GEORG CANTOR (1845-1918) E I "GRADI DI INFINITO"

Il sommo matematico Hilbert descrisse l'opera di Cantor come

"... il prodotto più raffinato del genio matematico e una delle conquiste più alte del puro intelletto"

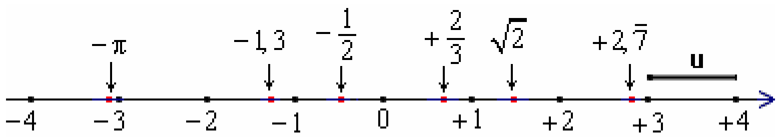
Le poche pagine che seguono vogliono essere una breve introduzione
alle affascinanti intuizioni di questo brillante e innovativo pensatore.

1)
RIPASSO: INSIEMI E SOTTOINSIEMI
Cos'è un "insieme"?
E' un "gruppo", una "raccolta", di oggetti (concreti o astratti, non importa se della stessa natura oppure no).
Questi sono chiamati "gli elementi" dell'insieme considerato.
Si scrive $x \in \mathrm{A}$ per indicare che l'elemento x "appartiene" all'insieme A.
Un "sottoinsieme" B di un insieme A è una "parte" di A; è un insieme tale che, se $x \in \mathrm{B}$, allora $x \in \mathrm{A}$.
La scrittura $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ significa: B è un sottoinsieme di A (= B è "incluso" in A).
Ad esempio, se $\mathrm{A} = \{x, y, z\}$, allora i sottoinsiemi di A sono: $\varnothing$, $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$, $\{x, y, z\} = \mathrm{A}$
(dove il simbolo $\varnothing$ indica l'insieme vuoto, quello privo di elementi).
Fra i sottoinsiemi di un insieme A c'è sempre anche A stesso.
Si dice che A è un sottoinsieme "improprio" di sé stesso;
i sottoinsiemi "propri" di A sono, invece, quelli che non riempiono tutto A.
Fra i sottoinsiemi propri di un insieme A qualsiasi c'è sempre l'insieme vuoto,
con una sola eccezione: se A *è* l'insieme vuoto, allora non ha alcun sottoinsieme proprio.

2)
CORRISPONDENZE BIUNIVOCHE
**Si dice che vi è una "corrispondenza biunivoca" fra due insiemi A, B
quando accade che ad ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B, E VICEVERSA.**
Sinonimo di "corrispondenza biunivoca" è "biiezione".

3)
INSIEMI EQUIPOTENTI
**Si dice che due insiemi A e B sono fra loro "equipotenti"
se esiste una corrispondenza biunivoca (una "biiezione") fra A e B.**

4)
NUMERI RAZIONALI, IRRAZIONALI, REALI
Esistono numeri che NON possono essere scritti sotto forma di frazione (= rapporto fra due interi).
Essi sono detti numeri "irrazionali". Esempi: $\sqrt{2}$, π, tutti i decimali illimitati non periodici.
L'insieme che comprende sia i numeri razionali che gli irrazionali viene detto "insieme dei numeri *reali*",
è indicato col simbolo $\mathbb{R}$, e può essere rappresentato su di una "number line":



Su di una *number line*, ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto
e, viceversa, ad ogni punto corrisponde uno e un solo numero reale.
Quindi fra la *number line*, pensata come insieme di punti, e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali,
c'è una "corrispondenza biunivoca" o "biiezione": si tratta di due insiemi *equipotenti*.

5)
TEOREMA ("**Paradosso di Galileo**")
**L'insieme $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ di tutti gli interi assoluti (= senza segno) maggiori di 0
è equipotente con l'insieme $\mathrm{E} = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ dei soli interi assoluti pari, maggiori di 0.**
Dimostrazione:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**	***n***	**...**
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕		↕	
2	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**...**	**2*n***	**...**

Osserviamo che quest'ultimo insieme è un sottoinsieme "proprio" del primo,
ossia un sottoinsieme che non lo "riempie" completamente, che ha degli elementi *in meno* rispetto a quello …
Nonostante ciò, il teorema ci dice che i due insiemi possono essere posti in corrispondenza biunivoca,
come le asole e i bottoni di una stessa camicia. E quando due insiemi sono in corrispondenza biunivoca,
viene spontaneo pensare che gli elementi dell'uno sono *tanti, quanti gli elementi dell'altro* …

