NUMERI COMPLESSI

1. “IMPOSSIBILE”? UAH, UAH!

Com'è noto, la **radice quadrata** è **l'operazione inversa** rispetto all'**elevamento al quadrato**; vale a dire, la radice quadrata di un numero *x* è quel numero *y* il quale, se elevato al quadrato, dà come risultato *x* (con la convenzione che, in caso di risultato “doppio”, si prende solo quello positivo: $\sqrt{9}=3$ e NON $\sqrt{9}=\pm 3$).

Ora, poiché elevando un numero al quadrato si ottiene sempre risultato positivo (o, al più, nullo), ne deriva che **l'estrazione di radice quadrata di un numero negativo è impossibile**.

In particolare, è dunque impossibile l'operazione

$\boxed{\sqrt{-1}}$ **.**

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali relativi (quelli che stanno sulla "number line")

$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali relativi (quelli che sono esprimibili sotto forma di frazione, ossia di rapporto fra due interi). Sono razionali tutti gli interi ($5=5/1$) e tutti quei numeri con la virgola che sono o finiti, o periodici.

$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri irrazionali relativi. Sono irrazionali tutti i numeri con la virgola che sono illimitati non periodici.

$\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi relativi (è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, che a sua volta è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$)

D'altra parte, se provi a ripercorrere, per un istante, la tua "carriera" scolastica, ti verranno in mente **diversi casi di operazioni che in un primo tempo ritenevi impossibili, e che invece poi, con l'ampliarsi delle tue conoscenze, sono risultate possibili.**

a) Ad esempio:
quando frequentavi le elementari,
e non avevi ancora sentito parlare né di frazioni, né di numeri con la virgola,
ma ti limitavi a lavorare esclusivamente coi numeri interi,
di fronte all'operazione $23:4$ (divisione, ossia operazione inversa della moltiplicazione) avresti detto: è un'operazione impossibile, se si cerca il risultato esatto!
Infatti non esiste alcun numero intero il quale, moltiplicato per 4, dia come risultato 23.

Se la stessa operazione 23:4 ti fosse stata, invece, proposta ai tempi della scuola media, avresti tratto una conclusione differente, affermando che l'operazione 23:4 dà come risultato la frazione $\frac{23}{4}$ (o, il che è lo stesso, il numero $5,75$).

Ricapitolando e schematizzando:

l'operazione 23:4 coinvolge due numeri interi, ma nell'ambito degli interi essa è priva di risultato (= impossibile). Nell'insieme, più vasto, dei numeri razionali (di cui gli interi sono casi particolari), l'operazione diventa invece possibile ed ha come risultato il numero 23/4 (= 5,75).

b) Anche per un'operazione come

$5-7$

accade qualcosa di simile.
Il bambino delle scuole elementari lavora esclusivamente coi numeri assoluti (= senza segno); egli non ha mai sentito parlare di numeri positivi e negativi.
Se, dunque, gli viene proposta l'operazione $5-7$, egli dirà che è impossibile.
Quando, alla fine della scuola media, lo stesso alunno avrà ampliato l'insieme dei numeri assoluti, affiancando ad essi i numeri negativi, e pervenendo così all'insieme più ampio dei numeri relativi, dirà invece che l'operazione è possibile e dà come risultato -2.

c) E ancora: abbiamo dimostrato (pagg. 10-11) che non esiste alcun numero razionale che elevato al quadrato dia come risultato 2. Pertanto,
l'operazione $\sqrt{2}$ è impossibile nell'ambito dei numeri razionali; diventa possibile solo uscendo da tale insieme.
Se l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali viene ampliato, con l'aggiunta degli irrazionali, così da pervenire all'insieme più vasto $\mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali), allora all'operazione $\sqrt{2}$ si potrà attribuire un risultato.
Bisognerà però, per forza, USCIRE da $\mathbb{Q}$.

