PROBABILITA'

1 - IL CONCETTO DI PROBABILITA' TI E' GIA' NOTO! LA "LEGGE EMPIRICA DEL CASO"

1.1 - Casi possibili e casi favorevoli; definizione provvisoria di probabilità

A. Qui davanti a me ho un'urna contenente 2 palline bianche e 98 nere.
Mi metto una benda sugli occhi, scuoto per bene e ripetutamente l'urna, ed estraggo una pallina.
   I. E' più probabile che venga fuori una bianca o una nera?
   II. E se nell'urna ci fossero 40 bianche e 60 nere?

B. In un'urna voglio introdurre 100 palline.
Quante bianche e quante nere dovrò mettere nell'urna se desidero
che sia uguale la probabilità di estrarre una bianca o una nera?

C. Sono in piedi davanti al bancone del bar.
A un certo punto entra un signore e vedendolo il barista mi fa:
"Non ne sono certo, ma è molto probabile che ordini una spremuta".
   I. Secondo te, cosa ha indotto il barista a parlare in questo modo?
   II. Che differenza c'è fra questo esempio e i precedenti?

Vai ora pure a controllare in fondo alla pagina se le risposte che hai dato sono esatte! …

… Bravo! … Dunque ai quesiti proposti sei stato in grado di rispondere facilmente e senza esitazioni!!!
Eppure la definizione di "probabilità" … noi *non l'abbiamo ancora data*!!!

Ma tu già avevi nella tua mente ben chiara l'idea che
valutare la "probabilità" di un evento legato al "caso"
significa
valutare la maggiore, o minore, "facilità" che l'evento in questione si verifichi.

Questo dimostra allora che **il concetto di probabilità TI E' GIA' NOTO,**
è un concetto che ogni persona dotata di ragione spontaneamente possiede
(indipendentemente dal fatto che l'abbia o non l'abbia già incontrato nel suo percorso scolastico)
e, quindi, che non ci stiamo occupando di INTRODURRE tale concetto, ma solo di PRECISARLO.

Con riferimento al quesito A, hai saputo dire con sicurezza quale, fra due possibili eventi, era "il più probabile";
il problema B ti ha proposto una situazione in cui i due eventi in gioco dovevano avere "la stessa probabilità".

Ora però ci proponiamo di essere più precisi,
ossia ci proponiamo di QUANTIFICARE, di MISURARE, attraverso un valore NUMERICO,
la probabilità che accada un determinato evento.

Lo svizzero Jakob Bernoulli, nella sua "Ars Conjectandi" (uscita postuma nel 1713)
scrive che
" Probabilitas enim est gradus certitudinis, et ab hac differt ut pars a toto "
"**La probabilità infatti è il grado della certezza,**
e da questa (= dalla certezza) differisce come la parte differisce dal tutto".

RISPOSTE AI QUESITI A, B, C

A. I. Evidentemente, è molto più probabile (non è certo, ma è probabilissimo) che esca una nera
II. E' anche questa volta più probabile che esca una nera.
Rispetto alla situazione precedente, però, la probabilità di uscita di una nera è nettamente diminuita.

B. 50 bianche e 50 nere

C. I. Il barista è indotto a parlare in questo modo perché, dall'esperienza passata, ha potuto constatare che, almeno negli ultimi tempi, quando quel signore entrava nel bar ordinava quasi sempre, o almeno la grande maggioranza delle volte, una spremuta.
II. La differenza fra l'ultimo esempio e i precedenti consiste in questo:
mentre negli esempi di prima la valutazione di probabilità si poteva fare "a priori",
cioè senza bisogno di effettuare nessuna estrazione preliminare,
invece qui è soltanto DOPO aver osservato il comportamento del cliente
per un numero abbastanza elevato di giorni che il barista ha potuto formulare la previsione.

Altri spunti di riflessione

A. Se ho in un'urna 2 B e 98 N sono "quasi certo" che dall'estrazione uscirà una N; la probabilità di estrazione di una N è "altissima" – il "grado di certezza" è "altissimo". Se ho 40 B e 60 N, la probabilità di estrazione di una N è più bassa; possiamo dire che il "grado di certezza" è diminuito. E' evidente che, **di fronte ad un'urna con 100 palline in totale – alcune Bianche, altre Nere – la probabilità di estrarre una Nera è *proporzionale* al numero di palline Nere presenti nell'urna.**

B. **Supponiamo** ora **che fra i 20 alunni di una classe venga estratto, a sorte, un premio. Nessuno dei 20 alunni è certo di vincere: ciascuno, però, possiede "un pezzettino" di certezza ...** quanto misura, quanto vale questo "pezzettino"? Beh, **è ragionevole dire che ciascun alunno possiede 1/20 della "torta" della certezza.** Supponiamo poi che le 7 femmine della classe dicano: "Se verrà estratta una qualsiasi di noi 7, regaleremo il premio alla bidella". A questo punto, la bidella si "impadronisce" di 7 "pezzettini" di certezza da 1/20, quindi "possiede i 7/20 dell'intera certezza".

C. Immaginiamo che una comitiva di amici un po' pazzi abbia promesso a Chiara un regalo per il suo compleanno, ma solo a condizione che da un'urna, contenente 100 palline di cui 90 verdi, venga estratta una pallina verde. E' ovvio che Chiara, in questo modo, non è certa di ricevere il regalo; però ne è "quasi" certa, perché il numero 90 (casi favorevoli) è prossimo al numero 100 (casi possibili). **Chiara non possiede interamente la certezza di ricevere il regalo, ma ... possiede 90 pezzettini da 1/100 di certezza: possiede i 90/100 della certezza.** Ed è altrettanto ovvio che se si dimezzasse sia il numero delle palline verdi (portandolo a 45) che il numero totale delle palline (portandolo a 50), la probabilità di ricevere il regalo non cambierebbe: d'altronde, in questo modo Chiara si troverebbe a possedere i 45/50 della certezza, cioè una "fetta" della "torta della certezza", esattamente uguale a 90/100. Sarebbe in fondo la stessa cosa prendere semplicemente 10 palline, di cui 9 verdi: $90/100 = 45/50 = 9/10$.

A questo punto, è ora di trarre le conclusioni.
Evidentemente nella QUANTIFICAZIONE, nella MISURAZIONE della probabilità, c'entra sia il numero dei casi favorevoli che il numero dei casi possibili;

- dimezzando, o raddoppiando, sia il n° dei casi favorevoli che il n° dei possibili, la probabilità resta invariata;
- a parità di casi possibili, la probabilità è direttamente proporzionale al numero dei casi favorevoli.

La certezza si può pensare come una "torta" divisa in tante fettine uguali quanti sono i casi possibili; la probabilità di un evento corrisponde a tante "fettine" di certezza quanti sono i casi favorevoli all'evento stesso.

Queste considerazioni portano a concludere che il modo più spontaneo, più naturale, di "misurare" la probabilità di un evento, è quello di calcolare il rapporto $\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$.

DEFINIZIONE (attenzione: PROVVISORIA, perché andrà poi perfezionata)

Dicesi "probabilità" di un evento, il rapporto $p = \frac{\textbf{numero casi favorevoli}}{\textbf{numero casi possibili}}$

La probabilità di un dato evento è dunque sempre compresa fra 0 e 1 (il numero dei casi favorevoli non può ovviamente superare il numero dei casi possibili); precisamente, la probabilità è uguale a 0 se e solo se l'evento è impossibile, è uguale a 1 se e solo se l'evento è certo.

ESERCIZI

1) **Se si lancia un dado, la probabilità di ottenere "5" è …..**
2) **Se si estrae una carta da un mazzo da scopa (NOTA), la probabilità che sia una figura è …..**
   NOTA - In un mazzo da scopa abbiamo 40 carte:
   4 assi, 4 re, 4 donne, 4 fanti, 4 "sette", 4 "sei", 4 "cinque", 4 "quattro", 4 "tre", 4 "due". Ogni gruppo di 4 è formato da carte di diverso "seme": una di cuori, una di quadri, una di fiori, una di picche. La pagina successiva riporta uno schema del mazzo da scopa.
3) **Un'urna contiene 327 palline, contrassegnate dai numeri 1, 2, 3, ... , 327. Pescando a occhi chiusi, qual è la probabilità di estrarre un numero pari? E un numero dispari?**

RISPOSTE: 1) 1/6 2) $12/40 = 3/10$ 3) 163/327; 164/327

IL MAZZO DA SCOPA (40 carte: K = King, Re; Q = Queen, Donna; J = Jack, Fante)

	A	K	Q	J	7	6	5	4	3	2
Cuori	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥	♥
Quadri	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦
Fiori	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣	♣
Picche	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠	♠

4 Assi: Come Quando Fuori Piove
- **1 Asso di Cuori, Rosso**
- **1 Asso di Quadri, Rosso**
- **1 Asso di Fiori, Nero**
- **1 Asso di Picche, Nero**

4 K: K di Cuori, K di Quadri, K di Fiori, K di Picche
4 Q: …
…
NOTA: i Quadri sono anche detti "Ori", o "Denari"

Paul Cézanne, Les Joueurs de Cartes, dipinto fra il 1890 e il 1895

1.2 - La legge empirica del caso

La definizione cui siamo pervenuti ha un interessantissimo riscontro "sperimentale" (a tutti noto!).
Consideriamo un'urna contenente 10 palline, di cui 3 rosse.
La probabilità di estrarre dall'urna una pallina rossa è 3/10.
Bene: supponiamo di effettuare moltissime estrazioni, diciamo 10000 estrazioni
(sempre rimettendo la pallina nell'urna, dopo ogni estrazione, cioè, come si dice, "reimbussolando" la pallina).
Teniamo conto del numero di palline rosse estratte.
Vedremo che il rapporto

$$\frac{\text{numero di palline rosse estratte}}{\text{numero di estrazioni}}$$

si avvicinerà molto al valore 3/10 = 0,3.
In generale:

Si constata che, QUANDO SI RIPETE PER "MOLTE" VOLTE una prova,
la **FREQUENZA RELATIVA** di un esito, cioè il rapporto

$$\frac{\text{numero di prove che hanno avuto quell'esito}}{\text{numero totale di prove}}$$

si avvicina "molto" alla **PROBABILITÀ A PRIORI** di quell'esito,
calcolata tramite il rapporto

$$\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}.$$

A questa "legge", la cui validità è rilevabile sperimentalmente, si è attribuito il nome di
"**LEGGE EMPIRICA DEL CASO**".

OSSERVAZIONE TERMINOLOGICA
Si trova scritto in alcuni testi che la "legge empirica del caso"
è anche nota col nome di "legge dei grandi numeri".
Questa affermazione NON è corretta,
perché in realtà si tratta di due enunciati concettualmente molto diversi:

- **la "*legge dei grandi numeri*", detta anche "Teorema di Bernoulli", è, appunto, un teorema (cioè un'affermazione dimostrabile):**
  per comprendere l'enunciato di questo Teorema occorrono nozioni più avanzate di Calcolo delle Probabilità.
  [A dire il vero, sono state formulate DIVERSE "leggi dei grandi numeri", che si collocano a diversi gradi di "generalità"].
- **La "*legge empirica del caso*" è, invece, tutt'altro che un teorema:**
  diciamo che è una "verità rilevabile sperimentalmente",
  ma su questo si potrebbe in realtà discutere per giornate intere.

1.3 - Proposte di riflessione per la piena comprensione della "legge empirica del caso"

A. Se lanci 1000 volte una moneta, quante volte ti aspetti che esca "testa" e quante volte "croce"?

B. Se lanci 1000 volte una moneta ed esce 400 volte "testa", ne deduci che la moneta è truccata?

C. Supponiamo di avere un mazzo di carte da scopa
(40 carte, di cui 10 di cuori, 10 di quadri, 10 di fiori, 10 di picche),
e di pescare per 1000 volte una carta, ogni volta reinserendola nel mazzo e mischiando
prima di andare a ripescare.
Supponiamo che al termine delle 1000 estrazioni sia uscita per 261 volte una carta di cuori.
"Cuori" è quindi uscito con frequenza relativa 261/1000,
vicina alla "probabilità a priori" che vale 10/40, ossia 1/4, ossia 250/1000.
Se ora effettuiamo altre 9000 estrazioni, portando il totale a 10000, ti domando:
è possibile che la frequenza relativa SI ALLONTANI dalla "probabilità a priori"?
E' possibile, per esempio, che in queste 10000 estrazioni il seme "cuori" esca 2630 volte?
(la frequenza relativa sarebbe 2630/10000 = 263/1000, che rispetto a 261/1000 è *più lontana* da 250/1000)

D. Si sa che in una scatola ci sono 10 palline, alcune bianche e altre nere.
Non si sa però quante sono le bianche e quante le nere.
Le palline sono tutte indistinguibili fra loro al tatto, in quanto differiscono esclusivamente per il colore.
Se una persona può estrarre dalla scatola una sola pallina per volta, guardarne il colore,
poi rimetterla nella scatola e (dopo aver scosso la scatola per mischiare le palline)
effettuare un'altra estrazione, e così via,
potrà quella persona stabilire quante fra le dieci palline sono bianche e quante nere?

E. Ripensiamo alla precedente situazione D).
Supponiamo che NON si sappia quante sono in totale le palline nella scatola.
Vale a dire: sappiamo che sono alcune bianche e alcune nere, ma non sappiamo
quante sono le bianche, quante sono le nere, e nemmeno, questa volta, quante sono le palline in totale.
Con tante estrazioni successive di un'unica pallina, con successivo "re-imbussolamento",
COSA si può venire a sapere riguardo alle palline?

RISPOSTE

A. *Circa* 500 volte Testa e *circa* 500 volte Croce.
Mi aspetto che il numero di Teste e il numero di Croci non si discostino di molto da 500.
Infatti, 1000 lanci sono già “tanti” e quindi, per la legge empirica del caso,
la frequenza relativa dovrebbe avvicinarsi alla probabilità a priori che è ½ per T e ½ per C.

B. Lo sospetterei fortissimamente. Mi pare che il numero di lanci (1000) sia già così elevato da “forzare”,
per una questione di “simmetria del caso”, il numero di Teste a non discostarsi COSI’ TANTO da 500.
Ritengo estremamente improbabile, anche se non impossibile teoricamente, che il numero di Teste sia così basso.
O la moneta è truccata, o è si è verificata una circostanza estremamente rara, eccezionale.

C. Sì, è possibile, anche se “raro”, eccezionale”, “molto improbabile”.
La “legge empirica del caso” non afferma che il “tendere” della frequenza relativa alla probabilità “a priori”,
quando il numero di prove si fa molto elevato, sia privo di “oscillazioni”.
La circostanza prospettata appare tuttavia estremamente poco probabile,
perché 10000 è un numero di estrazioni molto grande, e molto maggiore del già “grande” valore 1000.

D. Sì. Basta che questa persona effettui un gran numero di estrazioni con reimmissione (= reimbussolamento),
rilevando la frequenza, per esempio, delle bianche.
Per la legge empirica del caso, la frequenza relativa tenderà ad approssimare la probabilità a priori,
che a sua volta sarà uguale a n° bianche/n° totale = n° bianche/10.
Ad esempio, effettuando 1000 prove aleatorie, la frequenza assoluta delle bianche sarà quasi certamente
molto vicina a uno dei valori 100, 200, 300, 400, … , 900 (a seconda che le Bianche siano 1, 2, 3, 4, … , 9).
A partire dalla frequenza, sarà quindi possibile inferire il numero delle Bianche, con rischio di errore quasi nullo.
Infatti, da una parte, è estremamente improbabile che la frequenza assoluta si discosti molto
da una delle “frequenze attese” 100, 200, …
(ad es., con 1000 prove, sarebbe un evento quasi incredibile che la frequenza risultasse uguale, poniamo, a 149);
dall’altra, sarebbe ancora più inverosimile, raro, eccezionale, che, rilevata ad es. una frequenza di Bianche
uguale a 412, prossima cioè a 400, il numero delle bianche non fosse 4 ma 5, o 3, o ancora diverso.