… MUMBLE, MUMBLE … TUTTO QUESTO E' DAVVERO SINGOLARE! …

6)
INSIEMI INFINITI
Quanto precede suggerisce un'idea per formulare una definizione rigorosa di insieme "infinito".
DEFINIZIONE
Si dice che un insieme è "infinito" se è equipotente con un suo sottoinsieme "proprio",
ossia: con un suo sottoinsieme, che non "riempie" tutto l'insieme di partenza.
Se un insieme non è "infinito", si dirà "finito".

7)
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ è equipotente con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
(pertanto, pure $\mathbb{N}$ ed $E = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ sono fra loro equipotenti).
Dimostrazione
Del tutto analoga a quella del teorema 5)

8)
Tutti gli insiemi menzionati al punto 7) sono equipotenti con l'insieme degli interi relativi
$\mathbb{Z} = \{...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
Dimostrazione

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & ... & 2n & 2n+1 & ... \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & ... & n & -n & ... \end{array}$$

9)
DEFINIZIONE DI NUMERO CARDINALE
Si dice "numero cardinale" quell'entità astratta, quel "quid",
che è comune a tutti gli insiemi che sono equipotenti con un insieme dato.
Un numero cardinale si dice "infinito" o "finito"
a seconda che tale sia uno qualunque fra gli insiemi che lo "rappresentano"
(si dimostra che la definizione è corretta, nel senso che non dipende dallo specifico insieme
che viene utilizzato per "rappresentare" il particolare numero cardinale che si vuole considerare).

Il numero cardinale che è rappresentato
dall'insieme $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
viene indicato col simbolo $\aleph_0$
[leggi: aleph zero, aleph con zero;
"aleph" ($\aleph$) è la prima lettera dell'alfabeto ebraico].

$\aleph_0$, l'entità astratta che è comune a tutti gli insiemi
che possono essere messi in corrispondenza biunivoca
con l'insieme $\mathbb{N}^*$,
è chiamato
"LA CARDINALITÀ DEL NUMERABILE",
o anche: "LA POTENZA DEL NUMERABILE".

Se il numero cardinale (= la "cardinalità")
associato a un determinato insieme è $\aleph_0$,
allora si suol dire che quell'insieme è "numerabile".

Quante sono le stagioni dell'anno? **4**

Quante sono le dita di una mano? **5**

"Quanti sono" i numeri interi assoluti? $\aleph_0$

"Quanti sono" i numeri interi relativi? $\aleph_0$

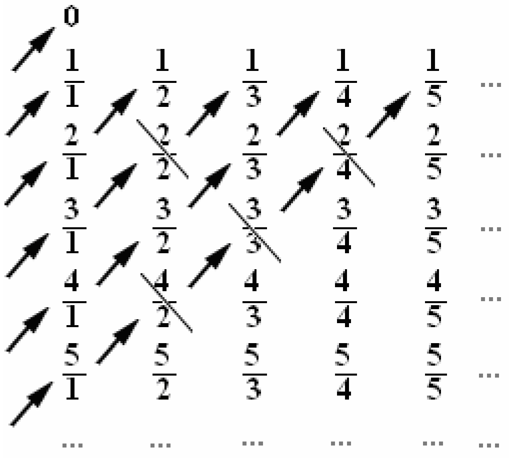
10)
CONFRONTO, SOMMA, PRODOTTO DI DUE NUMERI CARDINALI
Siano A, B due insiemi di cardinalità a, b rispettivamente: card (A) = a, card (B) = b.

- ❑ Diciamo che $a < b$ se
  - A è equipotente con un sottoinsieme di B
  - e invece B non è equipotente con nessun sottoinsieme di A.
- ❑ Dati due numeri cardinali a, b, chiamiamo "SOMMA" di a con b (a+b)
  il numero cardinale dell'insieme $A \cup B$, ammesso che si abbia card (A) = a, card (B) = b,
  e che A, B siano fra loro "disgiunti", cioè non abbiano nessun elemento in comune ($A \cap B = \varnothing$).
- ❑ Dati due numeri cardinali a, b, chiamiamo "PRODOTTO" di a con b ($a \cdot b$, ab)
  il numero cardinale dell'insieme $A \times B$ (che è poi il "prodotto cartesiano" di A con B,
  ossia l'insieme i cui elementi sono le coppie ordinate (x, y) che si possono costruire
  prendendo come primo termine della coppia un elemento di A, come secondo termine un elemento di B);
  purché, ovviamente, sia card (A) = a, card (B) = b.