2. NUMERI IMMAGINARI, NUMERI COMPLESSI

RIASSUNTO

- La divisione fra i due interi 23 e 4 (cioè, l'operazione $23:4$) è impossibile (a meno che non ci si accontenti di un risultato approssimato) nell'insieme degli interi. Tuttavia, USCENDO da tale insieme si riesce a trovarne il risultato: è la frazione $23/4$, che appartiene NON all'insieme degli interi, ma al suo AMPLIAMENTO $\mathbb{Q}$.
- La differenza fra i due numeri assoluti 5 e 7 presi in quest'ordine (vale a dire, l'operazione $5-7$) è impossibile nell'insieme dei numeri assoluti. Diventa però possibile se si ESCE da tale insieme, passando all'insieme, PIU' AMPIO, dei numeri relativi. In esso si trova finalmente il risultato: -2.
- La radice quadrata del numero razionale 2 (ossia, $\sqrt{2}$) è un operazione impossibile in $\mathbb{Q}$. Essa diventa possibile solo a patto di USCIRE da $\mathbb{Q}$. Il risultato di tale operazione non appartiene a $\mathbb{Q}$ ma al suo AMPLIAMENTO $\mathbb{R}$.

In tutti e tre i casi, il risultato di una certa operazione fra numeri di un dato insieme è stato trovato uscendo dall'insieme considerato e passando ad un insieme più vasto; ampliando, insomma, la famiglia dei numeri con cui si lavorava.

Per l'operazione $\boxed{\sqrt{-1}}$ in Algebra si percorre una strada analoga.

Tale operazione coinvolge un numero reale, ma non ha risultato nell'insieme $\mathbb{R}$.
Allora **AMPLIEREMO** l'insieme $\mathbb{R}$,
passando ad un insieme più vasto nel quale l'operazione sia possibile.

Procediamo.
Indicheremo col simbolo $\boxed{i}$ il risultato dell'operazione $\sqrt{-1}$.

Il numero i verrà detto "unità immaginaria". La sua proprietà fondamentale sarà dunque $\boxed{i^2=-1}$.
i non appartiene, non può appartenere, all'insieme $\mathbb{R}$;
i è invece il "capostipite" di una nuova famiglia di numeri, **ESTERNI AL "RECINTO"** $\mathbb{R}$.

Moltiplicando l'unità immaginaria i per i numeri reali si ottengono nuove entità numeriche, che vengono dette **NUMERI IMMAGINARI**.

Esempi: $3i \quad -5i \quad \frac{2}{9}i \quad \sqrt{3}\,i$

Sottolineiamo subito che le operazioni con queste nuove entità numeriche vengono definite in modo tale che restino valide tutte le proprietà di cui le analoghe operazioni godono in $\mathbb{R}$.
Se noi ora prendiamo, ad esempio, il numero $3i$ e lo eleviamo al quadrato, avremo

$$(3i)^2=3^2\cdot i^2=9\cdot(-1)=-9$$

Quindi il numero $3i$ risolve il problema di trovare un risultato
per la radice quadrata del numero negativo -9!
Anzi, è pure

$$(-3i)^2=(-3)^2\cdot i^2=9\cdot(-1)=-9$$

e quindi, nell'insieme dei numeri immaginari,
il numero negativo -9 si trova ad avere ben DUE radici quadrate:
il numero immaginario $3i$ e il numero immaginario $-3i$.
A ben guardare, la stessa operazione dalla quale avevamo preso le mosse, ossia $\sqrt{-1}$,
si ritrova ad avere DUE risultati: i e $-1\cdot i$ (che si abbrevia in $-i$):

$$\sqrt{-1}=\pm i \quad \text{(NOTA)}$$

NOTA: *quando il simbolo di radice è utilizzato con l'intesa di poter uscire dal campo dei numeri reali per trovare il risultato dell'operazione, allora non si "scarta" più nessun risultato, e si parla di "radici" (al plurale) del numero considerato.*

Generalizzando,
i numeri immaginari sono caratterizzati dal fatto che il loro quadrato è sempre un numero reale <0;
essi risolvono perciò il problema di estrarre la radice quadrata di un numero reale negativo qualsiasi:

$$\sqrt{-25}=\sqrt{-1\cdot 25}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{25}=\pm i\cdot 5=\pm 5i$$

La somma indicata di un numero reale con un numero immaginario
prende il nome di NUMERO COMPLESSO.