E. Si potranno conoscere, approssimativamente, i tre rapporti
n° bianche /n° totale, n° nere /n° totale, n° bianche/n° nere.

2 - INADEGUATEZZA DELLA DEFINIZIONE DATA; LA DEFINIZIONE DI LAPLACE

2.1 - La definizione che abbiamo appena scritto è da buttare?

Accanto alla definizione di probabilità come rapporto *n° casi favorevoli/n° casi possibili*,
ho scritto un aggettivo limitativo: **provvisoria**.
Per qual motivo la definizione data va considerata solo *provvisoria*?
Cerchiamo di comprenderlo considerando i due esempi seguenti.

A. Al posto di lanciare la classica moneta, lanciamo invece un tronco di cono, considerando che esca "testa" quando il solido si ferma con la base più larga verso l'alto, "croce" nel caso contrario (e annullando il lancio se per caso il tronco dovesse rimanere in equilibrio sulla superficie laterale). Su quale esito ci converrebbe scommettere?

Immaginiamo che la posta in palio sia alta: rifletteremmo a dovere prima di scegliere, vero?
Certamente la forma particolare di questa "moneta" atipica farà sì che sia
"più facile", "più probabile", uno dei due esiti rispetto all'altro.
D'altra parte, la "definizione provvisoria" porterebbe alla seguente analisi:

- casi favorevoli all'uscita di "testa" = 1;
- casi favorevoli all'uscita di "croce" = 1;
- casi possibili = 2

DA CUI
probabilità dell'evento "esce testa" = 1/2; probabilità dell'evento "esce croce" = 1/2.
… Uguale probabilità, dunque … !?!
Eh no, proprio NON CI SIAMO: qui la "definizione provvisoria" senza dubbio fallisce.

B. Lancio una moneta; se esce Testa, mi viene consegnata un'urna U1 in cui ci sono una pallina Nera e una Rossa: da quest'urna estraggo una pallina; se invece esce Croce, mi viene consegnata una diversa urna U2 in cui vi sono 3 palline Verdi e 1 Gialla; da quest'urna estraggo una pallina. E' più probabile che la pallina estratta sia Gialla o sia Rossa?

Applicando la "definizione provvisoria" si troverebbe uguale probabilità
(si può, per esempio, pensare che i casi possibili siano TN, TR, CV_1, CV_2, CV_3, CG);
invece, basta riflettere un attimo per concludere che
la pallina Rossa ha probabilità *maggiore* di essere estratta, rispetto a quella Gialla.
(Non sei convinto? Prova a pensare ad un'urna U2 contenente 99 palline Verdi e 1 Gialla!
… L'evento "esce una Gialla" sarebbe evidentemente "eccezionale",
mentre l'evento "esce una Rossa" sarebbe piuttosto "ordinario", ti pare?)

***PER QUAL MOTIVO* la "definizione provvisoria" non è risultata valida ai fini di una valutazione corretta della probabilità nei due esempi di cui sopra?**

2.2 - La definizione "perfezionata" (di Laplace)

Queste riflessioni ci portano evidentemente a sostituire la definizione inizialmente posta
con quest'altra, data da Pierre Simon de **Laplace** nel suo **"Théorie Analytique des Probabilités" del 1812:**

> **"... la probabilité d'un évenement est le rapport du nombre des cas qui lui sont favorables au nombre de tous les cas possibles, LORSQUE RIEN NE PORTE A CROIRE QUE L'UN DE CES CAS DOIT ARRIVER PLUTOT QUE LES AUTRES"**

ovvero:

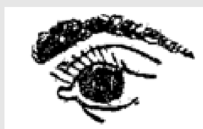
> **"... la probabilità di un evento è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli all'evento stesso ed il numero dei casi possibili, QUALORA NULLA PORTI A RITENERE CHE UN CASO TENDA A VERIFICARSI PIU' FACILMENTE DEGLI ALTRI"**
> **(purché, cioè, i casi possibili siano "*UGUALMENTE* POSSIBILI").**

DEFINIZIONE CLASSICA DI PROBABILITA' (dovuta a Laplace, 1812)

Dicesi probabilità di un evento il rapporto $\boxed{\dfrac{\textbf{numero casi favorevoli}}{\textbf{numero casi possibili}}}$

QUALORA TUTTI I CASI POSSANO ESSERE CONSIDERATI
♥ "EQUIPOSSIBILI";
cioè, qualora non ci siano casi che tendano a verificarsi "più facilmente" di altri.

LA DEFINIZIONE PERFEZIONATA



2.3 - Nemmeno la definizione "perfezionata" è, a ben guardare, impeccabile ☹

Siamo tuttavia costretti ad ammettere che il nostro sforzo di giungere ad una definizione completa e rigorosa di "probabilità" NON si è concluso in modo veramente soddisfacente.

La "definizione" cui siamo alla fine pervenuti … è, ahimè, grossolanamente deficitaria, perché mancante di una *regola*, di un criterio, che permetta di stabilire QUANDO si possa parlare di casi "ugualmente facili (o probabili)" e quando invece no.

E poiché non si riesce ad enunciare una regola siffatta in termini che evitino "circoli viziosi" e che siano a) sufficientemente generali, da una parte; b) e sufficientemente dettagliati, dall'altra, la decisione se due casi siano da considerare o meno equipossibili è, alla fin dei conti, lasciata alla nostra valutazione soggettiva.

Laplace stesso ammette, a questo proposito, che

"la juste appréciation des divers cas est un des points les plus délicats de l'analyse des hazards"

cioè che

"la corretta valutazione dei diversi casi
- in sostanza, la valutazione se siano o meno "equipossibili" -
è uno dei punti più delicati dell'analisi degli eventi casuali".

Tuttavia, si constata che,

pur essendo la valutazione di equipossibilità lasciata alla discrezionalità individuale,
considerazioni di simmetria condotte e discusse con attenzione
portano a valutazioni unanimemente condivise.

Una buona guida a proposito è (nonostante si tratti di un'indicazione piuttosto vaga)
il "PRINCIPIO DI RAGIONE INSUFFICIENTE" o "PRINCIPIO DI INDIFFERENZA":
"due esiti sono equipossibili se non c'è nessuna ragione perché si debba ritenere il contrario"

2.4 - Il problema dell'equipossibilità

Due esempi per sottolineare l'importanza di analizzare con cura se i casi considerati siano equipossibili.

Ragiona con la tua testa, coprendo inizialmente la parte inferiore della pagina, su cui si trovano le risposte.

A. Un tale mi dice:

"Lanciando due monete, la probabilità che esca "testa" su entrambe è 1/3.
Infatti, i casi possibili sono: 1) due "teste" 2) due "croci" 3) una "testa" e una "croce".
Di questi tre casi possibili, uno solo è favorevole, quindi, appunto, p(2 Teste) = 1/3"

E' corretta questa affermazione?

B. Ho qui 3 cartoncini rettangolari;

- **uno ha entrambe le facce rosse,**
- **un altro ha entrambe le facce bianche,**
- **il terzo ha una faccia bianca e la faccia opposta rossa.**

Metto i cartoncini in un cassetto, ti chiamo …
… e tu, senza guardare, estrai un cartoncino dal cassetto e lo posi sul tavolo.
Supponiamo a questo punto che la faccia in evidenza sia rossa.
Qual è la probabilità che la faccia coperta sia bianca?

RISPOSTE

A. Un'analisi attenta mostra che i tre casi prospettati *non* sono equipossibili.
L'insieme dei casi equipossibili è (T, T) (T, C) (C, T) (C, C)
(per facilitare il ragionamento giova pensare a un qualcosa che psicologicamente ci porti a non dimenticare l'individualità di ciascuna moneta: ad esempio, possiamo pensare che una moneta sia da 2 euro e l'altra da 1 euro).
Quindi l'affermazione non è corretta, e la risposta esatta è invece p(2 Teste) = 1/4

B. Verrebbe forse spontaneo rispondere 1/2, ma la risposta giusta è invece 1/3. Infatti …

primo cartoncino:	R1, R2 (una faccia rossa, l'altra ancora rossa).
secondo cartoncino:	B1, B2
terzo cartoncino:	B3, R3

La faccia rossa che io vedo potrebbe essere, con ugual facilità, R1, o R2, o R3.
E di questi 3 casi EQUIPOSSIBILI uno solo (R3) è favorevole all'evento: "la faccia nascosta è bianca".

3 - DIVERSI APPROCCI ALLA PROBABILITA’

In Matematica ci sono 4 modi alternativi di porre la definizione di probabilità:

a) definizione **CLASSICA**
b) definizione **FREQUENTISTA**
c) definizione **ASSIOMATICA**
d) definizione **SOGGETTIVISTA**

a) Def. **CLASSICA**:

$$\textbf{probabilità} = \frac{\textbf{n° casi favorevoli}}{\textbf{n° casi possibili}}$$

sotto l’ipotesi che i casi possibili siano valutati tutti “EQUIpossibili”, o “equiprobabili”.

Quest’ultima valutazione è individuale e legata sostanzialmente a considerazioni di “simmetria” non inquadrabili, purtroppo, in un criterio che si riesca a definire in termini rigorosi e generali.
Tuttavia, dopo un’attenta analisi e discussione, la “equipossibilità” o la “non equipossibilità” dei casi in esame dovrebbe sempre emergere in modo chiaro, ed essere unanimemente condivisa, sulla base del cosiddetto “PRINCIPIO DI RAGIONE INSUFFICIENTE”, o “Principio di Indifferenza”: “due casi sono equipossibili se non c’è nessuna ragione perché si debba ritenere il contrario”.

b) Def. **FREQUENTISTA** (o “statistica”):

$$\textbf{probabilità} = \textbf{frequenza relativa} = \frac{\textbf{n° prove favorevoli all'evento}}{\textbf{n° totale di prove effettuate}},$$

calcolata, s’intende, dopo aver effettuato un numero “sufficientemente elevato” di prove.

Questo tipo di valutazione di probabilità è in genere destinato, per sua natura, a contenere un (se pur piccolo) errore di approssimazione. Il numero n di prove è da giudicarsi “sufficientemente elevato” se la frequenza relativa, allorquando ci si avvicina a n prove, tende a rimanere pressoché stabile, in quanto si osserva che le sue variazioni si fanno molto ma molto piccole.

c) Def. **ASSIOMATICA** (Kolmogorov, 1933):
non si preoccupa di stabilire “cos’è” la probabilità,
ma solo di definirla implicitamente tramite una famiglia di assiomi.

d) Def. **SOGGETTIVISTA** (De Finetti e altri, 1931):

- INTERPRETAZIONE 1)
  La probabilità “soggettiva” di un evento è a/b se un soggetto “coerente” G è disposto a pagare subito la somma a per ricevere in futuro la somma b (con un guadagno netto, quindi, uguale a $b-a$) nel caso l’evento si verifichi.
  “Coerente” significa che lo stesso soggetto G deve essere disposto in qualsiasi momento a scambiarsi di ruolo con l’altro giocatore G' …
  Ma cosa fa l’altro giocatore? Riceve tanto per cominciare la somma a, ed è disposto a pagare b se l’evento si verifica: quindi anche G, per essere coerente, deve essere disposto a incassare subito la somma a per pagare in un futuro la somma b (con una perdita uguale in valore assoluto a $b-a$) se l’evento si verifica.
- INTERPRETAZIONE 2)
  Anche, in modo del tutto equivalente: la probabilità di un evento E è uguale a s/S se per me è del tutto indifferente l’offerta, da parte di un benefattore,
  ♪ **di una somma s certa, che mi viene pagata in ogni caso**
  ♫ **oppure in alternativa di una somma S, che però mi verrà data solo se l’evento E si verificherà.**

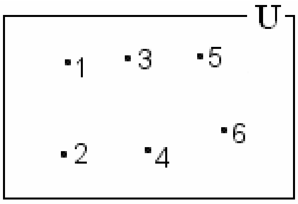
- **Il taglio di queste lezioni è classico-frequentistico al medesimo tempo**.
  Infatti abbiamo posto la definizione di tipo “classico”, e accettato l’asserto “sperimentale” chiamato “**LEGGE EMPIRICA DEL CASO**”, di cui ci serviremo per passare, quando opportuno, da una “visione classica” a una “visione frequentista”:
  “**Quando si ripete per ‘molte’ volte una prova, la frequenza relativa di un esito, cioè il rapporto (n° di prove che hanno avuto quell’esito)/(n° totale di prove) si avvicina ‘molto’ alla probabilità a priori di quell'esito, calcolata tramite il rapporto (n° casi favorevoli)/(n° casi possibili)**”
- Nella risoluzione dei problemi sulla probabilità, è assai proficuo, a parere di chi scrive, utilizzare per certi problemi una visione *classica*, per altri una visione *frequentista*, per altri *entrambe*.
- L’approccio matematico “puro” alla teoria della probabilità sarebbe quello *assiomatico*, che con ogni evidenza è didatticamente improponibile ai fini di una prima presentazione dell’argomento.

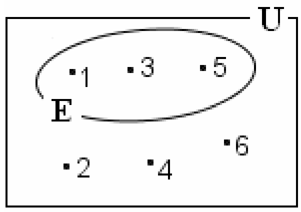
4 - TERMINOLOGIA, SIMBOLOGIA; INDICAZIONI METODOLOGICHE; ESEMPI

4.1 - Terminologia specifica

- **L' "insieme dei casi possibili" viene anche chiamato "insieme universo", o "spazio degli eventi", o talvolta "spazio campionario".**
- **Un sottoinsieme dell'insieme universo viene chiamato "evento".**
- **Un "evento" unitario (costituito cioè da un solo caso) viene detto "evento elementare".**

Facciamo un esempio.
Se la "prova" cui ci riferiamo è il "lancio di un dado", l' "insieme dei casi possibili" è $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.





Un "evento" potrebbe essere il seguente: E = "esce un numero dispari".
Tale "evento" coincide, sostanzialmente, con l'insieme $\{1,\ 3,\ 5\}$ (figura a destra)

Ecco un altro "evento": "esce un numero primo". Tale evento si identifica con l'insieme $\{2,\ 3,\ 5\}$.

Altro evento ancora: "esce il 6". Si tratta di un "evento elementare", che coincide con l'insieme unitario $\{6\}$.

Poiché il numero dei casi favorevoli può andare da 0
ad un valore che comunque non può superare il numero dei casi possibili,
la probabilità $p(\mathrm{A}) = \dfrac{\textbf{numero casi favorevoli}}{\textbf{numero casi possibili}}$
(se c'è "equipossibilità" fra i casi)
di un evento A, è sempre compresa fra 0 e 1:
$\boxed{0 \le p(\mathrm{A}) \le 1}$;

***p*(A) = 0 se e solo se l'evento A è IMPOSSIBILE, *p*(A) = 1 se e solo se l'evento A è CERTO.**

Osserviamo per inciso che questa limitazione del valore della probabilità
fra il confine inferiore 0 (= impossibilità) e il confine superiore 1 (= certezza)
vale qualunque sia l'approccio scelto (classico, frequentista, assiomatico, soggettivista).

4.2 - Indicazioni metodologiche

L'indimenticabile professor Pascal Dupont dell'Università di Torino, nella sua opera "Primo incontro con la Probabilità" (SEI, 1985), suggerisce che di fronte ad un problema di CdP la prima cosa da fare è di concentrarsi bene sull'insieme dei casi possibili (spazio degli eventi). Precisamente:

a. **Letto il testo del problema, concepiamo in cosa consiste la "prova", analizzando bene tutte le modalità della medesima**
b. **Pensiamo ora di eseguire la prova e sforziamoci di immaginare uno qualsiasi dei risultati che possono verificarsi eseguendo la prova**
c. **Concepiamo, "costruiamo" quindi, l' "insieme universo" di tutti i possibili risultati, l' "insieme dei casi possibili", lo "spazio degli eventi"**
d. **Analizziamo con cura se gli eventi considerati si realizzano "pari facilitate".**

4.3 - Anticipazione: l'evento contrario

La somma della probabilità di un evento A con quella dell'evento contrario $\overline{\mathrm{A}}$
è sempre uguale a 1:

$\boxed{p(\mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{A}}) = 1}$ **e quindi** $\boxed{p(\mathrm{A}) = 1 - p(\overline{\mathrm{A}})}$, $\boxed{p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A})}$

Ciò può essere rigorosamente dimostrato e
si deve sostanzialmente al fatto che un evento e il suo contrario, complessivamente,
riempiono tutta la "torta" della certezza, che vale 1.

