-b)} + h(B+b)\cancel{(B-b)}}{3\cancel{(B-b)}} = \frac{\left(B + b + \sqrt{Bb}\right)h}{3}$$

che è proprio la formula riportata nel paragrafo precedente a questo.

15) Il rapporto è 7/8; no, la risposta è *indipendente* dalla forma della piramide

16) *a)* 1/6, 5/6 *b)* 1/4, 3/4

17) $\mathrm{V} = \frac{\sqrt{3}}{12};\ \ \mathrm{S}_{\mathrm{TOT.}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7} + 4}{4}$ Sarebbe stata retta se la proiezione del vertice sulla base fosse stato il *centro* della base stessa, non un suo vertice

18) $\mathrm{V} = \frac{10}{3}\pi;\ \ \mathrm{S}_{\mathrm{TOT.}} = 8\pi$ $\quad$ 19) *a)* $\mathrm{S} = 2\pi\sqrt{3}$ *b)* $\mathrm{S} = 2\pi$ *c)* $\mathrm{S} = 6\pi$

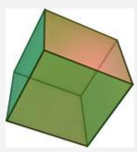
20) *a)* $\mathrm{V} = \frac{\pi}{3}$ *b)* $\mathrm{V} = \frac{5}{3}\pi$ $\quad$ 21) $\textit{lato cubo inscritto} = \frac{ah}{a+h}$

Euler's Formula
For any polyhedron
***that doesn't intersect itself,* the**

- **Number of Faces**
- plus the **Number of Vertices** (corner points)
- minus the **Number of Edges**

always equals 2.
This can be written: **F + V - E = 2**

Try it on the cube:
a cube has
6 Faces, 8 Vertices, and 12 Edges,
so: 6 + 8 - 12 = 2



www.mathsisfun.com

Altri esercizi (risposte a pagina 347)

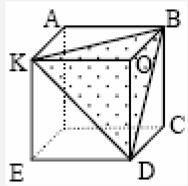
Da www.mathvisuals.com

1) The length, the width and the altitude of a rectangular prism are directly proportional by 3, 4 and 5. If the diagonal of the rectangular prism is $\sqrt{200}$ cm, find the total surface (cm^2)

A) 480 B) 462 C) 564 D) 376 E) 188

2) Find the ratio between the volume of the pyramid BKDO and the cube

A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$



3) The volumes of a cylinder and a sphere with equal radii r are equal. Find the altitude of the cylinder in terms of r.

A) $4r$ B) $2r$ C) $4/3$ D) $r/3$ E) $4r/3$

4) The sum of the base areas of a cylinder is equal to the area of the lateral face. If the altitude of the cylinder is 2 cm, find the volume (cm^3)

A) 8π B) 6π C) 4π D) 2π E) π

5) If the areas of the lateral faces of a right rectangular prism are $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ and $2\sqrt{6}$ cm^2 find the volume of this prism (cm^3)

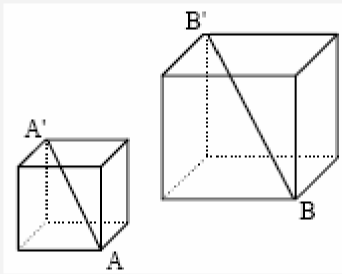
A) $\sqrt{6}$ B) 5 C) $2\sqrt{6}$ D) 6 E) 8

6) A sphere is inscribed in a cylinder. Let C and S denote the lateral area of the cylinder and surface area of the sphere respectively then …

A) C=2S B) 2C=S C) C=3S D) 3C=S E) C=S

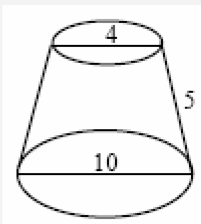
7) In the given figures, $AA'=1$ cm and $BB'=3$ cm. Find the ratio of the volumes of the cubes.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{27}$ E) $\frac{1}{81}$



8) The radii of the frustum of cone are 2 and 5 cm. If the lateral side of the cone is 5 cm, then find the volume of the cone.

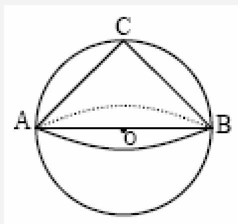
A) 38π B) 40π C) 50π D) 52π E) 56π



Frustum of cone: tronco di cono

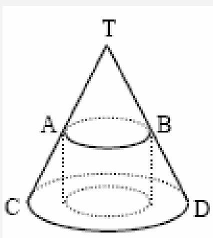
9) In the given figure, what is the ratio between the volume of the sphere and the volume of the cone?

A) 2 B) $2\frac{1}{2}$ C) 3 D) $3\frac{1}{2}$ E) 4



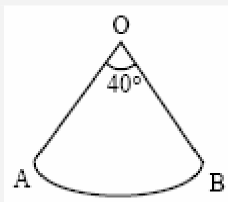
10) A right cylinder is inscribed inside a right cone. If the volume of the frustum of the cone ABCD is 26 times the volume of the small cone TAB, find the ratio between the volume of the frustum of the cone and the cylinder.