Esempi di numeri complessi sono: $3+7i \qquad -\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cdot i \qquad \frac{3}{4}-\frac{2}{5}i \qquad 12,3-7,\overline{2}i$

RICAPITOLIAMO

Si dice **UNITA' IMMAGINARIA** un numero, indicato con il simbolo $\boxed{i}$,
il quale elevato al quadrato dà come risultato -1: $\boldsymbol{i^2=-1}$.

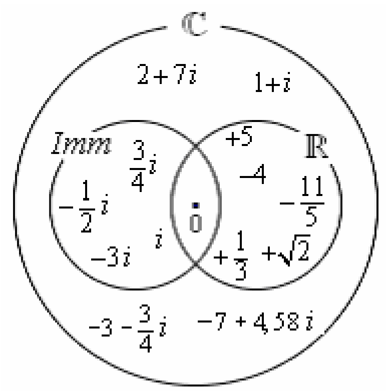
Si dicono **NUMERI IMMAGINARI**
i numeri ottenuti moltiplicando l'unità immaginaria i per un numero reale.

Si dicono **NUMERI COMPLESSI**
i numeri che sono una somma indicata di un numero reale con un numero immaginario,
ossia i numeri della forma $\boxed{\boldsymbol{a+bi}}$ (con a, b numeri reali; i unità immaginaria)

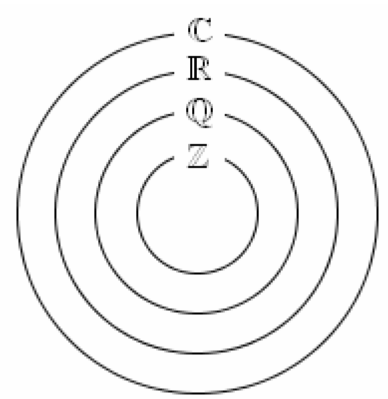
- ***a*** viene detta "**parte reale**";
- ***bi*** viene detta "**parte immaginaria**",
- ***b*** è chiamato il "**coefficiente dell'immaginario**".

L'insieme dei numeri complessi viene indicato col simbolo $\boxed{\mathbb{C}}$ **.**

Per $a=0$, l'espressione $a+bi$ diventa semplicemente bi;
dunque possiamo considerare i numeri immaginari come casi particolari di numeri complessi.
Ma per $b=0$, l'espressione $a+bi$ diventa semplicemente a;
quindi, anche i numeri reali possono essere visti come particolari numeri complessi,
e in definitiva, dal punto di vista insiemistico, la situazione è la seguente:



Il numero 0 *può essere anche scritto come* $0\cdot i$, *quindi è l'unico numero reale ed immaginario al tempo stesso.*



$\mathbb{C}=\{complessi\}$
$\mathbb{R}=\{reali\}$
$\mathbb{Q}=\{razionali\}$
$\mathbb{Z}=\{interi\ relativi\}$

Abbiamo anticipato che **le operazioni coi numeri complessi vengono definite in modo tale che si conservino tutte le proprietà valide in campo reale**.
Di conseguenza, per svolgere una qualunque operazione coi numeri complessi,
basterà basarsi sulle ordinarie regole del calcolo algebrico e letterale, applicandole nel modo consueto
(tutto ciò che occorre è semplicemente di ricordarsi che $i^2=-1$). Ad esempio:

$$(3+2i)+(-5+i)=3+2i-5+i=-2+3i$$

$$(3+2i)-(-5+i)=3+2i+5-i=8+i$$

$$(3+2i)(-5+i)=-15+3i-10i+2i^2=-15-7i+2\cdot(-1)=-15-7i-2=-17-7i$$

$$(-5+i)^2=25-10i+i^2=25-10i-1=24-10i$$

Per quanto riguarda la divisione, essa può essere effettuata scrivendo la frazione corrispondente, e moltiplicandone i termini per un medesimo numero (proprietà invariantiva delle frazioni), scelto in modo tale da far sì che, dopo l'operazione, il denominatore "perda" l'unità immaginaria e diventi quindi un numero reale:

$$(2-i):(3+2i)=\frac{2-i}{3+2i}=\frac{2-i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{6-4i-3i+2i^2}{9-4i^2}=\frac{6-7i-2}{9+4}=\frac{4-7i}{13}=\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i$$