4.4 - Esempi svolti (sulla definizione di Laplace)

C'è la risoluzione commentata di ciascun problema appena sotto il testo,
♪ *ma se tu la coprissi …*
♫ *… e ci provassi innanzitutto per conto tuo …*
… COME SAREBBE UTILE!!!

❑ **Esempio 1**
Che probabilità c'è, estraendo una carta da un mazzo da scopa ⇨, che si tratti
a) del "settebello" (= il 7 di quadri)?
b) di un "7"?
c) di una carta di "denari" (= di quadri)?
d) di una figura rossa?
e) di una carta dal "2" al "6"?

Risoluzione
Casi possibili = 40; sono evidentemente tutti "equipossibili".
a) 1 solo caso favorevole; $p = 1/40$ b) 4 casi favorevoli; $p = 4/40 = 1/10$ c) 10 casi fav.; $p = 10/40 = 1/4$
d) 6 casi favorevoli; $p = 6/40 = 0{,}15 = 15\%$ e) 20 casi favorevoli; $p = 20/40 = 1/2 = 0{,}5 = 50\%$

❑ **Esempio 2**
Si sceglie a caso una pagina di un libro.
Che probabilità c'è che la prima vocale che si incontra leggendo sia la "e"?

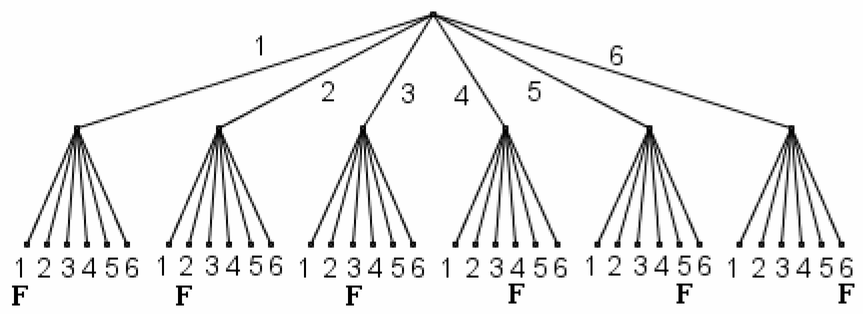
Risoluzione
Sarebbe ingenuo, ed errato, rispondere "1/5". I casi "a", "e", "i", "o", "u" NON sono infatti equipossibili, data la diversa frequenza con cui le varie vocali compaiono nel linguaggio.
La domanda resta senza risposta, a meno di effettuare una ricerca statistica che ci porterebbe sul terreno della "probabilità a posteriori".

❑ **Esempio 3**
Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità che esca lo stesso numero su entrambi?

Risoluzione
Posto $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
l'**insieme dei casi possibili** sarà il prodotto cartesiano $D \times D$
(= l'insieme delle coppie ordinate aventi come primo elemento un elemento preso da D e come secondo elemento ancora un elemento preso da D)
e avrà perciò 36 elementi;
i **casi favorevoli** sono 6 e cioè (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6).
Quindi: $p(\text{stesso numero sui due dadi}) = 6/36 = 1/6$.

	1	2	3	4	5	6
1	F	●	●	●	●	●
2	●	F	●	●	●	●
3	●	●	F	●	●	●
4	●	●	●	F	●	●
5	●	●	●	●	F	●
6	●	●	●	●	●	F

Osserviamo che l'insieme universo si può rappresentare molto bene, in questo problema, con una tabella a doppia entrata (qui a destra) oppure con un grafo (qui sotto):



❑ **Esempio 4**
Che probabilità c'è, avendo a disposizione due mazzi da scopa,
se si estrae una carta da ciascuno di essi, di pescare due figure?

Risoluzione
Casi possibili = $40 \cdot 40 = 1600$ (esempio: il K di Cuori dal 1° mazzo e il 5 di Fiori dal 2° …);
casi favorevoli $12 \cdot 12 = 144$. $p = 144/1600 = 9/100 = 0{,}09$.
Nozioni appena un po' più avanzate di CdP permetterebbero di procedere ancora più semplicemente.

- **Esempio 5**
  Prima di lanciare una coppia di dadi, dei bambini scommettono sulla somma dei punteggi che si otterranno. Fermo restando che i piccoli dovrebbero avere altri giochi, altrimenti si ritroveranno a vent'anni stanchi di vivere e pieni di debiti, qual è il risultato più probabile di una prova aleatoria come questa?

Risoluzione

La somma minima che si può ottenere è 2:
essa si ottiene in 1 solo caso, quando esce 1 sia sul dado "blu" che sul dado "rosso".
Invece, ad esempio, la somma 3 si può ottenere in 2 modi: (1, 2) e (2, 1).
L'uso delle parentesi tonde nel prospetto sottostante **indica che pensiamo la coppia come *ordinata***:
il primo numero esprime l'esito sul dado "blu", il secondo sul dado "rosso". Complessivamente:

2 (1,1) $p(2) = 1/36$
3 (1,2) (2,1) $p(3) = 2/36$
4 (1,3) (3,1) (2,2) $p(4) = 3/36$
5 (1,4) (4,1) (2,3) (3,2) $p(5) = 4/36$
6 (1,5) (5,1) (2,4) (4,2) (3,3) $p(6) = 5/36$
7 (1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3) $\boldsymbol{p(7) = 6/36}$
8 (2,6) (6,2) (3,5) (5,3) (4,4) $p(8) = 5/36$
9 (3,6) (6,3) (4,5) (5,4) $p(9) = 4/36$
10 (4,6) (6,4) (5,5) $p(10) = 3/36$
11 (5,6) (6,5) $p(11) = 2/36$
12 (6,6) $p(12) = 1/36$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La somma che si può ottenere in più modi è 7 (6 modi). La sua probabilità è $p(7) = 6/36 = 1/6$

- **Esempio 6**
  Lanciando successivamente per 10 volte una moneta, stabilire che probabilità c'è di ottenere:
  a) tutte Teste b) Testa le prime 4 volte, Croce le rimanenti

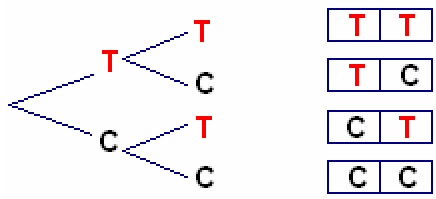
Risoluzione

Per entrambi i quesiti, i casi possibili sono tanti quante le sequenze di 10 simboli,
ciascuno dei quali può valere T o C; ad esempio, un caso possibile è TTTCCTCTTC.
Perciò abbiamo $2^{10} = 1024$ casi possibili.
Pensando ad un diagramma ad albero si capisce bene per qual motivo il numero di casi possibili è 1024.

Avendo a disposizione 10 caselle con la possibilità di riempire ciascuna casella o con "T" o con "C", quante sequenze fra loro distinte è possibile scrivere? Ecco qui davanti a me la sequenza delle 10 caselle da riempire:

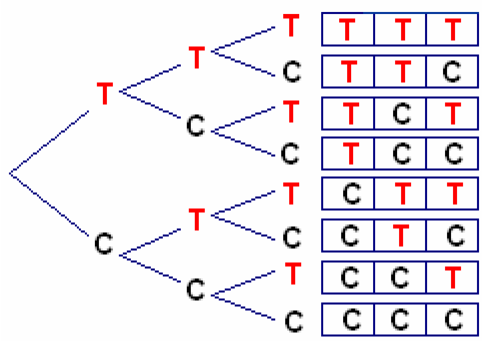
Per la prima casella, ho evidentemente due possibilità: **T** o **C**.

Comunque io abbia scelto di riempire la 1ª casella,
per la 2ª mi si apre un ventaglio di 2 possibilità: **T** o **C**.



Le possibilità, per quanto riguarda le **prime 2 caselle**,
sono espresse dal diagramma ad albero qui a destra:
4 = 2² possibilità (TT, TC, CT, CC)

Comunque io abbia scelto il contenuto delle prime 2 caselle,
per riempire la 3ª mi si apre ancora un ventaglio di 2 possibilità.



Le possibilità, per quanto riguarda le **prime 3 caselle**,
sono espresse dal diagramma ad albero qui a destra:
8 = 2³ possibilità
(TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC)

Ogni volta che penso a una casella in più, il numero di modi
in cui è possibile riempire la sequenza di caselle considerate
raddoppia per via del ventaglio di 2 possibilità che si apre !!!

A questo punto, è evidente che: $\mathbf{10\ caselle \to 2^{10} = 1024\ possibilità}$.

a) Il caso favorevole è 1 solo: TTTTTTTTTT. La probabilità richiesta è $p(\text{tutte T}) = 1/1024 = 0{,}0009765$
b) Il caso favorevole è 1 solo: TTTTCCCCCC. La probabilità richiesta è $p(\text{TTTTCCCCCC}) = 1/1024$.

- **Esempio 7**

Avevo in tasca 5 monete, 2 da 1 euro e 3 da 2 euro. Pesco dalla tasca, prendendo le prime 2 che mi capitano fra le dita. Calcola la probabilità che queste formino un totale di
a) 4 euro b) 2 euro c) 1 euro

Risoluzione

Possiamo schematizzare così: $\begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 \\ 1\ euro & 1 & 2 & 2 & 2 \end{matrix}$

Per tutti e tre i quesiti l'insieme dei casi possibili è
(**notare l'uso delle parentesi graffe e non tonde intorno a ogni coppia, per indicare che la coppia viene qui pensata senza che abbia importanza l'ordine dei due elementi**):

$$\begin{aligned} \{\ & \{M_1, M_2\};\ \{M_1, M_3\};\ \{M_1, M_4\};\ \{M_1, M_5\}; \\ & \{M_2, M_3\};\ \{M_2, M_4\};\ \{M_2, M_5\}; \\ & \{M_3, M_4\};\ \{M_3, M_5\}; \\ & \{M_4, M_5\}\ \} \end{aligned}$$

Possiamo valutare tutti e 10 questi casi come *equi*possibili: non c'è ragione per l'ipotesi contraria.
Ora, considerando le somme dei valori delle coppie di monete, avremo

$$\begin{aligned} &\{M_1, M_2\}\ \ 2\ euro \\ &\{M_1, M_3\}\ \ 3\ euro \\ &\{M_1, M_4\}\ \ 3\ euro \\ &\{M_1, M_5\}\ \ 3\ euro \\ &\{M_2, M_3\}\ \ 3\ euro \\ &\{M_2, M_4\}\ \ 3\ euro \\ &\{M_2, M_5\}\ \ 3\ euro \\ &\{M_3, M_4\}\ \ 4\ euro \\ &\{M_3, M_5\}\ \ 4\ euro \\ &\{M_4, M_5\}\ \ 4\ euro \end{aligned}$$

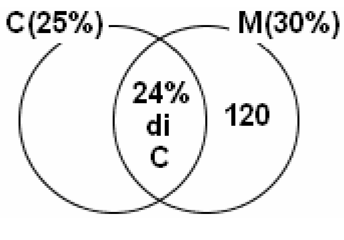
Avremo dunque: $a)\ \ p = \frac{3}{10} \qquad b)\ \ p = \frac{1}{10} \qquad c)\ \ p = 0\ \ (evento\ impossibile)$

- **Esempio 8**

In una scuola, il 25% degli studenti segue un corso di Computer e il 30% un corso di Musica.
Il 24% dei partecipanti a Computer fa anche Musica; in 120 fanno Musica, ma non Computer.
a) Preso a caso uno studente, che probabilità c'è che faccia Computer ma non Musica?
b) Preso a caso uno studente che faccia Musica, che probabilità c'è che frequenti anche Computer?

Risoluzione

Converrà innanzitutto rappresentare la situazione con un diagramma di Venn:

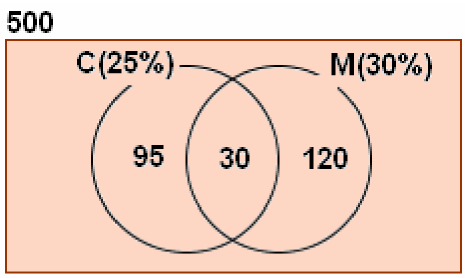


$$C \cap M:\ \ \frac{24}{100} \cdot \frac{25}{100} = \frac{6}{100}$$

quindi coloro che fanno sia Computer che Musica sono il 6% del totale
e dunque sono la 5^a parte di quelli che fanno Musica (30% del totale).
Perciò quei 120 in $M - C$ saranno i 4/5 degli elementi di M: da cui

$$\frac{4}{5}M = 120 \ \rightarrow \ M = 150$$

(osserviamo che, in modo disinvolto ma efficace dal punto di vista "pratico", stiamo usando una stessa lettera per indicare tanto un *insieme* quanto il *numero dei suoi elementi*)



Allora possiamo con semplici passaggi determinare il numero di studenti che stanno nei vari insiemi, compreso il numero totale di studenti della scuola, che risulta essere di 500.

Per dar risposta ai due quesiti basta osservare il diagramma:

a) $p = \frac{95}{500} = \frac{19}{100} = 19\%$ b) $p = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

4.5 - ESERCIZI (risposte alla fine della rassegna)

COSA DOBBIAMO DOMANDARCI SEMPRE:
- **Qual è l'insieme dei casi possibili?**
- **C'è "equipossibilità"?**
- **Quanti sono, questi casi (equi)possibili?**
- **E quanti sono invece i casi favorevoli?**

DUNQUE probabilità = $\dfrac{\textbf{n° casi favorevoli}}{\textbf{n° casi (equi)possibili}}$

1) Lanciando un dado, che probabilità c'è che esca
 a) un multiplo di 3?
 b) un numero diverso da 6?
 c) un numero primo?

2) In una classe vi sono 18 ragazzi e 9 ragazze. Se viene estratto coi bigliettini un cognome a caso per la prima interrogazione di Storia, che probabilità c'è che si tratti di un maschio?

3) Un amico ha acquistato 100 biglietti di una lotteria nazionale.
Ha poi saputo che i biglietti stampati sono 20 milioni, e sono stati venduti tutti.
Che probabilità ha di vincere il 1° premio?

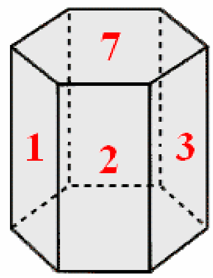
4) Si gioca alla tombola (numeri interi da 1 a 90).
Che probabilità c'è che il primo estratto sia
 a) un multiplo di 13?
 b) un quadrato perfetto?
 c) uno dei numeri che sono divisibili per 10 o per 12?
 d) un numero minore di 91?
 e) un numero divisibile per 91?

5) Se il nome di una ragazza inizia con una vocale, che probabilità c'è che questa sia "A"?

6) Se si "pesca" a caso un intero da 1 a 20, stabilisci che probabilità c'è che sia divisibile:
 a) sia per 2 che per 3 b) per 2 e/o per 3.

7) Da un mazzo da scopa (40 carte) ⇨ se ne pesca 1. Se mi dicono che NON è il "settebello" (7 di denari), che probabilità c'è che la carta sia comunque di denari? ["Denari" = "Ori" = "Quadri"]

8) Si estrae a sorte un numero di 2 cifre, poi si lancia una moneta e se esce "Testa" se ne prende la prima cifra, altrimenti la seconda.
Che probabilità c'è di ottenere in questo modo
 a) un "9"?
 b) uno "0"?