Si dimostra che le due definizioni date di somma e prodotto di numeri cardinali sono corrette,
in quanto non dipendono dagli specifici insiemi che vengono utilizzati per "rappresentare" i cardinali in gioco.

11)
TEOREMA
L'insieme $\mathbb{Q}_a$ dei numeri razionali assoluti
è anch'esso equipotente con $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$,
perciò ha anch'esso la "potenza del numerabile" $\aleph_0$:
insomma, $\text{card}(\mathbb{Q}_a) = \text{card}(\mathbb{N}^*) = \aleph_0$.

Per la *dimostrazione*, vedi la figura qui a destra
(nella quale le frazioni soppresse sono quelle semplificabili,
ossia non ridotte ai minimi termini).
Il percorso scelto per passare in rassegna, uno dopo l'altro, tutti
i numeri razionali assoluti, definisce la corrispondenza biunivoca



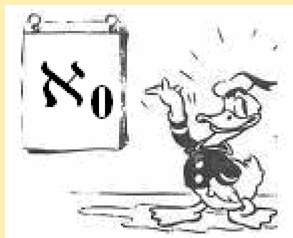
0	1	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	5	$\frac{1}{5}$	...	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	...

12)
TEOREMA
Pure l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali *relativi* è equipotente con $\mathbb{N}^*$ (quindi anche con $\mathbb{Q}_a$, $\mathbb{Z}$, ...)
perciò ha cardinalità $\aleph_0$ ossia è "numerabile".
Per la *dimostrazione*, vedi lo schema qui sotto.

0	-1	1	-2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-4	4	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...

Lunedì	*Martedì*	*Mercoledì*	*Giovedì*	*Venerdì*
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Pollice	*Indice*	*Medio*	*Anulare*	*Mignolo*
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Vista	*Udito*	*Olfatto*	*Gusto*	*Tatto*
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
...	...	...	...	...

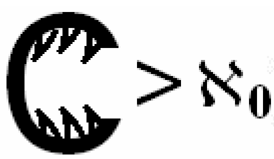
$\mathbb{N}^*$:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$\mathbb{Z}$:	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$\mathbb{Q}_a$:	0	1	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$\mathbb{Q}$:	0	-1	1	-2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3	3	$-\frac{1}{3}$	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...



13) TEOREMI: $\boxed{\aleph_0 + 1 = \aleph_0; \quad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0; \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0}$ (ne omettiamo la semplice dimostrazione)

14)
Sorprendentemente, non è vero che qualsiasi insieme infinito
debba per forza essere equipotente con $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_a$, $\mathbb{Q}$, ecc.
Esistono insiemi il cui numero cardinale è MAGGIORE di $\aleph_0$!!!

TEOREMA
Non può esistere nessuna corrispondenza biunivoca
tra l'insieme $\mathbb{R}_a$ dei numeri reali assoluti e l'insieme $\mathbb{N}^*$.
Quindi $\mathbb{R}_a$ NON è "numerabile", NON ha cardinalità $\aleph_0$:
ha invece cardinalità MAGGIORE di $\aleph_0$, ha un "grado di infinito" maggiore
di quello che caratterizza gli interi assoluti, gli interi relativi, i razionali.
Il numero cardinale associato all'insieme $\mathbb{R}_a$
è detto "POTENZA DEL CONTINUO", e indicato col simbolo *c*.



Per dimostrare questo teorema si ragiona *per assurdo.* Se esistesse una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}_a$ e $\mathbb{N}^*$, allora gli elementi di $\mathbb{R}_a$ potrebbero essere elencati in una lista recante

- in prima colonna i numeri 1, 2, 3, 4, …
- e in seconda colonna tutti i reali assoluti (del tipo PARTE INTERA / VIRGOLA / PARTE DECIMALE)

PRIMA COLONNA	SECONDA COLONNA						
1	**a,**	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
2	**b,**	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	...
3	**c,**	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	...
4							
...							
n	$\psi,$	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	...
...							