3. A COSA *NON* SERVONO I NUMERI COMPLESSI

Il discorso fatto ti avrà certamente lasciato molto perplesso.
Ma insomma: cos'è questa storia, che di fronte ad una operazione impossibile si possono inventare nuovi numeri in modo che, nell'insieme numerico più ampio così ottenuto, l'operazione divenga possibile?
Questa procedura sa di "trucco", di "fregatura"; ci fa perdere fiducia nei matematici, che parrebbero tirare per il collo ogni questione fino a risolvere tutto e ad aver sempre ragione.
In tutta onestà, ti assicuro che le cose non stanno così.

Vorrei farti riflettere almeno sui due punti seguenti.

a) L'operazione $\frac{a}{0}$, con a numero reale non nullo,
NON può essere resa possibile tramite il passaggio ad un insieme numerico più vasto di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{C}$.
Infatti, indicato per assurdo con ∇ il risultato dell'operazione (tanto per fissare le idee) $\frac{1}{0}$, si avrebbe

$$\frac{1}{0}=\nabla$$

e quindi, essendo la divisione l'operazione inversa della moltiplicazione, $\nabla \cdot 0 = 1$.
Ora, se noi consideriamo le seguenti due espressioni:

i) $(\nabla \cdot 0)\cdot 0 = 1\cdot 0 = 0$

ii) $\nabla \cdot (0\cdot 0) = \nabla \cdot 0 = 1$

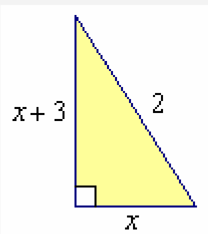
vediamo che ∇ sarebbe tale da distruggere, qualora venisse "accettato" come elemento di una famiglia di numeri, la validità della proprietà associativa della moltiplicazione, nell'ambito di quella famiglia.
Per questo fatto, ∇ NON ha il diritto di essere considerato un "numero".
L'operazione 1/0 è destinata a rimanere sempre e comunque IMPOSSIBILE, qualunque sia l'insieme numerico in cui si supponga di lavorare.

b) **I numeri complessi hanno applicazione soltanto in ambiti molto particolari, ad esempio in Ingegneria Elettronica o in certe questioni avanzate di Fisica. Non ha alcun senso usarli per misurare lunghezze, intervalli di tempo, pesi**, ecc.
Se ti dico: vengo a trovarti fra 3 ore (3 è un numero intero), dico una cosa sensata.
Se ti dico che verrò fra 3/4 d'ora (3/4 è un numero razionale) dico pure una cosa sensata.
Se prometto che verrò fra $\sqrt{2}$ ore ($\sqrt{2}$ è un numero irrazionale) ti farò probabilmente sorridere, ma in linea di principio l'affermazione è sensata, perché $\sqrt{2}=1,4142136...$
e, se faccio scattare il cronometro in questo momento (istante t = 0), ad un certo punto lo scorrere del tempo porterà all'attraversamento dell'istante $\sqrt{2}$ (supponendo di misurare il tempo in ore); ragionando in minuti, si tratterà di

$$\sqrt{2}\cdot 60 = 1,4142136...\cdot 60 = 84,8528137... = 1h + 24,8528137... \text{ minuti.}$$

Ma se ti dico che ci vedremo fra *i* ore, dico una cosa che è assolutamente priva di senso.