9) Lancio un dado a 8 facce, numerate da 1 a 8, della forma illustrata in figura. →
Che probabilità c'è che si presenti sulla faccia in alto un multiplo di 3?

10) Riempi i puntini:
Se un evento è certo, detta p la sua probabilità, è $p = \ldots$
Se un evento è impossibile, detta p la sua probabilità, è $p = \ldots$
La probabilità di un evento è sempre compresa fra un minimo di … e un massimo di …
e il primo di questi valori si ha soltanto nel caso in cui l'evento sia …
mentre il secondo valore si ha soltanto nel caso in cui l'evento sia …

11) La probabilità dell'evento "lanciando un dado, esce un numero minore di 7" è … perché l'evento è … ;
sempre lanciando un dado, la probabilità dell'evento "esce un numero maggiore di 7" è …
perché questo evento è …

12) In un cassetto ci sono 4 fazzoletti bianchi e 3 scozzesi.
 a) Qual è la probabilità che estraendone uno a caso, esso sia bianco?
 b) Qual è la probabilità che, estraendo 4 fazzoletti a caso, almeno 1 di essi sia bianco?

13) In un'urna ci sono 2 palline Bianche, 2 Rosse e 2 Nere.
 a) Qual è la probabilità che, estraendo 1 pallina, essa sia Nera?
 b) Se si estrae una pallina e questa risulta Nera, estraendone poi una seconda, senza aver rimesso la prima nell'urna, che probabilità c'è che sia Nera anch'essa?

14) Sul bancone di un bar, sono rimaste 10 brioches esternamente identiche,
ma 2 di esse hanno il cioccolato dentro, l'unico ripieno che non mi piace.
Presa una brioche a caso, che probabilità c'è che sia di mio gradimento?

15) Qual è la probabilità che il 1° estratto nella prossima estrazione alla ruota di Napoli sia un numero primo?

16) E' corretto dire che, se si lancia un dado, i casi possibili sono 2:
"numero pari" o "numero dispari", quindi, ad esempio, $p(pari)=1/2$?

17) Una piccola pesca di beneficenza ha 240 biglietti, numerati da 1 a 240; io sono in possesso del numero 120.
Viene estratto il numero cui spetta il 1° premio.
Io domando se quel numero è di 3 cifre, e mi rispondono "sì".
Domando se queste cifre sono tutte minori di 3, e mi rispondono "sì".
Chiedo infine se le cifre sono tutte minori di 2 e mi rispondono "no".
Con queste informazioni, che probabilità ho di aver vinto il 1° premio?

18) I 10 articoli di una vetrina hanno tutti prezzi diversi.
Che probabilità ho, scegliendone 1 a caso, che sia il più a buon mercato?
Che probabilità ho, scegliendone 2 a caso, che uno sia più caro dell'altro?

19) Ho giocato il 49 sulla ruota del Lotto ⇨ di Napoli.
Che probabilità c'è che esca come primo numero estratto?
… Mi dicono ora che il primo estratto sulla ruota di Napoli è stato un multiplo di 7, ma non è stato il 7.
Che probabilità c'è che si tratti proprio del 49?

20) Mettiti d'accordo con un gruppetto di amici. Suddividetevi in coppie (almeno 5 coppie).
In ciascuna coppia, uno dei due mischia le carte di un mazzo da scopa, e l'altro estrae a caso una carta;
questo, lo si fa per 200 volte complessivamente, sempre reinserendo la carta nel mazzo dopo l'estrazione.
Si tratta di annotare quante volte complessivamente esce "cuori"
per verificare, alla fine, se la "legge empirica del caso" appare rispettata.

21) Come per l'esercizio/attività precedente, soltanto che invece di estrarre una carta si lanciano due dadi
e si fa la somma dei punteggi ottenuti (per le probabilità *a priori* dei vari esiti vedi l'Esempio 5 di pag. 483)

22) L'insieme universo dei casi equipossibili quando si valuta la probabilità
che "lanciando due monete, escano due croci", è:
a) {T, C, T, C} b) {T, C} c) {TT, TC, CT, CC} d) nessuno dei precedenti

23) Quanti sono i casi possibili quando si lancia una moneta
a) 3 volte di seguito? b) 4 volte di seguito? c) 8 volte di seguito?

24) Si lanciano in aria due monete. Che probabilità c'è che esca "Testa" su entrambe?

25) a) Calcola la probabilità che lanciando simultaneamente 2 monete gli esiti siano uguali.
b) E se le monete fossero 3, quale sarebbe la probabilità che gli esiti siano tutti uguali? c) E se fossero 4?

26) Si lancia per due volte una moneta. Che probabilità c'è di ottenere "Testa" almeno una volta?

27) Si lanciano 3 monete. Un caso possibile è, ad esempio, TTC.
Che probabilità c'è di non ottenere mai "Testa"? a) 1/4 b) 1/6 c) 1/8 d) 1/9

28) Se si lanciano 3 monete, che probabilità c'è che esca una volta "Testa" e le rimanenti "Croce"?

29) Si lanciano 3 monete. Che probabilità c'è di ottenere almeno una "Testa"? a) 8/9 b) 7/8 c) 3/4 d) 2/3

30) Si lanciano 3 monete. Che probabilità c'è di ottenere almeno due "Teste"? a) 3/4 b) 2/3 c) 1/2 d) 1/3

31) Si lancia una moneta per 4 volte consecutive. Che probabilità c'è che
a) non si abbiano mai 2 esiti successivi uguali? b) si abbiano almeno 2 esiti successivi uguali?

32) Se si lancia una puntina da disegno, essa potrà fermarsi sul tavolo (o sul pavimento)
con la punta in su o con la punta in giù. Qual è la probabilità di ciascuno dei due eventi?

33) Il numero 58, sulla ruota del Lotto di Napoli, non è mai uscito nelle precedenti 150 estrazioni. Invece il 59
è uscito nell'estrazione più recente. Conviene di più giocare il 58 o il 59 nell'estrazione di questa sera?

34) Nel gioco del Superenalotto ⇨, c'è qualche sestina che è più conveniente giocare?

35) Se so che un'amica è nata a Giugno, e anch'io sono nato a Giugno,
che probabilità c'è che il nostro compleanno cada nello stesso giorno?

36) Una classe di 20 studenti ha i banchi doppi: ogni banco, insomma, è condiviso da due studenti.
I posti a sedere vengono sorteggiati.
Giuseppe e Luca si detestano. Che probabilità c'è che l'estrazione li condanni a esser compagni di banco?

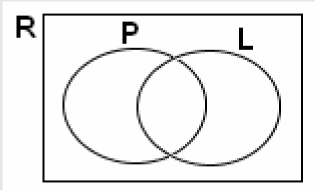
37) La probabilità di essersi ammalati di scarlattina prima di iniziare le scuole elementari
è valutata, in Italia, intorno al 35%. All'inizio dell'anno scolastico, in una Prima elementare
con 240 alunni, quanti saranno coloro che hanno già fatto la scarlattina?

38) Lanciando due dadi, l'insieme dei casi possibili può essere rappresentato tramite lo schema riportato qui a fianco.
Tre casi possibili sono, ad esempio: (4, 6); (3, 3); (6, 4).
Ora, nello schema, indica con una crocetta l'insieme dei casi favorevoli all'evento "la somma dei due punteggi usciti è 4".
Che probabilità ha l'evento in questione?
a) 1/6 b) 1/12 c) 3 d) 1/9

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

39) a) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, l'esito del lancio sia un "doppio 1"
b) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, su uno di questi esca "1" e sull'altro "6"
c) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, su uno di essi esca un numero pari e sull'altro un dispari
d) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, la faccia "1" si presenti una e una sola volta
e) Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, la faccia "1" si presenti almeno una volta

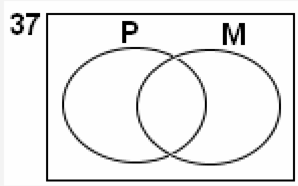
40) Lanciando 1000 volte una coppia di dadi, quante volte ci aspettiamo che esca lo stesso numero su entrambi?



41) Il 20% dei residenti in un comune è pensionato, e il 10% è laureato.
Però soltanto il 5% dei pensionati, in quel comune, è laureato.
Se si estrae a caso il nome di un abitante, che probabilità c'è che sia:
I) pensionato e laureato II) né pensionato, né laureato
III) pensionato, ma non laureato IV) laureato, ma non pensionato
V) pensionato o in alternativa laureato

42) Il 70% degli iscritti ad un club sono maschi; delle femmine, quest'anno il 20% ha lasciato al club una donazione, mentre solo il 10% dei maschi lo ha fatto.
a) Preso un iscritto a caso, determinare la probabilità che abbia lasciato una donazione al club.
b) Preso a caso un membro che abbia lasciato una donazione, determinare la probabilità che sia maschio.

43) Alla Roulette Francese possono uscire i numeri 0, 1, 2, 3, ... , 36
e giocare "Pair" significa puntare su tutti i numeri >0 pari,
mentre giocare "Manque" equivale a puntare sui numeri da 1 fino a 18.
Nello schema a fianco, scrivi all'interno di ciascuno dei 4 territori quanti sono gli elementi dell'insieme corrispondente.
Se metto un gettone su *Pair* e un altro su *Manque*, che probabilità ho di
I) vincere su entrambe le giocate? II) vincere su almeno una giocata?
III) perdere su entrambe le giocate? IV) vincere su esattamente 1 giocata?



Lo "0" in matematica fa parte dei numeri pari, alla roulette invece è convenzionalmente considerato "neutro".

44) Il 30% delle famiglie di un paese ha un cane; di queste il 40% ha pure un gatto.
Fra tutte le famiglie che possiedono un gatto, il 24% possiede anche un cane.
Estratta a sorte una famiglia in quel paese, determinare la probabilità che possegga almeno un animale domestico fra cane e gatto.

45) In una fabbrica ci sono due macchine:
A, che produce pezzi di cui il 5% è difettoso, e B, i cui pezzi sono addirittura difettosi al 10%.
Se ho qui davanti a me un certo numero di pezzi, e so che i 2/5 di essi provengono dalla macchina A mentre i rimanenti dalla macchina B, potrò determinare la probabilità che uno di essi, scelto a caso, sia buono?
E la probabilità che un pezzo preso a caso, qualora risulti buono, provenga dalla macchina A?

46) Consideriamo un insieme di 1200 famiglie in ognuna delle quali ci siano esattamente 2 figli.
Supponiamo altresì che la probabilità di nascer maschio sia esattamente uguale a quella di nascer femmina (anche se nella realtà c'è un piccolissima differenza).
I) in quante, pressappoco, fra queste famiglie, ci sarà almeno una figlia femmina? a) 600 b) 800 c) 900
II) in quante, pressappoco, fra queste famiglie, il secondogenito è una femmina? a) 400 b) 600 c) 800

47) Quattro fratelli - Anna, Bruno, Carlo e Dario - hanno preso questa mattina i voti seguenti: 4, 5, 7, 9.
Determina la probabilità che la mamma, convocando due di essi a caso, trovi la media dei loro due voti insufficiente (<6).

48) Ci sono 4 carte, una con entrambe le facce Blu, una con entrambe le facce Rosse, le due rimanenti ciascuna con una faccia Blu e l'altra Rossa.
Un mio amico le mette in un cassetto.
Io estraggo con gli occhi bendati una carta, poi mi viene tolta la benda e io vedo il colore di una faccia.
Che probabilità c'è che anche l'altra abbia lo stesso colore?

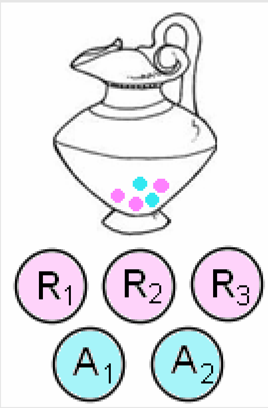
49) Sul ripiano della reception dell'hotel ci sono tre chiavi, fra cui quelle delle stanze di Aldo e di Bruno. Se Aldo e Bruno scegliessero a caso, senza guardare, che probabilità ci sarebbe che
a) becchino entrambi la chiave giusta?
b) almeno uno dei due becchi la chiave giusta?
c) nessuno dei due becchi la chiave giusta?

50) Un'urna contiene un certo numero x di palline bianche e il numero doppio $2x$ di palline nere. Se si aggiungessero altre 3 palline bianche, la probabilità di estrarre una "bianca" raddoppierebbe. Quanto vale x?

51) Un'urna contiene 120 palline; se ne estrae una, se ne osserva il colore, poi la si reimmette nell'urna e se ne estrae un'altra. Ripetendo la prova per 400 volte, per 52 volte la pallina risulta blu. Quante palline blu contiene l'urna?

52) Una moneta è regolare, un'altra è scandalosamente truccata perché porta due "Teste". Vengono poste in un sacchetto, poi ne si pesca una a caso, la si lancia ed … esce "Testa". Che probabilità c'è che la moneta pescata sia quella truccata?

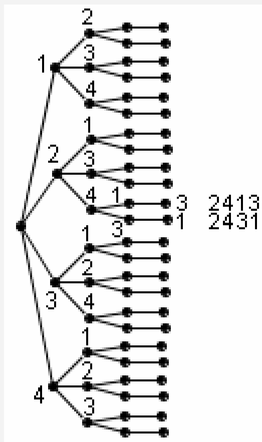
53) Se tre persone sono in attesa a uno sportello, che probabilità c'è che il loro ordine nella coda coincida con l'ordine alfabetico dei cognomi?
a) 1/27 b) 1/9 c) 1/8 d) 1/6



54) Un'urna contiene 3 palline Rosa e 2 Azzurre. Se se ne estrae una e poi, SENZA aver "reimbussolato" (= reintrodotto nell'urna) la pallina estratta, se ne estrae una seconda. Si vuole valutare la probabilità che le due palline estratte siano di colore diverso.
I) Perché non è giusto dire che i casi equipossibili sono RR, RA, AR, AA?
II) Dette R_1, R_2, R_3, A_1, A_2 le palline, uno dei casi equipossibili è ad esempio A_2R_1, che considereremo distinto da R_1A_2. Quanti sono in totale i casi equipossibili?
III) Quanti sono in totale i casi favorevoli all'evento "colore diverso"?
IV) Se si fanno 500 prove, quante volte ci aspettiamo pressappoco che si verifichi l'evento "colore diverso"?

55) Un'urna contiene quattro biglie numerate: 1, 2, 3, 4. Le si estrae dall'urna una dopo l'altra. Che probabilità c'è che in questo modo le palline vengano estratte nello stesso ordine del numero che portano?
a) 1/64 b) 1/27 c) 1/24 d) 1/16

Per contare il numero dei casi possibili (un caso possibile è, ad esempio, 2-4-3-1) puoi ricorrere, se lo conosci, al "Calcolo Combinatorio", oppure pensare a un "diagramma ad albero". Per il 1° numero uscito c'è un ventaglio di 4 possibilità; per ognuna di queste 4 possibilità, si apre un ventaglio di 3 possibilità per il 2° numero; ecc.