Sennonché, andiamo a considerare il numero reale α definito in questo modo:

- la parte intera di α è 2 $(\alpha = 2,...)$;
- l'n-esima cifra dopo la virgola di α è:
  - 1, se l'n-esima cifra decimale dell'n-esimo numero in seconda colonna è diversa da 1
  - 0, se l'n-esima cifra decimale dell'n-esimo numero in seconda colonna è uguale a 1.

Per il modo in cui è "strutturata" la sua definizione, α NON PUO' comparire nella colonna dei numeri reali (infatti, qualunque sia n, non può trovarsi all'n-esima posizione nella lista in quanto differisce dall'n-esimo numero reale della lista se non altro per l'n-esima cifra decimale);
quindi la corrispondenza definita dalla tabella … NON E' biunivoca !!!

NOTA - Il procedimento seguito si dice "procedimento (o metodo) diagonale"

15) TEOREMI (ne omettiamo la dimostrazione)

Gli insiemi $\mathbb{R}_a$ dei reali assoluti e $\mathbb{R}$ dei reali relativi si possono porre in corrispondenza biunivoca tra loro, quindi hanno la stessa cardinalità *c*.
Anche ogni intervallo numerico - aperto, chiuso, limitato, illimitato che sia - ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}_a$ e di $\mathbb{R}$.
L'insieme $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dei numeri irrazionali ha cardinalità c.
L'insieme dei punti di un segmento, o di un quadrato, o di un cubo, o di una retta, o di un piano, o dello spazio tridimensionale, hanno tutti la stessa cardinalità di $\mathbb{R}_a$ e di $\mathbb{R}$, che è poi la "potenza del continuo" *c*.

"Quanti sono" i numeri razionali? $\aleph_0$

"Quanti sono" i numeri irrazionali? $\mathfrak{c}$

"Quanti sono" i numeri reali? $\mathfrak{c}$

"Quanti sono" i punti dello spazio? $\mathfrak{c}$

16) TEOREMA

Dato un qualunque insieme A, il suo "INSIEME DELLE PARTI" P(A), ossia l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A, HA SEMPRE CARDINALITÀ MAGGIORE DELLA CARDINALITÀ DI A.

"Quanti sono" i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$? **PIU' DI** $\mathfrak{c}$

Dimostrazione

Per assurdo, supposto che esista una biiezione $f : \mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{P(A)}$,
allora, preso un elemento x di A, $f(x)$ sarà un sottoinsieme di A
e si verificherà uno e uno solo dei casi: $x \in f(x)$ o $x \notin f(x)$.
Definiamo l'insieme $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ come segue:
$\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{A} \,/\, x \notin f(x)\}$ = l'insieme formato da quegli elementi di A, che NON appartengono all'insieme che loro corrisponde nella biiezione f.
Ora pensiamo alla "controimmagine" di B, ossia all'elemento $\overline{x} \in \mathrm{A}$, tale che $f(\overline{x}) = \mathrm{B}$.
Ci sono due possibilità: $\overline{x} \in f(\overline{x}) = \mathrm{B}$ o $\overline{x} \notin f(\overline{x}) = \mathrm{B}$.
Sennonché … nessuna delle due può essere vera!
E' infatti impossibile che $\overline{x} \in f(\overline{x}) = \mathrm{B}$, perché B è, per definizione, l'insieme degli elementi di A che NON appartengono all'insieme che loro corrisponde nella biiezione f;
ma è pure impossibile che $\overline{x} \notin f(\overline{x}) = \mathrm{B}$,
perché se così fosse $\overline{x}$ dovrebbe appartenere a B, per il modo in cui B è stato definito.

17) **Quest'ultimo teorema ci assicura dunque che**
I "GRADI DI INFINITO" SONO, A LORO VOLTA, INFINITI!
… Insomma, dato un numero cardinale,
se ne può SEMPRE trovare un altro ancora maggiore.

18)
Tra i numeri cardinali maggiori di c, ricordiamo solo la "potenza del funzionale", cioè il numero cardinale dell'insieme i cui elementi sono tutte le *funzioni* di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.