A) 3 B) 4 C) $\frac{13}{2}$ D) $\frac{13}{3}$ E) $\frac{26}{3}$

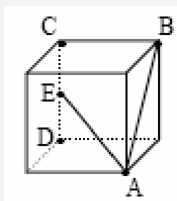


11) By using the sector given in the figure, a right cone is formed. If the altitude of the cone is $16\sqrt{5}$ cm, find the lateral area of the cone (in cm^2)

A) 144π B) 160π C) 360π D) 800π E) 1800π



12) Se conosci un certo teorema di trigonometria, potrai determinare la misura dell'angolo $B\hat{A}E$ (E è il punto medio di CD, il solido è un cubo)



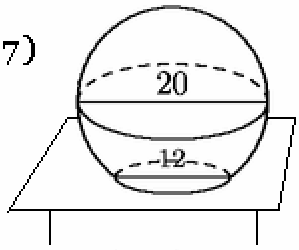
Da www.sparknotes.com

13) A right triangle with legs 5 and 12 is rotated about the longer leg.
What is the surface area of the solid formed?
(A) 36π cm^2 (B) 60π cm^2 (C) 90π cm^2 (D) 112π cm^2 (E) 114π cm^2

14) A cylinder's radius is equal to its height. If its surface area is 100π cm^2, what is its volume?
(A) 25π cm^3 (B) 50π cm^3 (C) 100π cm^3 (D) 125π cm^3 (E) 625π cm^3

15) Cone A has volume 24. When its radius and height are multiplied by the same factor, the cone's surface area doubles. What is cone A's new volume?
(A) $24\sqrt{2}$ (B) 48 (C) $48\sqrt{2}$ (D) 96 (E) Not enough information to tell

16) A cylinder is inscribed in a sphere. If the radius of the sphere is 5 and the height of the cylinder is 8, then what is the volume of the cylinder? (A) 80 (B) 110.82 (C) 187.25 (D) 226.19 (E) 267.30

17)


18)


Olimpiada Mexicana de matematicas - Problemas introductorios

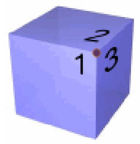
17) Un tavolino ha un buco circolare del diametro di 12 cm. Sul buco si piazza una sfera il cui diametro è 20 cm. Se il piano del tavolino è alto 30 cm, qual è la distanza in centimetri dal punto più alto della sfera al pavimento?
(A) 40 cm (B) 42 cm (C) 45 cm (D) 48 cm (E) 50 cm

18) Un poliedro a forma di pallone di football ha 32 facce, delle quali 20 sono esagoni regolari e 12 pentagoni regolari. Quanti vertici ha il poliedro?
(A) 72 (B) 90 (C) 60 (D) 56 (E) 54

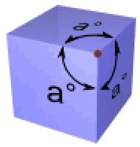
British Columbia Secondary School Mathematics Contest, 2009

19) Un blocco di legno di 6 cm X 12 cm X 22 cm è pitturato in rosso e poi tagliato in cubetti la cui superficie totale è di 6 cm^2.
Il numero di cubetti con esattamente 2 facce colorate è
(A) 136 (B) 144 (C) 152 (D) 156 (E) 160

I solidi platonici sono solo 5. Perché?

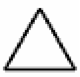
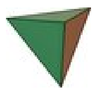
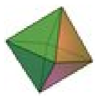
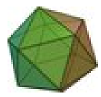
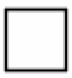
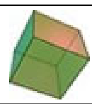
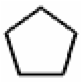
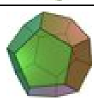


In ogni vertice di un poliedro concorrono 3 o più facce: comunque, almeno 3; e in un poliedro regolare (= platonico) queste facce sono poligoni regolari, quindi gli angoli in gioco sono tutti uguali fra loro, e sono angoli interni di poligoni regolari, ossia di: triangoli equilateri, o quadrati, o pentagoni regolari …



Bene: addizionando le misure degli angoli che concorrono in un vertice di un poliedro, quindi anche di un poliedro regolare, si ottiene sempre una somma inferiore ai 360°
(te ne puoi convincere in modo intuitivo se pensi che, qualora tale somma raggiungesse i 360°, la figura si appiattirebbe …)

Ma allora in un vertice di poliedro regolare possono concorrere soltanto:

	3 triangoli equilateri (3×60°=180°) 4 triangoli equilateri (4×60°=240°) 5 triangoli equilateri (5×60°=300°)		tetraedro		ottaedro		icosaedro
	3 quadrati (3×90°=270°)		cubo				
	3 pentagoni regolari (3×108°=324°)		pentadodecaedro				

Le figure di questa pagina sono tratte da www.mathsisfun.com

Altre possibilità non ce ne sono, perché ad esempio un esagono regolare ha gli angoli interni tutti di 120°, e al minimo in ogni vertice avremmo dunque una somma uguale a 3×120°=360°, già non ammissibile; un eptagono regolare ha poi gli angoli interni ancora più grandi, di 900/7 di grado ossia circa 128,57 gradi: tre di questi angoli, sommati, supererebbero già i 360° …

RISPOSTE agli esercizi: 1D2E3E4A5C6E7D8D9E10D11A 12: 45° (*) 13C14D15C16D17D18C19A
(*) teorema del Coseno su BAE, i cui lati, posto uguale a 1 il lato del cubo, misurano risp. $\sqrt{2}, 3/2, \sqrt{5}/2$