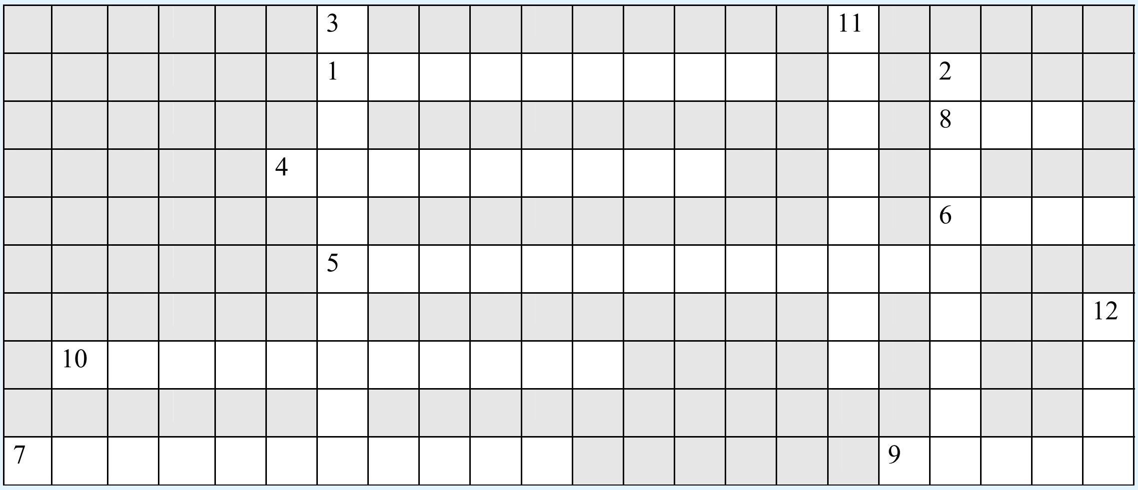


56) In un'urna, ci sono 3 palline Bianche e 2 Nere. Viene estratta una pallina, che viene messa da parte (NON viene, cioè, "reimbussolata" che significherebbe "rimessa nell'urna"); poi dall'urna con una pallina in meno viene estratta una seconda pallina. Valutare la probabilità che le due palline estratte siano
a) entrambe bianche b) entrambe nere c) di colore diverso

57) In un'urna, ci sono 3 palline Bianche e 2 Nere. Viene estratta una pallina, che viene poi rimessa nell'urna (= "reimbussolata"); viene quindi fatta un'altra estrazione. Valutare la probabilità che le due palline estratte siano
a) entrambe bianche b) entrambe nere c) di colore diverso

58) Un'urna contiene 5 palline numerate 1, 2, 3, 4, 5. Se ne pesca una e la si mette da parte, poi si sommano i numeri letti sulle altre. Che probabilità c'è, così facendo, di ottenere un numero
a) pari? b) dispari? c) maggiore di 10? d) maggiore di 14?

59) La "probabilità" di un evento è un numero che misura la facilità che quell'evento ha di verificarsi, in una prova "(1)" ossia "il cui esito sia casuale".
Essa è data dal rapporto, cioè dal (2), fra il numero dei casi (3) a quell'evento, e il numero dei casi (4), purché però i casi in questione tendano a verificarsi con la stessa "facilità", cioè siano fra loro "(5)".
La probabilità può dunque andare da un minimo di (6), quando l'evento è (7), a un massimo di (8) quando invece l'evento è (9).
L'insieme dei casi possibili si dice "insieme universo", o "spazio degli eventi", o "spazio (10)".
Una legge sperimentale afferma che, quando si fa un numero elevato di prove in ciascuna delle quali potrebbe verificarsi, con probabilità p, un dato evento, allora il rapporto fra il n° di prove in cui quell'evento si è verificato, e il n° totale delle prove effettuate, tende ad avvicinarsi a p: questo enunciato prende il nome di "legge (11) del (12).



RISPOSTE

1) a) 1/3 b) 5/6 c) 1/2 2) $p(\text{maschio}) = 18/(18+9) = 18/27 = 2/3$
3) $100/20\,000\,000 = 1/200\,000 = 0{,}000005$ 4) a) 1/15 b) 1/10 c) 1/6 d) 1 e) 0
5) I 5 casi sono tutt'altro che equipossibili. Non si può rispondere, se non eventualmente dopo aver effettuato una indagine statistica accurata sulla popolazione femminile locale.
6) a) $p(\text{sia per 2 che per 3}) = 3/20$ b) $p(\text{per 2 e/o per 3}) = 13/20$ 7) $9/39 = 3/13$
8) I numeri di 2 cifre sono 90: si hanno 90 "prime cifre" e 90 "seconde cifre", per un totale di 180 cifre. Ora, le modalità della prova aleatoria assicurano che ognuna di queste 180 cifre può essere ottenuta con la stessa facilità (è proprio così … pensaci bene!).
Ma delle 180 cifre in questione, 19 sono "9" e 9 sono "0". Perciò $p(9) = 19/180$; $p(0) = 9/180 = 1/20$
9) Non si può rispondere se non attraverso una visione "statistica", lanciando per moltissime volte quel dado per determinare il rapporto fra il numero di lanci nei quali è uscito un multiplo di 3, e il n° totale di lanci. Infatti il dado non presenta una simmetria tale che si possano ritenere *equi*possibili tutti e 8 gli esiti.
10) $p = 1$; $p = 0$; fra un minimo di 0 e un massimo di 1; impossibile; certo 11) 1; certo; 0; impossibile
12) a) 4/7 b) E' uguale a 1, perché l'evento è certo 13) a) 2/6 = 1/3 b) 1/5 14) 8/10 = 4/5 15) 24/90 = 4/15
16) E' corretto, perché una semplicissima analisi porta a stabilire che i due casi (ciascuno dei quali, volendo, è composto di 3 sottocasi …) sono *equi*possibili. Non altrettanto si potrebbe invece dire, ad esempio, per il lancio di una puntina da disegno: anche qui avremmo due casi, ma *non* equipossibili.
17) 1/14 18) 1/10; 1 19) 1/90; 1/11 22) c
23) a) TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC quindi $8 = 2^3$ b) $16 = 2^4$ c) $2^8 = 256$
24) I casi possibili sono 4: TT, TC, CT, CC, e sono tutti *equipossibili*. Il caso favorevole è 1 solo.
$p = 1/4 = 0{,}25 = 25\%$
25) a) 1/2 b) 1/4 c) 1/8
26) Casi possibili: TT, TC, CT, CC. Casi favorevoli a "almeno 1 Testa": TT, TC, CT. $p = 3/4$
27) Casi possibili: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC.
Casi favorevoli a "mai Testa": 1 solo (CCC). $p = 1/8$.
28) Casi possibili: 8 (TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC).
Casi favorevoli: 3 (TCC, CTC, CCT). $p = 3/8$.
29) Casi possibili: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC.
Casi favorevoli a "almeno 1 Testa": TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT. $p = 7/8$.
30) Casi possibili: TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC.
Casi favorevoli a "almeno 2 Teste": TTT, TTC, TCT, CTT. $p = 4/8 = 1/2$.

31) a) I casi possibili sono 16 (tutti fra loro *equipossibili*):

TTTT, TTTC, TTCT, TTCC, TCTT, TCTC, TCCT, TCCC, CTTT, CTTC, CTCT, CTCC, CCTT, CCTC, CCCT, CCCC.

I casi favorevoli sono 2: TCTC e CTCT. La probabilità richiesta è 2/16 = 1/8 = 0,125 = 12,5%.

b) I casi favorevoli sono 14 (16 meno i 2 di cui al punto a)). La probabilità richiesta è 14/16 = 7/8.

32) I due casi "punta in su" e "punta in giù" *non* sono, evidentemente, equipossibili.
Le probabilità richieste potranno essere valutate solamente *a posteriori*, dopo aver effettuato un numero elevato di lanci: si porrà $p = \textit{numero lanci che hanno avuto quell'esito} / \textit{numero totale lanci}$

33) E' del tutto indifferente. L'urna "non ha memoria", la "facilità" di uscita di un dato numero in un'estrazione non è in alcun modo condizionata dagli esiti delle estrazioni precedenti.
La probabilità di uscita del 58 o del 59 sarà identica, nell'estrazione di questa sera.
Certo, PRIMA della lunghissima sequenza di non-uscite del 58, si sarebbe potuto affermare:
"è estremamente poco probabile che il 58 non esca mai nelle prossime 150 o 151 estrazioni".
Ma DOPO che l'evento "raro" della non-uscita per 150 volte di fila si è verificato, "si ricomincia da capo": la probabilità di uscita del 58 alla prossima estrazione è uguale a quella che il 58 ha avuto, o avrà, di essere estratto, in una qualsivoglia determinata estrazione nel passato o nel futuro.

34) Ogni sestina fissata ha la stessa probabilità, bassissima, di uscire.
Però, in caso di vincita, il montepremi viene suddiviso in parti uguali fra tutti coloro che hanno indovinato.
Quindi, forse, le sestine più "regolari", come ad esempio la 1 2 3 4 5 6 o la 10 20 30 40 50 60 oppure la 11 22 33 44 55 66, POTREBBERO essere più convenienti, in quanto si può ipotizzare che tendano a essere giocate più raramente. Infatti la mente umana in genere è portata erroneamente a ritenerle meno probabili di quelle più "disordinate", soltanto per il fatto (irrilevante per il comportamento dell'urna) che la loro "individualità" salta agli occhi in modo più marcato, mentre ciò non accade, ad esempio, per una sestina come 22 35 47 59 81 86 .
D'altra parte, occorrerebbe anche valutare l'eventualità che il medesimo ragionamento venga effettuato da più persone … nella misura in cui ciò dovesse avvenire, giocare tali sestine "regolari" finirebbe per perdere la convenienza di cui si parlava, e anzi risultare controproducente.
Consiglio: non giocare al Superenalotto, o al limite giocare solo 1 euro (possibilmente con un "socio" ☺).

35) 1/30

36) Dal punto di vista probabilistico, evidentemente nulla cambia se si suppone che Giuseppe e Luca siano rispettivamente il primo e il secondo a cui viene attribuito, per estrazione, il posto.
Ad ogni posto si assegna dunque un numero (da 1 a 20), e si preparano i bigliettini.
Si siede per primo Giuseppe, al posto per lui sorteggiato.
Rimangono 19 sedie libere, fra le quali 1 sola è quella accanto a Giuseppe.
La probabilità che Luca si sieda accanto a Giuseppe è dunque uguale a 1/19
(ossia alla probabilità che, sui 19 biglietti rimanenti dopo la prima estrazione, venga estratto proprio quello che corrisponde alla sedia accanto a quella dove sta Giuseppe).

37) Intorno al 35% di 240, che è poi 84; chiaramente, la stima è approssimativa!

38) $p = 3/36 = 1/12$. La somma dei punteggi è 4 nei casi indicati in figura: →

	1	2	3	4	5	6
1			X			
2		X				
3	X					
4						
5						
6						

39) a) 1/36 b) 1/18 c) 1/2 d) 5/18 e) 11/36

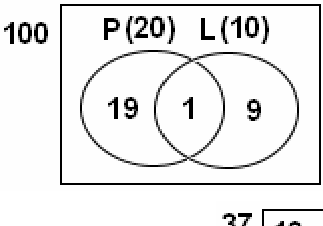
40) La probabilità dell'evento "esce lo stesso numero su entrambi i dadi" è 1/6.

- I casi possibili sono infatti 36 (1 sul dado "rosso" e 1 sul "blu", 1 sul "rosso" e 2 sul "blu", ecc. ecc.) e quelli favorevoli 6, ma $6/36 = 1/6$;
- oppure: il primo dado che atterra, potrà mostrare un punto qualsiasi, dopodiché c'è una possibilità su 6 che anche il secondo dado mostri proprio quel punto.

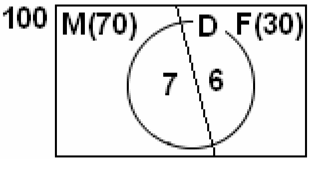
Se una coppia di dadi viene lanciata 1000 volte (1000 è già un numero piuttosto elevato, quindi dovrebbero essere evidenti le implicazioni della "legge empirica del caso"), la frequenza di uscita di una coppia di esiti uguali si aggirerà intorno a $1/6 \cdot 1000 = 166,66...$ per cui ci aspettiamo di osservare questo evento un numero di volte che non si discosti troppo da tale valore.

41) I) 1/100
II) 71/100
III) 19/100
IV) 9/100
V) 29/100

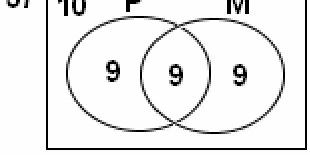
Nel diagramma qui a fianco abbiamo "finto" che gli abitanti della città siano esattamente 100.



42)
a) 13%
b) $7/13 \approx 54\%$

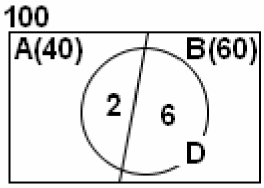


43) I) 9/37
II) 27/37
III) 10/37
IV) 18/37



44) 68%

45) Sì, approssimativamente.
Si può fare un diagramma di Venn,
pensando per fissare le idee a 100 pezzi (figura qui a destra) …
Si trova $p(buono)=92/100=92\%$.



Anche: detto n il numero totale di pezzi che ho davanti a me,
il numero di pezzi prodotti da A
sarà $\frac{2}{5}n$ e il numero di quelli prodotti da B sarà $\frac{3}{5}n$. I pezzi difettosi saranno in totale
$\frac{2}{5}n\cdot\frac{5}{100}+\frac{3}{5}n\cdot\frac{10}{100}=\frac{1}{50}n+\frac{3}{50}n=\frac{4}{50}n=\frac{2}{25}n$ (all'incirca) e quelli buoni saranno quindi $n-\frac{2}{25}n=\frac{23}{25}n$.

La probabilità, pescando a caso un pezzo, di trovarlo buono, si aggirerà intorno a $\frac{\frac{23}{25}n}{n}=\frac{23}{25}=0{,}92=92\%$

La risposta alla seconda domanda è $38/92=19/46\approx 41\%$.

46) I) p(almeno una figlia femmina) = ¾. Quindi, per la Legge Empirica del Caso,
$$\frac{n°\ \textit{famiglie con almeno 1 figlia femmina}}{n°\ \textit{totale famiglie}}\approx\frac{3}{4}\ \rightarrow\ \frac{x}{1200}\approx\frac{3}{4}\ \rightarrow\ x\approx 900$$
II) p(secondogenito femmina) = ½. Quindi, per la Legge Empirica del Caso,
$$\frac{n°\ \textit{famiglie con figlio secondogenito femmina}}{n°\ \textit{totale famiglie}}\approx\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \frac{x}{1200}\approx\frac{1}{2}\ \rightarrow\ x\approx 600$$

47) 1/3 48) 1/2

49) a) Indichiamo le 3 chiavi con A, B, C, dove A è la chiave di Aldo e B quella di Bruno.
Sceglie Aldo, sceglie Bruno, la chiave non scelta resta dov'era.
I casi possibili (equipossibili) sono: ABC (unico caso favorevole); ACB; BAC; BCA; CAB; CBA
e la probabilità richiesta è 1/6.
b) 1/2 c) 1/2

50) $\frac{x+3}{x+2x+3}=2\cdot\frac{x}{x+2x}$ $\quad\frac{x+3}{3x+3}=2\cdot\frac{\cancel{x}}{3\cancel{x}}$ $\quad\frac{x+3}{3(x+1)}=\frac{2}{3}$ $\quad\frac{x+3}{\cancel{3(x+1)}}=\frac{2(x+1)}{\cancel{3(x+1)}}$ $\quad x+3=2x+2\ \rightarrow\ x=1$

51) $52/400=0{,}13$ e $0{,}13\cdot 120=15{,}6$. Il numero delle palline blu nell'urna sarà di 15 o 16
o comunque non eccessivamente distante da questi valori.

52) 2/3. Se non ne sei del tutto convinto, pensa: su 1000 lanci, pressappoco 250 volte uscirebbe l'unica croce C, circa 250 la testa T1 sul retro della croce, circa 250 volte la testa T2 della moneta con due teste, e circa 250 volte l'altra faccia T3 della stessa moneta. Per 750 volte all'incirca, comparirebbe una testa, e per circa 500 di queste 750 volte essa proverrebbe dalla moneta contraffatta.