♪ Consideriamo, per chiarire ancor meglio il discorso, il problema seguente:
"*Trovare i cateti di un triangolo rettangolo di ipotenusa 2 cm, sapendo che uno dei cateti supera l'altro di 3 cm*".
Si riconosce immediatamente che tale problema è impossibile (non può esistere un triangolo siffatto, perché uno dei cateti sarebbe in ogni caso maggiore dell'ipotenusa).
E' pur vero che se noi indichiamo i cateti con x, x+3, e per curiosità proviamo ad impostare l'equazione risolvente, le soluzioni, formalmente, le troviamo! Però ……



$$x^2+(x+3)^2=4$$

$$2x^2+6x+5=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-10}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-1}}{2}=\frac{-3\pm i}{2}=\begin{cases}\frac{-3-i}{2}\\ \frac{i-3}{2}\end{cases}$$

… però **le soluzioni così determinate sono puramente formali, "fittizie" !**
Non ha alcun senso utilizzare numeri complessi per misurare segmenti !!!
Il problema è e resta **IMPOSSIBILE**.

♫ Ancora: è noto dalla Fisica che se un corpo viene lanciato verticalmente verso l'alto,
e si alza da terra all'istante $t_0 = 0$ con velocità v_0
(tempo misurato in secondi, velocità in metri al secondo),
l'altezza cui si trova il corpo nel generico istante $t > 0$ è data dalla formula

$$\boxed{h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t}$$

dove g indica l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre, ed è, all'incirca,

$$g = 9{,}8 \; metri \; al \; secondo \; per \; secondo \left(9{,}8 \; m/s^2\right).$$

Consideriamo il caso particolare $v_0 = 10 \; m/s$.
Dunque avremo: $h = -4{,}9t^2 + 10t$.

Problema 1): in quale istante *t* il corpo si troverà a 3 metri di altezza?

$$3 = -4{,}9t^2 + 10t$$
$$4{,}9t^2 - 10t + 3 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 14{,}7}}{4{,}9} = \frac{5 \pm \sqrt{10{,}3}}{4{,}9} \approx \frac{5 \pm 3{,}2}{4{,}9} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1{,}8}{4{,}9} \approx 0{,}37 \\ \dfrac{8{,}2}{4{,}9} \approx 1{,}67 \end{array} \right.$$

Pertanto: il corpo si troverà a 3 metri di altezza
dopo circa 0,37 secondi dall'istante del lancio (in fase di ascesa)
e dopo circa 1,67 secondi (in fase di discesa)

Problema 2): in quale istante *t* il corpo si troverà a 1 *km* = 1000 *m* di altezza?

$$1000 = -4{,}9t^2 + 10t$$
$$4{,}9t^2 - 10t + 1000 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4900}}{4{,}9} = \frac{5 \pm \sqrt{-4875}}{4{,}9} = \frac{5 \pm \sqrt{4875}\, i}{4{,}9} \approx \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{5 - 69{,}8\, i}{4{,}9} \\ \dfrac{5 + 69{,}8\, i}{4{,}9} \end{array} \right.$$

… **ma le soluzioni complesse dell'equazione risolvente del problema 2)**
non hanno alcuna interpretazione plausibile.
Il problema 2) è **IMPOSSIBILE**,
per il fatto che **con una velocità iniziale così bassa**
non si riesce a raggiungere un'altezza così elevata!!!

E' molto importante sottolineare che
NELL'INSIEME $\mathbb{C}$ NON SONO STATE DEFINITE LE RELAZIONI ">" E "<",
per cui, *dati due numeri complessi, nessuno di essi può dirsi "maggiore" o "minore" dell'altro.*
Pertanto, OCCHIO!

SE CI SI STA OCCUPANDO DI DISUGUAGLIANZE O DISEQUAZIONI,
I NUMERI COMPLESSI NON C'ENTRANO ASSOLUTAMENTE.

(Semmai, si potranno confrontare i "**moduli**" (NOTA) di due numeri complessi,
dove per "modulo" si intende, con riferimento al generico numero complesso $a + bi$,
il numero reale non negativo $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ma questo è un altro discorso).
NOTA: *"modulo" è, per un numero complesso,*
l'analogo di quello che è il "modulo" o "valore assoluto" di un numero reale.