53) 1/6

54) I) Perché non sono equipossibili! Essendoci 3 palline Rosa e 2 sole Azzurre, il caso AA, per esempio, si verifica meno facilmente del caso RR II) 20 III) 12 IV) pressappoco 300

55) 1/24

56) I casi possibili (equipossibili!) sono in numero di $5\cdot 4=20$:
B1+B2 B1+B3 B1+N1 B1+N2 B2+B1 B2+B3 B2+N1 B2+N2
B3+B1 B3+B2 B3+N1 B3+N2 N1+B1 N1+B2 N1+B3 N1+N2
N2+B1 N2+B2 N2+B3 N2+N1
a) i casi favorevoli sono $3\cdot 2=6$. La probabilità è $p(\text{2 Bianche})=6/20=3/10=0{,}3$
b) i casi favorevoli sono $2\cdot 1=2$. La probabilità è $p(\text{2 Nere})=2/20=1/10=0{,}1$
c) i casi favorevoli sono $3\cdot 2+2\cdot 3=12$. La probabilità è $p(\text{colori diversi})=12/20=6/10=0{,}6$

57) I casi possibili (equipossibili!) sono in numero di $5\cdot 5=25$:
B1+B1 B1+B2 B1+B3 B1+N1 B1+N2 B2+B1 B2+B2 B2+B3 B2+N1 B2+N2
B3+B1 B3+B2 B3+B3 B3+N1 B3+N2 N1+B1 N1+B2 N1+B3 N1+N1 N1+N2
N2+B1 N2+B2 N2+B3 N2+N1 N2+N2
a) i casi favorevoli sono $3\cdot 3=9$. La probabilità è $p(\text{2 Bianche})=9/25=0{,}36$
b) i casi favorevoli sono $2\cdot 2=4$. La probabilità è $p(\text{2 Nere})=4/25=0{,}16$
c) i casi favorevoli sono $3\cdot 2+2\cdot 3=12$. La probabilità è $p(\text{colori diversi})=12/25=0{,}48$.

58) Casi equipossibili: $2+3+4+5=14,\ 1+3+4+5=13,\ 1+2+4+5=12,\ 1+2+3+5=11,\ 1+2+3+4=10$
$p(\text{somma pari}=3/5)$; $p(\text{somma dispari})=2/5$ $p(\text{somma maggiore di }10)=4/5$; $p(\text{somma maggiore di }14)=0$

59) (1) aleatoria (2) quoziente (3) favorevoli (4) possibili (5) equipossibili (6) zero
(7) impossibile (8) uno (9) certo (10) campionario (11) empirica (12) caso

4.6 - Esercizi su probabilità e frequenza relativa

1) Se si lancia un pezzo di legno intagliato a forma di tronco di cono, quanti sono i casi possibili quando il tronco cade a terra e si ferma? Come si potrebbe valutare la probabilità di ciascun esito?

2) Lanciando 1000 volte una moneta truccata, il rapporto teste/croci è risultato uguale a 0,7762 circa.
Quante "teste" e quante "croci" sono uscite?
Che probabilità c'è di ottenere, con un ulteriore lancio, "testa"?

3) I "Giochi di Archimede" sono competizioni matematiche nelle quali lo studente è chiamato a rispondere a un set di 20 quesiti (pensando alla gara *junior*, quella per i più giovani).
Per ciascun quesito sono elencate 5 possibili risposte A, B, C, D, E delle quali una e una sola è corretta.
E' previsto di assegnare 5 punti a ogni risposta giusta, 0 a ogni risposta sbagliata, e 1 a ogni risposta non data.
Un pelandrone che non si degnasse neppure di leggere il testo delle domande, tenderebbe a fare più punti non rispondendo mai oppure crociando a casaccio una risposta per ogni domanda?

4) Un tale mi propone il seguente gioco: "Lanciamo un dado, per un numero di volte che deciderò io.
Se uscirà 1 o 2 più volte di quante volte sarà uscito 3, 4, 5 o 6, ti darò 100 euro, altrimenti mi darai tu 5 euro".
Mi conviene accettare?

5) Si sa che un sacco contiene 120 palline, in parte azzurre, in parte gialle, in parte rosa;
si estraggono una dopo l'altra, con reimbussolamento, 3 palline, e risultano tutte e 3 di colori diversi.
a) Cosa si può ipotizzare sul numero totale di palline dei tre colori?
b) E se si facessero 400 estrazioni ottenendo 90 azzurre, 196 gialle, e 114 rosa?

6) Se si lancia 1000 volte una coppia di monete, quante volte ci si aspetta pressappoco che mostrino 2 "Teste"?

7) Utilizza il foglio elettronico per simulare 300 lanci di una coppia di dadi.
Per ogni singolo lancio simulato, il foglio elettronico dovrà calcolare la somma dei due punteggi.
E per ogni somma ottenibile (da 2 fino a 12), dovrà determinare la frequenza assoluta e la frequenza relativa.
Tu confronterai infine quest'ultima con la probabilità *a priori*.

Tieni comunque presente che i numeri "casuali" generati dal computer non sono veramente casuali, ma sono piuttosto *pseudo*casuali, ossia hanno l'*apparenza* della casualità.

Per motivi di impaginazione, una scheda sui numeri pseudocasuali nel foglio elettronico è riportata a pag. 496.

8) Si può dare per scontato che sia uguale la probabilità di nascer maschio e di nascer femmina?

9) In Inglese si parla, ad esempio, di "3:5 (three to five) *odds in favor*", in relazione a un evento, per affermare che quell'evento si verifica mediamente 3 volte per ogni 5 volte che non si verifica.
Analogamente, dire che le "*odds against*" per un evento sono 4:1 significa sostenere che in media l'evento NON si presenta 4 volte per ogni volta che si presenta.
Ciò premesso, nel lancio di un dado, quante sono le "*odds in favor*" per l'uscita della faccia 3?
Se un evento è tale che ha $x:y$ "*odds against*", qual è la sua probabilità?

RISPOSTE

1) 3: faccia circolare maggiore in alto, faccia circolare minore in alto, tronco appoggiato sulla superficie laterale.
La probabilità di ciascuno dei tre esiti si può valutare soltanto lanciando il tronco tantissime volte e annotando la frequenza relativa di ognuno dei tre esiti.
2) 437 teste, 563 croci; valutabile in $43{,}7\%$ circa
3) E' indifferente. Rispondendo a caso, la probabilità di azzeccare la risposta giusta a una domanda fissata è 1/5 per cui, sulle 20 domande, possiamo aspettarci intorno a 4 risposte esatte per un totale di circa $4\cdot 5=20$ punti; non rispondendo, si totalizzano $20\cdot 1=20$ punti.
4) No, perché certamente l'avversario deciderà che il dado vada lanciato *tantissime* volte …
e con tantissimi lanci, è praticamente certo che la circostanza a me favorevole non si verificherà.
5) a) Praticamente non si può ipotizzare nulla: 3 estrazioni sono decisamente troppo poche.
Sembrerebbero suggerire un certo "equilibrio" fra il numero delle azzurre, delle gialle e delle rosa, ma fino a un certo punto: davvero, 3 estrazioni sono pochine.
b) 400 è già un buon numero. Le frequenze relative sono
$a=90/400=0{,}225;\quad g=196/400=0{,}49;\quad r=114/400=0{,}285$
e portano a presupporre che il numero complessivo delle azzurre, delle gialle e delle rosa sia in proporzione; quindi la composizione dell'urna potrebbe essere di 27 azzurre, 59 gialle e 34 rosa … o pressappoco.
6) Un numero di volte non molto distante da 250. Infatti la probabilità dell'evento è 1/4.
7) Somme possibili: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12. Probab.: 1/36 2/36 3/36 4/36 5/36 6/36 5/36 4/36 3/36 2/36 1/36
8) No. Non è detto che i due casi siano equipossibili. In effetti, si osserva, in tutte le parti del globo, una leggera prevalenza delle nascite maschili rispetto a quelle femminili.
9) 1:5; $p=y/(x+y)$

4.7 - Speranza matematica

Per il discorso che vogliamo iniziare è essenziale tener presente cosa afferma la "legge empirica del caso":

quando si ripete per "molte" volte una prova *aleatoria* (= legata al caso),
la **frequenza relativa** di un esito, cioè il rapporto

$$f_r = \frac{\text{numero di prove che hanno avuto quell'esito}}{\text{numero totale di prove}},$$

si avvicina "molto" alla **probabilità a priori** di quell'esito, calcolata tramite il rapporto

$$p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}.$$

Insomma, è $\boxed{f_r = \frac{\text{numero di prove che hanno avuto quell'esito}}{\text{numero totale di prove}} \approx p}$

da cui $\boxed{\textbf{numero di prove che hanno avuto quell'esito} \approx p \cdot \textbf{numero totale di prove}}$

Supponiamo ad esempio di estrarre una carta da un mazzo da scopa.
La probabilità che sia di "cuori", calcolata come $p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$, è $p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

Ma allora, se ripetiamo l'estrazione per molte volte, diciamo ad esempio per 2000 volte,
sempre reinserendo la carta estratta nel mazzo e mischiando prima di effettuare un'altra estrazione,
il numero di volte in cui uscirà "cuori" *si aggirerà intorno a*, *non differirà troppo da*

$$p \cdot \text{numero totale di prove} = \frac{1}{4} \cdot 2000 = 500.$$

E andiamo ora a parlare di "*speranza matematica*".

Ci conviene partire immaginando dapprima un gioco che nella realtà è davvero molto raro:
un gioco nel quale si possa soltanto vincere e non si possa mai perdere.

Armandoci di fantasia, supponiamo ad esempio che ci sia una famiglia con 4 figlioli, molto, ma molto povera.
Soldi ce ne sono davvero pochissimi!
Tuttavia, la mamma vuole dare qualche vizietto ai suoi piccoli, e anche scherzare un poco con loro.
Si decide, ogni sera dopo cena, di estrarre una pallina da una scatola contenente 10 palline numerate da 1 a 10.
Se uscirà una delle palline dalla 1 alla 4, il figlio corrispondente (ordinandoli dal più grande al più giovane) vincerà 2 euro, che potrà ad esempio investire in un succulento gelato … altrimenti, nessuno avrà niente.

Cosa ci aspettiamo che accada protraendo il gioco per molto tempo, diciamo per 300 giorni?
Ad ogni estrazione, per ciascun ragazzo, la probabilità di aggiudicarsi i 2 euro sarà di 1/10 (le palline sono 10).
Allora, per quanto ricordato all'inizio riguardo alla legge empirica del caso,
ognuno dei 4 ragazzi vincerà i suoi 2 euro per un numero di volte pressappoco uguale a $\frac{1}{10} \cdot 300 = 30$.

E quindi, in quei 300 giorni, più o meno, ciascuno si aspetta di incassare $\overbrace{30}^{\frac{1}{10}\cdot 300} \cdot 2 = 60$ euro.
In media, qual è l'aspettativa giornaliera di ognuno dei figli?

L'aspettativa giornaliera è di vincere euro $\dfrac{\overbrace{30}^{\frac{1}{10}\cdot 300} \cdot 2}{300} = \dfrac{1}{10} \cdot 2 = 0,20$

Questo esempio ci fa capire che **se moltiplichiamo la probabilità** (nel nostro caso, 1/10) **di una vittoria in una singola "prova aleatoria" per la cifra** (2 euro, per i nostri ragazzi) **che si spera di vincere nella prova**, **otteniamo quella somma di danaro che in media si vincerebbe ad ogni prova,**
qualora si facesse un numero molto alto di prove.

Bene! **Definiamo "speranza matematica" o "valore atteso"**
(in Inglese: mathematical expectation, expected value) di una certa vincita S,
il prodotto della vincita stessa per la probabilità che essa ha di realizzarsi in una singola prova:

$$\boxed{E = \text{speranza matematica}} = \boxed{pS}$$

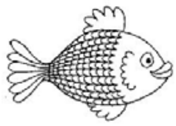
La "speranza matematica" è la vincita che mediamente si avrebbe in una singola prova,
se si effettuasse un numero elevato di prove.

Nella realtà concreta, ben raramente ci viene offerto di poter vincere qualcosa senza la possibilità di perdere.
Le situazioni più frequenti sono quelle in cui si hanno due contendenti … ma aiutiamoci con un altro esempio.

Supponiamo che una *macchinetta mangiasoldi* sia programmata per comportarsi nel modo seguente.
Ad ogni giocata, si può *vincere* (e ciò avviene con probabilità $1/10$: ossia, si vince mediamente una volta ogni 10 giocate; insomma, su di un gran numero di giocate, il numero di vincite non si discosta molto dal numero delle giocate, diviso per 10); oppure si può *perdere*, con probabilità che sarà uguale a $1-1/10=9/10$ (sappiamo che la somma della probabilità di un evento con la probabilità dell'evento contrario è sempre 1).
Ogni giocata costa 1 euro, ossia, quando si perde, si perde la puntata di 1 euro. Quando si vince, il guadagno netto è di 5 euro (il giocatore incassa 6 euro, quindi gli viene restituito l'euro della puntata, più 5 euro di vincita netta).
Domanda: se faccio 1000 giocate, cosa posso aspettarmi all'incirca, da un gioco di questo tipo?
Ragioniamo:

poiché ad ogni giocata la prob. di vincere è 1/10, con le 1000 giocate vincerò pressappoco $\frac{1}{10}\cdot 1000=100$ volte.
E poiché in caso di vincita il guadagno netto è di 5 euro, la vincita sarà in totale, all'incirca, di $100\cdot 5=500$ euro.
Nel frattempo, però, avrò perso per circa $\frac{9}{10}\cdot 1000=900$ volte;
per una perdita complessiva che si aggirerà intorno a $900\cdot 1=900$ euro.
In totale, il mio bilancio finale dovrebbe collocarsi intorno ai $\underbrace{500}_{\frac{1}{10}\cdot 1000\cdot 5}\ \underbrace{-900}_{\frac{9}{10}\cdot 1000\cdot(-1)} = -400$ euro.

E ciò significa che in media, ogni giocata mi avrà portato euro $\frac{-400}{1000}=-0,40$:



ossia mi avrà generato una perdita di 40 centesimi (bel pesciolino che sono!).

Proviamo a generalizzare.

Se in una singola prova si può verificare uno e uno solo fra più eventi incompatibili $E_1, E_2, ..., E_k$ di rispettive probabilità $p_1, p_2, ..., p_k$, e tali eventi mi apportano rispettivamente una somma di denaro, positiva o negativa, $S_1, S_2, ..., S_k$, allora, in n prove, se n è grande, E_1 si verificherà all'incirca $n\cdot p_1$ volte, E_2 circa $n\cdot p_2$ volte, ecc., per cui la somma di denaro che me ne verrà si aggirerà intorno a

$$n\cdot p_1\cdot S_1+n\cdot p_2\cdot S_2+...+n\cdot p_k\cdot S_k=n\cdot(p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+...+p_k\cdot S_k).$$

In media, in ogni singola prova avrò vinto o perso la somma

$$\frac{\cancel{n}\cdot(p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+...+p_k\cdot S_k)}{\cancel{n}}=p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+...+p_k\cdot S_k.$$

Bene: la quantità $\boxed{E=p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+...+p_k\cdot S_k}$ viene detta
la mia SPERANZA MATEMATICA (mathematical expectation) in quel gioco,
ed esprime, dunque, quello che posso aspettarmi mediamente ad ogni prova,
se ripeto per molte volte una prova di questo tipo.

ESEMPIO
Mi viene proposto il gioco seguente: si prende un mazzo di carte da scopa, e se ne estrae una a caso.
Se è una figura vinco 70 centesimi, se non è una figura ma è una carta di fiori o di picche ne vinco 50, soltanto se è il "settebello" (7 di quadri) perdo 16 euro. Qual è la speranza matematica del gioco?
Giocando molte volte, a lungo andare finirei per vincere o per rimetterci?

$$p(\textit{figura})=\frac{12}{40}=\frac{3}{10};\quad p(\textit{non figura, di fiori o picche})=\frac{14}{40}=\frac{7}{20};\quad p(\textit{settebello})=\frac{1}{40}$$

$$p(\textit{una delle altre carte})=1-\frac{3}{10}-\frac{7}{20}-\frac{1}{40}=\frac{13}{40}\quad (\textit{comunque è inutile calcolarla, perché tanto poi verrà moltiplicata per } 0)$$

$$\textit{speranza matematica}=\frac{3}{10}\cdot 0,70+\frac{7}{20}\cdot 0,50+\frac{1}{40}\cdot(-16)+\frac{13}{40}\cdot 0=0,21+0,175-0,4+0=-0,015$$

La speranza matematica, che mi dice quanto devo mediamente aspettarmi, pressappoco, da una singola prova, se effettuo un numero elevato di prove, è negativa, seppure di poco.
Devo attendermi, se mi ostino a giocare moltissime partite, di finire in perdita. Ad esempio, in 10000 partite, dovrei ritrovarmi pressappoco a quota $-0,015\cdot 10000=-150$ *euro*. …Pressappoco, s'intende!

Un GIOCO si dice "EQUO" se la speranza matematica di ogni giocatore è 0.
Ad esempio, se A e B prendono un mazzo di carte da scopa ed estraggono una carta, con l'accordo che A:
vince 6 euro se esce "cuori", vince 3 euro se esce "quadri", ne perde 5 se esce "fiori" e ne perde 4 con "picche",
la speranza matematica di A sarà

$$\textit{speranza matematica del giocatore } A = \frac{1}{4}\cdot 6+\frac{1}{4}\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot(-5)+\frac{1}{4}\cdot(-4)=0$$

mentre ovviamente quella di B avrà il valore opposto e quindi sarà anch'essa nulla. Questo gioco è *equo*:
A e B, se effettuassero un numero molto elevato di partite, non si ritroverebbero molto lontani dalla parità.

Nei "**giochi organizzati**" (**Lotto, Casinò, lotterie** …) chi vuole concorrere paga una somma iniziale S_0
(la puntata al Lotto o al Casinò, il costo del biglietto della lotteria …) sperando in una vincita S,
che sarà allora una vincita "lorda", in quanto il "netto" si otterrà sottraendole la somma S_0 inizialmente investita.

Vediamo come si può riscrivere la formula per la speranza matematica in questa situazione "classica".
Sia p la probabilità di vittoria. La probabilità di perdere varrà allora (evento contrario) $1-p$. E avremo:

$$\boxed{\textit{speranza matematica}} = p\cdot(S-S_0)+(1-p)\cdot(-S_0) = pS - \cancel{pS_0} - S_0 + \cancel{pS_0} =$$
$$= \boxed{pS-S_0} \quad S = \textit{vincita lorda};\ S_0 = \textit{somma che si paga per giocare}$$

ATTENZIONE! In questa formula specifica per i giochi organizzati compare la vincita LORDA,
mentre nella formula generale $\boxed{p_1\cdot S_1+p_2\cdot S_2+...+p_k\cdot S_k}$
le somme indicate vanno intese come vincite, o perdite, NETTE.

ESEMPIO
Alla roulette, ci sono 37 numeri su cui puntare (da 0 a 36).
Se si punta su di un numero singolo, in caso di vincita viene consegnato al giocatore un premio
uguale alla somma giocata, moltiplicata per 36 (quindi, la vincita netta è uguale a 35 volte la posta giocata).
Quanto vale la speranza matematica (supponendo di puntare 1 euro)?

$$\textit{speranza matematica} = pS-S_0 = \frac{1}{37}\cdot 36-1 = \frac{36}{37}-1 = -\frac{1}{37} \approx -0{,}027$$

La speranza matematica è quindi negativa. Il gioco NON è equo. Sarebbe equo se in caso di vincita
venisse consegnato al giocatore un premio lordo uguale a 37 volte la puntata, anziché solo 36.

Però il gioco non è nemmeno troppo "disonesto": se la speranza matematica, per la puntata di 1 euro, è uguale
a circa $-0{,}027$, vuol dire che di quell'euro mediamente a ogni puntata è come se il giocatore ne recuperasse
$1-0{,}027=0{,}973$ quindi il $97{,}3\%$; il guadagno del "banco" si limita mediamente al $2{,}7\%$ di ogni puntata.

Il Lotto, ad esempio, è molto più rapace nei confronti del giocatore.
Supponiamo si punti sul "numero secco" o "ambata".
La probabilità di vincere è $p=1/18$; in caso di vincita, lo Stato paga però soltanto 11,232 volte la puntata
(e da questa vincita "lorda" occorre poi sottrarre la puntata stessa per ottenere la vincita netta).

Allora la speranza matematica è $pS-S_0 = \frac{1}{18}\cdot 11{,}232\,S_0 - S_0 = -0{,}376\,S_0$.

Per le altre combinazioni del Lotto il discorso cambia poco (nel caso dell'ambo) o peggiora di molto (terno, ecc.).

Il Casinò comunque è più pericoloso, perché il poter effettuare immediatamente nuove puntate, circondati da
altri giocatori assatanati, in un ambiente dal fascino perverso, e il ricevere immediatamente l'eventuale premio,
tutto ciò fa sì che il giocatore si senta spinto a continuare a rischiare, anche in caso di vincita,
fino a quando, per gli alti e bassi della sorte, si ritrova a perdere tutto quello che ha in tasca.

La *persona intelligente* si tiene BEN LONTANA dal
gioco d'azzardo! ☹

Ancora qualche osservazione sui "giochi organizzati", quelli nei quali è

$$\boxed{\textit{speranza matematica}} = \boxed{pS-S_0}, \quad \textit{con } S = \textit{vincita lorda};\ S_0 = \textit{somma che si paga per giocare}$$

In questi casi, il gioco è equo se è $pS-S_0=0$, ossia se
la posta S_0 da pagare per partecipare è uguale alla speranza matematica pS della vincita lorda: $S_0 = pS$.

L'uguaglianza precedente si potrebbe pure riscrivere come $S=\frac{S_0}{p}$: questo rapporto $\frac{S_0}{p}=S_0\cdot\frac{1}{p}$
è dunque il valore che dovrebbe avere la vincita lorda in un gioco equo nel quale la probabilità di vincere sia p.
Ad esempio, se, come nella puntata sul "numero secco" al Casinò, si avesse una probabilità di 1/37 di vincere,
affinché il gioco sia equo la vincita lorda dovrebbe essere 37 volte la posta.

Nella stragrande maggioranza dei casi è invece $pS - S_0 < 0$, ossia $S_0 > pS$,

e per valutare quanto il gioco sia sfavorevole al concorrente potremo calcolare il rapporto $\frac{pS}{S_0} < 1$

fra speranza matematica della vincita lorda e posta in gioco:
quanto più tale rapporto è *basso*, tanto più il gioco sarà *disonesto nei riguardi del concorrente*;
quanto più tale rapporto sarà invece alto, ossia vicino (per difetto) a 1, tanto più il gioco sarà clemente.

Avevamo osservato che la puntata sul numero singolo al Casinò non è, in sé, troppo rovinosa per il giocatore;

e in effetti, se andiamo a calcolare $\frac{pS}{S_0}$, troviamo qui $\frac{\frac{1}{37} \cdot 36S_0}{S_0} = \frac{36}{37} \approx 0{,}973$ che è un valore assai prossimo a 1.

Tale valore ci dice "quale parte della sua puntata recupera, mediamente, il giocatore, a ogni giocata".
Tradotta il percentuale, è più espressiva: $0{,}973 = 97{,}3\%$ per cui il giocatore di Casinò, quando punta sul numero singolo, mediamente a ogni puntata riesce a trattenere per sé il $97{,}3\%$ della somma investita.
Il rimanente $2{,}7\%$ lo incamera senza pietà il Casinò. Il quale, tramite questa e le altre tipologie di puntata alla roulette, e tramite gli altri svariati suoi giochi, alle spese dei merli fa sontuosi guadagni.

Il rapporto $\frac{pS}{S_0} = \frac{\textit{speranza matematica della vincita lorda}}{\textit{somma puntata}}$ è chiamato da alcuni "**indice di equità**".

A seconda che sia <1, =1, o >1 il gioco è da ritenersi svantaggioso, equo oppure vantaggioso.

Evidentemente, l'ultimo caso nei "giochi organizzati" non si verifica mai, o meglio: si verifica solo se ci mettiamo *dal punto di vista dello Stato* nel Lotto e similari, *o del Casinò* nella roulette e similari: insomma, se il giocatore al quale pensiamo è l'organizzatore del gioco: lui sì, che ne trae un lauto vantaggio!

I NUMERI CASUALI (O MEGLIO: PSEUDOCASUALI) E IL FOGLIO ELETTRONICO

E' possibile ordinare a un foglio elettronico di generare numeri *casuali*, o meglio "PSEUDOcasuali": essi infatti hanno l'*apparenza* della casualità, ma in realtà non sono realmente casuali in quanto sono costruiti tramite un algoritmo a partire da un valore iniziale, detto "seme", quello *sì* - ma *solo quello* - da ritenersi casuale (si tratta, di norma, del numero di secondi trascorsi da una certa data del passato).

Digitando in una cella
$= \text{CASUALE}()$ [notare la coppia di parentesi senza niente all'interno!]
si genera, in quella cella, un numero casuale con la virgola *x* che può andare da 0 (incluso) a 1 (escluso):
$0 \le x < 1$

Questo numero cambierà ogniqualvolta nel foglio elettronico un dato verrà inserito, o cancellato
(o anche semplicemente se si preme, posizionati in una cella vuota, il tasto CANC;
oppure ancora, premendo il tasto-funzione F9 in alto sulla tastiera);
come pure, ad ogni riapertura del file.

E volendo un numero casuale fra 0 (compreso) e 6 (escluso)?
Beh, basterebbe scrivere
$= \text{CASUALE}() * 6$

E fra 1 (compreso) e 15 (escluso)?
$= \text{CASUALE}() * 14 + 1$

E se volessimo simulare il lancio di un dado, quindi ci servisse un numero INTERO casuale fra 1 e 6?
In questo caso potremmo ricorrere a una combinazione fra la funzione CASUALE e la funzione INT.
INT tronca un numero all'intero più vicino per difetto, quindi, ad esempio, $\text{INT}(3,8) = 3$
Allora la formula
$= \text{INT}(\text{CASUALE}() * 6 + 1)$
ci fornirà per l'appunto un intero che potrà valere, con ugual probabilità, 1, 2, 3, 4, 5 o 6.
Infatti, $= \text{CASUALE}() * 6$ genera un numero con la virgola che può andare da 0 (compreso) a 6 (escluso);
aggiungendo 1 si ottiene un numero con la virgola che può andare da 1 (compreso) a 7 (escluso);
dopodiché la funzione INT, troncando il numero ottenuto, lo fa diventare un intero compreso fra 1 e 6.

Analogamente, il lancio di una moneta potrà essere simulato da
$= \text{INT}(\text{CASUALE}() * 2)$
Il risultato dell'applicazione della formula potrà essere il numero 0, oppure il numero 1:
bene, "0" potrà essere interpretato come "Testa" e "1" come "Croce", o viceversa.

Anche i vari linguaggi di programmazione permettono di generare numeri pseudocasuali.

ESERCIZI sulla speranza matematica

1) Alla "roulette francese" ci sono 37 numeri (0, 1, 2, … , 36). Quelli da 1 a 36 sono colorati metà in rosso, metà in nero. Lo 0, invece, non è considerato né "rosso" né "nero". Se si punta sul rosso, o sul nero, insomma sul "colore", e si indovina, si viene compensati con una vincita netta uguale alla somma puntata; se, avendo giocato il "colore", esce "zero", la regola è piuttosto complicata e può variare da Casinò a Casinò. Certe case da gioco consentono in questo caso al giocatore di riavere indietro metà della somma puntata. Calcolare, se così stanno le cose, la speranza matematica di una giocata di 1 euro sul "rosso" o sul "nero".

2) Per ringraziarmi dell'aiuto prestato nei compiti di matematica, i compagni di classe mi offrono un premio in euro uguale al quadrato del numero che otterrò dal lancio di un dado.
Se preferissi commutare questa offerta in una cifra certa, quanti euro potrei domandare loro?

3) Se si gioca un "terno" al Lotto, in caso di vincita lo Stato versa al giocatore la somma giocata, moltiplicata per 4500. D'altra parte, si può dimostrare che la probabilità di indovinare, se si gioca un terno, è 1/11748. Calcolare la speranza matematica del gioco, se si puntano 10 euro.

4) Mi viene proposto il seguente gioco: si lanciano due monete, e se esce: Testa su entrambe, vinco 20 euro; Croce su entrambe, vinco 10 euro; esiti differenti, perdo 15 euro. Mi conviene accettare?

5) Completa la tabella seguente:

Giocata	Vincita lorda (coefficiente)	Probabilità p	Sper. mat. (%)	Indice di eq. (%)
Estratto semplice	11,232	1/18		
Ambo	250	1/400,5		
Terno	4500	1/11748		
Quaterna	120000	1/511038		
Cinquina	6000000	1/43949268		

6) I) Calcola la speranza matematica:
   a) dell'esito del lancio di un dado
   b) del punteggio ottenuto lanciando 2 dadi e sommando
   c) del punteggio ottenuto lanciando due dadi e moltiplicando

   II) Se lancio una coppia di dadi per 1000 volte, e ogni volta annoto il prodotto dei due numeri ottenuti, quanto varrà all'incirca la somma di questi prodotti?

7) Un amico mi sfida al gioco seguente:
si estrae una carta da un mazzo da scopa, e se è 1 asso gli do io 10 euro, altrimenti mi dà 1 euro lui.
Calcolare la mia speranza matematica in questo gioco.
Se accettassi ed effettuassi 1000 partite, quanto mi aspetto di guadagnare o perdere?

8) Se un benefattore mi offre in regalo 30 euro certi, o, in alternativa, 180 euro ma solo se lanciando un dado uscirà "6", verifica che in entrambi i casi la mia speranza matematica sarebbe la medesima.

RISPOSTE

1) $1\cdot\frac{18}{37}+(-1)\cdot\frac{18}{37}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{37}=-\frac{1}{74}\approx-0,0135$ 2) $\frac{1}{6}\cdot1+\frac{1}{6}\cdot4+\frac{1}{6}\cdot9+\frac{1}{6}\cdot16+\frac{1}{6}\cdot25+\frac{1}{6}\cdot36=\frac{1}{6}\cdot91\approx15\ euro$

3) Con la formula semplificata: $sper.mat.=\frac{1}{11748}\cdot45000-10=-6,16956...$

4) $p(\mathrm{TT})=\frac{1}{4};\ \ p(\mathrm{CC})=\frac{1}{4};\ \ p(\mathrm{TC}\vee\mathrm{CT})=\frac{1}{2}\qquad sper.mat.=\frac{1}{4}\cdot20+\frac{1}{4}\cdot10+\frac{1}{2}\cdot(-15)=0$
Il gioco è equo: alla lunga, si può perdere o si può vincere,
ma comunque con sbalzi limitati rispetto alla situazione finanziaria iniziale.

5) Speranze matematiche (arrotondate ai centesimi): –37,60% –37,58% –61,70% –76,52% –86,35%
Indici di equità: 62,40% 62,42% 38,30% 23,48% 13,65%

6) I) a) 3,5 b) 7 c) 12,25 II) Non dovrebbe discostarsi molto da $12,25\cdot1000=12250$

7) $p(asso)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10};\quad p(non\ asso)=\frac{9}{10}$. La mia speranza matematica nel gioco è $\frac{1}{10}\cdot(-10)+\frac{9}{10}\cdot1=-\frac{1}{10}$
e, se giocassi 1000 partite, mi aspetto di perdere una cifra intorno ai 100 euro.