4. A COSA SERVONO I NUMERI COMPLESSI

Adesso che abbiamo ben chiarito in quali ambiti i numeri complessi sono inutilizzabili, andiamo a vedere invece dove ha senso (e utilità) impiegarli.

a) Impiego dei numeri complessi in matematica pura

In Matematica pura, trattare determinate questioni in campo complesso può essere estremamente conveniente, comodo, ed illuminante, nonché affascinante. A livello preuniversitario non è facile dare un'idea appropriata di questo fatto (bisognerebbe infatti poter parlare, tanto per fare un esempio, di equazioni differenziali).
Qui ci limitiamo a citare un risultato di estremo interesse, chiamato **Teorema Fondamentale dell'Algebra,** la cui prima dimostrazione è attribuita al tedesco Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855) e datata **1799**.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA (T. F. A.), ENUNCIATO I
Un'equazione algebrica (NOTA 1) **di grado n** (NOTA 2) **a coefficienti reali o complessi ammette sempre almeno una soluzione nell'insieme dei numeri complessi.**

NOTA 1 - Si dice "**equazione algebrica**" un'equazione della forma $\mathrm{P}(x)=0$,
con $\mathrm{P}(x)$ *polinomio* a coefficienti in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$. Equazione *algebrica* = equazione *polinomiale*.

NOTA 2 - Si dice "**grado**" di un'equazione algebrica $\mathrm{P}(x)=0$, il grado del polinomio $\mathrm{P}(x)$.

Affermare che α è soluzione dell'equazione $P(x)=0$ equivale ad affermare che $P(\alpha)=0$.
Ma se $P(\alpha)=0$, il Teorema del Resto (Volume 1, pag. 116),
il quale si estende anche al caso in cui i coefficienti, e i valori che la variabile può assumere, siano complessi,
assicura che il resto della divisione $P(x):(x-\alpha)$ è zero
e quindi garantisce che il polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $(x-\alpha)$
ovvero scomponibile in un prodotto $P(x)=(x-\alpha)\cdot P_1(x)$
dove $P_1(x)$ è un nuovo polinomio, il cui grado è inferiore di un'unità rispetto al grado di $P(x)$.
Applicando ora il Teorema Fondamentale dell'Algebra al polinomio $P_1(x)$,
avremo che esiste certamente, nell'insieme dei numeri complessi, un β tale che $P_1(\beta)=0$.
Ma allora il polinomio $P_1(x)$ potrà essere scomposto in $P_1(x)=(x-\beta)\cdot P_2(x)$
dove $P_2(x)$ è un polinomio il cui grado è inferiore di un'unità rispetto al grado di $P_1(x)$.
Se ne trae che per il polinomio di partenza si avrà la scomposizione $P(x)=(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot P_2(x)$.

E' evidente la possibilità di procedere allo stesso modo fino a scomporre $P(x)$ in fattori tutti di 1° grado.

In definitiva, il T. F. A. garantisce che ogni polinomio di grado n

$$\mathbf{P}(x)=\mathbf{a_0}x^{\mathbf{n}}+\mathbf{a_1}x^{\mathbf{n-1}}+\ldots+\mathbf{a_{n-1}}x+\mathbf{a_n}\quad\left(\mathbf{a_i}\in\mathbb{C}\right),$$

a coefficienti complessi o in particolare reali, ammette una scomposizione della forma:

$$\mathbf{P}(x)=\mathbf{a_0}(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-x_{\mathbf{n}})\quad\left(x_{\mathbf{i}}\in\mathbb{C}\right)$$

(anche se non indica in alcun modo se e come si possa *effettivamente* realizzare, nella pratica, tale scomposizione).