8) $$\overbrace{\underbrace{1}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{30}_{\text{vincita}}}^{\text{scelta a)}}=\overbrace{\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{180}_{\text{vincita}}}^{\text{scelta b)}}$$

4.8 - Probabilità soggettiva

Nella vita di tutti i giorni chiunque, più o meno consapevolmente, effettua valutazioni di probabilità *senza* ricorrere NÉ al calcolo del rapporto *n° casi favorevoli/n° casi possibili*, NÉ all'osservazione di una *frequenza*.

Pensiamo ad esempio a una partita di calcio fra due squadre improvvisate all'oratorio:
non ha alcun senso pensare ad un insieme di casi equipossibili, ma non ha neppure senso una visione statistica, visto che quelle due particolari squadrette non si sono mai incontrate in precedenza!
Però bene o male conosciamo l'abilità dei singoli giocatori, per cui *un'idea* della probabilità *ce la potremo fare*.
Che probabilità c'è che le azioni di una data ditta non diminuiscano di valore nei prossimi 6 mesi?
Quanto è probabile che la cuginetta Anna si separi dal fidanzato entro la fine di quest'anno?

Nel passare in rassegna, al paragrafo 3, i vari tipi di "probabilità",
avevamo presentato brevemente la probabilità "soggettiva" nel modo che riportiamo qui di seguito.

INTERPRETAZIONE 1)
La probabilità "soggettiva" di un evento è a/b se un soggetto "coerente" G è disposto a pagare subito la somma a per ricevere in futuro la somma b (con un guadagno netto, quindi, uguale a $b-a$) nel caso che l'evento si verifichi.
"Coerente" significa che lo stesso soggetto G deve essere disposto in qualsiasi momento a scambiarsi di ruolo con l'altro giocatore G' … Ma cosa fa l'altro giocatore? Riceve tanto per cominciare la somma a, ed è disposto a pagare b se l'evento si verifica: quindi anche G, per essere coerente, deve essere disposto a incassare subito la somma a per pagare in un futuro la somma b (con una perdita uguale in valore assoluto a $b-a$) se l'evento si verifica.

INTERPRETAZIONE 2)
Anche, in modo del tutto equivalente:
la probabilità di un evento E è uguale a s/S se per me è del tutto indifferente l'offerta, da parte di un benefattore,
- ♪ di una somma s certa, che mi viene pagata in ogni caso
- ♫ oppure in alternativa di una somma S, che però mi verrà data solo se l'evento E si verificherà.

Cerchiamo di chiarire meglio il discorso facendo degli esempi.
Dunque **io valuto soggettivamente uguale a 1/4 la probabilità di un evento se sono disposto a pagare 1 euro, per incassare 4 euro nel caso l'evento si verifichi (in questo caso mi verrebbe restituito il mio euro, e me ne verrebbero pagati altri 3 di vincita netta); però sarei anche disposto a mutare la mia scommessa nella seguente: incasso 1 euro, ma lo restituirò e in più pagherò 3 euro (in totale: sborserò 4 euro) se l'evento si verificherà.**

Ma allora **valutare soggettivamente in 1/4 la probabilità di un evento vuol dire, in fondo, ritenere che la facilità di verificarsi di quell'evento sia paragonabile alla facilità che si avrebbe di estrarre una pallina Rossa da un'urna contenente 1 Rossa e 3 Nere, per un totale di 4 palline**:
anche di fronte a quest'urna, infatti, sarebbe equo offrirsi di pagare subito la somma di 1 euro nella prospettiva di incassare 4 euro (con un guadagno netto di 3) qualora, estraendo una pallina, esca una Rossa (infatti, su 1000 estrazioni con reimbussolamento, è previsto di pescare una Rossa all'incirca 250 volte, vincendo dunque 750 euro netti, e una Nera 750 volte circa, perdendo circa 750 euro: si resterà pressappoco alla pari).

Posso anche vederla in questo modo: valutare uguale a 1/4 la probabilità dell'evento significa che se un (improbabile! ☺) benefattore mi offre di regalarmi 4 euro nel caso l'evento si verifichi, io posso dirgli: guarda, pagami 1 euro comunque vadano le cose, e siamo a posto.

Immagina, anche in questa ottica, di effettuare 1000 prove:
vedrai che la tua situazione finanziaria non varierebbe di molto se tu facessi una scelta piuttosto che l'altra.
Su 1000 prove, se fai la scelta a) (il benefattore ti dà 4 euro ogni volta che l'evento si verifica), vincerai pressappoco 250 volte con un guadagno netto di $250\cdot 4=1000$ euro.
E se fai la scelta b) (1 euro per ogni prova, qualunque sia l'esito) il tuo guadagno netto sarà di $1000\cdot 1=1000$ euro.
Nulla cambia.

Osserva anche questo: la scelta a) e la scelta b) hanno la stessa "speranza matematica"! (vedi paragrafo precedente).

Infatti $\overbrace{\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{4}_{\substack{\text{vincita}\\ \text{netta}}}}^{\text{scelta a)}}=\overbrace{\underbrace{1}_{\text{prob.}}\cdot\underbrace{1}_{\substack{\text{vincita}\\ \text{netta}}}}^{\text{scelta b)}}$.

Verifica tu stesso che nell'interpretazione 1), in cui non compare il fantomatico e leggendario benefattore ma ci sono due contendenti, i giocatori G e G', la speranza matematica di ciascun giocatore è 0.

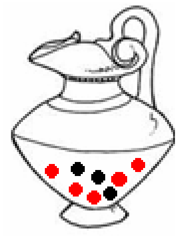
Qualcuno potrebbe obiettare: "Ma che senso ha chiamare in causa la speranza matematica, quando l'evento di cui ci si sta occupando non è un evento ripetibile?"… Giusto; tuttavia, se consideriamo il fatto che assegnare, per esempio, probabilità soggettiva 1/4 ad un evento, significa assegnargli lo stesso grado di "facilità" che avrebbe l'estrazione di una pallina Rossa da un'urna con 1 sola Rossa e 4 palline in totale, ecco che **il concetto di "speranza matematica"** torna ad avere un senso; e in effetti, **può aiutarci a decidere** rapidamente **sull'equivalenza o meno di due situazioni.**

IL MONDO
INFIDO E TRISTE
DELLE SCOMMESSE

… Come sono furbo!
Quest'anno ho perso solo 10000 euro!
Un altro ne avrebbe persi minimo 20000!

Cosa vuol dire, in una scommessa sulle corse di cavalli, che Fulmine è dato 5 contro 3?
Vuol dire che la probabilità di Fulmine vincente è valutata, soggettivamente, uguale alla probabilità che si avrebbe di estrarre una pallina Rossa da un'urna con 5 palline Rosse e 3 Nere, per un totale di 8 palline.
Quindi

> parlare di "vittoria di Fulmine data 5 CONTRO 3"
> equivale ad attribuire a Fulmine una probabilità di vincere di
> $\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}=62,5\%$
> come se ci fosse 1 urna con 5 palline Rosse e 3 nere (8 in totale)
> e si ritenesse la probabilità di vittoria di Fulmine uguale
> alla probabilità di estrarre una pallina Rossa da quest'urna.



In casi come quello dell'es. precedente si suole anche dire che la "quotazione" di Fulmine è 5/3 (5 su 3, 5 contro 3).
Attenzione, però!
"Quotazione" r non vuol dire "probabilità" p: per passare dalla "quotazione" (5/3 nell'esempio dato) alla "probabilità", si deve applicare la formula $p=r/(r+1)$ (dimostralo!). La "quotazione" è una specie di … "probabilità relativa".

L'avverbio "contro", nelle scommesse, è utilizzato anche quando si specifica quanto si incasserebbe, a fronte di una data puntata (solitamente si prende la puntata unitaria: 1 euro), nel caso l'evento pronosticato si verifichi.
Ad esempio, **nei paesi europei ad esclusione della Gran Bretagna, si parla di pagare "4 contro 1" un evento per indicare che "il banco", ossia l'organizzazione che gestisce le scommesse, se lo scommettitore punta 1 euro su di un evento, promette di pagargli una somma LORDA di 4 euro nel caso l'evento si verifichi** (somma lorda: quindi il giocatore incasserebbe 4 euro ma al netto vincerebbe $4-1=3$ euro).

> il "Partito della Pagnotta" vincente alle elezioni
> è pagato 200 CONTRO 1 se chi punta 1 sulla vittoria di quel partito
> ne incassa 200 (guadagno netto $200-1=199$) se l'evento si realizza

Le QUOTAZIONI ALLE SCOMMESSE (= le quote che vengono pagate dal *banco* per ogni euro pagato dallo *scommettitore*) **sono espresse in modo differente nelle varie zone geografiche.**

- Nell'**EUROPA CONTINENTALE**, ad es., **la consuetudine è di indicare la quota sotto forma di numero, intero o decimale, che esprime la vincita LORDA di chi ha puntato 1 sull'evento.**
  Cosicché, se la quota è 1,5 e Tizio ha puntato 1 euro, la somma che il banco verserà a Tizio nel caso indovini è 1,5 e il guadagno netto di Tizio è 0,5.
  Naturalmente, se Tizio avesse puntato 100 euro, ne incasserebbe $1,5\cdot 100=150$ con un guadagno netto di 50, ecc.
- In **GRAN BRETAGNA**, si usa una **frazione che porta a numeratore il guadagno NETTO e a denominatore la puntata,** cosicché, ad esempio, il Partito della Pagnotta dell'esempio precedente verrebbe quotato 199/1, e una quota 1/5 significherebbe che se lo scommettitore punta 5 euro, in caso di vincita guadagnerà 1 euro netto (= gli verranno restituiti i 5 euro sborsati, e in più gli verrà dato 1 euro, per un totale lordo di 6 euro).
- Negli **STATI UNITI** l'abitudine è di utilizzare numeri negativi o positivi:
  un numero negativo indica la puntata necessaria per conseguire un guadagno NETTO di 100,
  un numero positivo indica il guadagno NETTO che corrisponde a una puntata uguale a 100.
- **Naturalmente il "banco", se ritiene, in base alle sue documentatissime informazioni e sofisticate valutazioni, che un evento abbia, ad esempio, 1 probabilità su 5 di verificarsi, non si dichiarerà mai disponibile a pagare quella che sarebbe la quota "equa", ossia un premio lordo di 5 quando il giocatore punta 1: prometterà invece di versare un lordo di 4, o di 3,5 ad esempio, in modo che, sul gran numero di scommesse e tenuto conto anche delle puntate sull'evento contrario, gli scommettitori globalmente ci rimettano e il banco stesso invece prosperi, alla faccia dei pesciolini e pescioloni.**
- Il comportamento di una persona intelligente è identico tanto nell'Europa continentale, quanto nel Regno Unito o negli USA o altrove: egli, semplicemente, non scommette nulla: euro 0,00.

> *Un giocatore perde sempre. Perde denaro, dignità e tempo.*
> *E se vince, tesse intorno a sé una tela di ragno.*
> Mosè Maimonide, Sha' are ha-Musar
>
> *I tratti essenziali di ogni gioco: la simmetria, le leggi arbitrarie, il tedio.*
> Jorge Luis Borges, Esame dell'opera di Herbert Quain

ESERCIZI sulla probabilità “soggettiva”

1) Una giovane attrice con delle gambe stupende decide di assicurarle, e la compagnia le chiede di pagare un premio di 30000 euro, garantendole un rimborso di 2000000 di euro nel caso le gambe vengano rovinate - entro i prossimi 5 anni - da un incidente o altro (ferimento, malattia …)
Tenendo conto del fatto che la compagnia di assicurazioni vuole anche guadagnarci, se ne può dedurre che ha valutato la probabilità di un danno alle gambe come inferiore a … ???

2) Un amico mi offre di scommettere sulla vittoria di una squadra di calcio locale: se la squadra vincerà, lui mi pagherà 50 euro, mentre richiede che io gli paghi 20 euro in caso di pareggio o sconfitta.
Tenendo conto del fatto che l’amico mi vuole fregare, che valore si deve ritenere che abbia soggettivamente attribuito alla probabilità di vittoria per quella squadra?

3) Un tappo di plastica non è perfettamente simmetrico: può darsi dunque che tenda, se lanciato, a fermarsi più facilmente con la parte cava verso l’alto … o con la parte convessa verso l’alto, chissà!
Come faccio a stabilire qual è l’esito più probabile del lancio del tappo?
Se ritengo equa una scommessa nella quale si tratta di lanciare un tappo e pagare 35 centesimi nel caso il tappo si fermi con la parte cava verso l’alto, per vincerne 65 in caso contrario, che probabilità sto assegnando all’evento “parte cava verso l’alto”?

4) Ho lanciato per 500 volte una puntina da disegno, poi mi sono stufato … ma ho osservato che per 190 volte questa si è fermata con la punta verso l’alto. Ora, dovendo organizzare una scommessa equa sul lancio della puntina da disegno, se chi parteggia per l’esito più probabile vuole vincere 5 euro netti, quanto gli imporrò di pagare qualora si verifichi invece l’esito più difficile?

5) Di fronte ad una competizione fra i tre cavalli Dinamite, Tornado e Orazio, ritengo, soggettivamente, che Dinamite abbia il doppio delle probabilità di vincere rispetto a Tornado, e 2 volte e mezza le probabilità di Orazio.
Sai dirmi, quindi, che probabilità sto assegnando alla vittoria di ciascuno?

6) a) Sono un esperto e smaliziato giocatore di flipper, e quello installato al bar Sport non ha segreti per me.
Ritengo sia equo sfidare gli amici a una scommessa sotto queste condizioni:
se faccio almeno 100000 punti in una partita, vinco 5 euro, altrimenti ne pago 20
(equo nel senso che, ripetendo la sfida molte volte, non mi aspetto né di perdere né di vincere molto).
In questo modo, quale probabilità implicitamente attribuisco al mio fare 100000 punti in una partita?

b) In generale, se ritengo equo, qualora si verifichi un evento E, di vincere una somma x, accettando di perdere una somma y qualora E non si verifichi, qual è la mia valutazione della probabilità dell’evento E?

7) Trasforma l’espressione della quota di una scommessa a seconda delle usanze dei vari paesi:

Italiana	Inglese	Americana
3,5		
	5/8	
		-75 opp. + …

Italiana	Inglese	Americana
10 contro 1		
… contro …	7/3	
… contro …		$-$… opp. $+100$

8) Se la quota (italiana) di una scommessa è 1,80 quanto devo puntare per vincere 20 euro netti se mi va bene?
In generale, se la quota (italiana) di una scommessa è q, quale dev’essere la mia puntata x se voglio una vincita netta y in caso di successo? E se punto z, quanto vincerò al netto?

RISPOSTE

1) inferiore a 1,5% 2) <2/7 3) Lanciando tantissime volte e calcolando la freq. rel. di ciascun esito. 0,65 = 65%

4) $190:500=0,38$ per cui posso attribuire all’evento “punta verso l’alto” una probabilità del 38% circa.
Ora, il gioco è equo se questo esito “punta verso l’alto”, che è il più difficile, viene pagato 8,16 euro circa.

5) Detta p la probabilità che attribuisco a Dinamite, si avrà

$$p+\frac{p}{2}+\frac{p}{2,5}=1 \textit{ da cui } p=\frac{10}{19};\ \text{perciò}\ \ p_D=\frac{10}{19},\ p_T=\frac{5}{19},\ p_O=\frac{4}{19}$$

6) a) $\frac{4}{5}=0,8=80\%$ b) $\frac{y}{x+y}$

7)

Italiana	Inglese	Americana
3,5	5/2	-40 oppure $+250$
1,625	5/8	-160 oppure $+62,5$
2,333	4/3	-75 opp. $+133,333$

Italiana	Inglese	Americana
10 contro 1	9/1	$-11,111$ oppure $+900$
10 contro 3	7/3	$-42,857$ oppure $+233,333$
2 contro 1	1/1	-100 opp. $+100$

8) per vincere un netto di 20, devo puntare 25; per vincere y netti, punto $x=\frac{y}{q-1}$; se punto z, vinco $z(q-1)$ netti