Ma da qui, tenendo conto della "legge di annullamento del prodotto"
(un prodotto di numeri complessi o in particolare reali è uguale a zero se e solo se
è uguale a zero almeno uno dei fattori), si trae una conseguenza molto elegante e rilevante, ossia:

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA (T. F. A.), ENUNCIATO II
Un'equazione algebrica di grado n a coefficienti reali o complessi ammette ESATTAMENTE n soluzioni, purché si intenda di cercare le soluzioni in campo complesso e si conti ciascuna soluzione con la "molteplicità" (NOTA 3) che le compete.

NOTA 3
La definizione di "**molteplicità di una soluzione (= radice) di un'equazione algebrica**" può essere formulata in diversi modi equivalenti.
Ad esempio, possiamo dire che una soluzione α di un'equazione algebrica $\mathrm{P}(x)=0$ ha molteplicità *k* se e solo se il polinomio $\mathrm{P}(x)$ è divisibile per il binomio $(x-\alpha)$ per esattamente *k* volte di seguito.
Oppure che una soluzione α di un'equazione algebrica $\mathrm{P}(x)=0$ ha molteplicità *k* se e solo se il fattore $(x-\alpha)$ compare per esattamente *k* volte nella scomposizione di $\mathrm{P}(x)$ in fattori di 1° grado (scomposizione la cui esistenza è garantita appunto dal Teorema, sebbene il Teorema stesso non dia alcuna indicazione su come effettivamente possa essere realizzata tale scomposizione).

Esempio. Prendiamo l'equazione di quarto grado $x^4+2x^2+8x+5=0$.
Possiamo fattorizzare, ottenendo $(x+1)^2(x^2-2x+5)=0$. Dunque:

$(x+1)^2=0 \quad x=-1$ (*molteplicità* 2)

$x^2-2x+5=0 \quad x=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm\sqrt{-4}=1\pm 2i$

e abbiamo trovato **4 soluzioni, tante quant'è il grado dell'equazione**:

$x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=1+2i,\ x_4=1-2i$.

Se invece ci fossimo confinati ad operare nel solo insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali,
avremmo individuato una sola soluzione ($x=-1$),
o, tenendo conto della molteplicità, 2 soluzioni ($x_1=x_2=-1$)

Facciamo un'ulteriore riflessione su quanto visto.

Consideriamo un'equazione algebrica (si dice anche "equazione polinomiale") P(*x*) = 0.
Supponiamo che i coefficienti di questa equazione siano tutti reali.
Può darsi ora che l'equazione non ammetta nessuna soluzione nell'ambito dei numeri reali;
però il Teorema Fondamentale dell'Algebra assicura che certamente una soluzione esiste,
quando la cerchiamo nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.
Si può dunque affermare che l' insieme $\mathbb{C}$ "completa", dal punto di vista algebrico, l'insieme $\mathbb{R}$.

Osserviamo ancora che, anche volendo restare esclusivamente nell'ambito dei numeri reali, nella teoria delle equazioni algebriche l'utilizzo dei numeri complessi sembra "imporsi per forza propria". Basti pensare che la formula generale per la risoluzione delle equazioni di 3° grado obbliga ad operare coi numeri complessi nei passaggi intermedi, anche in quei casi in cui le soluzioni sono poi tutte reali.
Questo fatto portò sconcerto negli algebristi del Cinquecento
che per primi ebbero a incontrarsi e "scontrarsi" coi numeri immaginari.

Su questi interessantissimi argomenti, vedi ad esempio, su Internet:

♪ ⇨

♫ ⇨

Limitandoci ora per un momento alle sole equazioni di 2° grado,
la conoscenza dei numeri complessi ci permette di affermare che

in campo complesso, ogni equazione di 2° grado
$$\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 \quad (\mathbf{a,b,c}\in\mathbb{R} \ \text{ o anche } \ \mathbf{a,b,c}\in\mathbb{C},\ \ \mathbf{a}\neq 0)$$
ammette sempre ESATTAMENTE 2 SOLUZIONI (eventualmente coincidenti, nel caso $\Delta=0$)

Esempi:

$\boxed{x^2-6x+8=0}$ $\quad x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm\sqrt{\boxed{1}}=3\pm 1=\left\langle\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ $\quad\boxed{\Delta>0}$, **due soluzioni reali distinte**

$\boxed{x^2-6x+9=0}$ $\quad x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-9}=3\pm\sqrt{\boxed{0}}=3\pm 0=\left\langle\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right.$ $\quad\boxed{\Delta=0}$, **due soluzioni reali coincidenti**

$\boxed{x^2-6x+10=0}$ $\quad x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-10}=3\pm\sqrt{\boxed{-1}}=3\pm i=\left\langle\begin{matrix}3-i\\3+i\end{matrix}\right.$ $\quad\boxed{\Delta<0}$, **impossibilità in $\mathbb{R}$**
ma **due soluzioni in $\mathbb{C}$**

Due numeri complessi si dicono "coniugati" se hanno
ugual parte reale, e coefficienti dell'immaginario opposti.

Ad esempio, una coppia di *complessi coniugati* è $5+8i,\ 5-8i$.
Se un numero reale viene pensato come elemento dell'insieme $\mathbb{C}$, risulta essere il coniugato di sé stesso.

Si può dimostrare che se un'equazione algebrica a coefficienti reali ammette una certa soluzione z, allora anche $\bar{z}$ (= il complesso coniugato di z) sarà senz'altro soluzione della stessa equazione. In breve, si può dunque dire che

"**in un'equazione algebrica a coefficienti reali,**
le soluzioni si presentano sempre in coppie di complessi coniugati".

Terminiamo qui il nostro discorso sulle equazioni algebriche, citando ancora, da ultimo,
l'interessante risultato seguente, facilmente giustificabile per via grafica:

"**un'equazione algebrica a coefficienti reali, di grado dispari, ammette sempre almeno una soluzione reale**".

b) Impiego dei numeri complessi In Fisica e in Ingegneria

Per quanto riguarda gli importantissimi settori di impiego dei numeri complessi in Fisica e in Ingegneria, ti propongo alcuni contributi scaricati da Internet.

- Dal sito www.guardian.co.uk

QUESTION:

WHAT USE ARE IMAGINARY NUMBERS IN THE REAL WORLD?
DO THEY HAVE PURPOSE OR IS IT JUST MATHEMATICIANS HAVING SOME FUN ?
[Bob Jones, Aberdeen Scotland]

ANSWERS:

- Introducing the square root(s) of -1 is convenient because
  i) all n-degree polynomials with real coefficients then have n roots, making algebra "complete";
  ii) it saves using matrix representations for objects that square to -1
  (such objects representing **an important part of the structure of linear equations which appear in quantum mechanics, heat diffusion, optics**, etc) (…) [M. Hall, Canberra Australia]

Traduzione:
Introdurre la radice quadrata, o le radici quadrate, di –1, è conveniente perché

i) (in tal modo) tutti i polinomi di grado n con coefficienti reali hanno n "zeri"
e così, quindi, l'algebra diventa "completa"

NOTA: in Inglese si parla di "radice" ("root") di un polinomio,
per indicare un valore che, assegnato alla variabile,
renda uguale a 0 il valore del polinomio.
In Italiano si preferisce parlare di "zeri" quando ci si riferisce ad un polinomio,
e di "radici" (o "soluzioni") con riferimento, invece, ad un'equazione.
Tuttavia, anche in lingua italiana, i termini "zero" e "radice" sovente
vengono impiegati indifferentemente sia per polinomi che per equazioni,
diventando quindi, nell'uso di parecchi autori, dei sinonimi.

ii) Permette di fare a meno dell'uso di matrici per rappresentare quegli oggetti il cui quadrato è –1
(oggetti che rappresentano una parte importante della struttura di equazioni lineari
che compaiono in meccanica quantistica, diffusione del calore, ottica, ecc.)

- They are of enormous use in applied maths and physics.
  Complex numbers (the sum of real and imaginary numbers)
  occur quite naturally in the study of quantum physics.
  They're useful for modelling periodic motions (such as water or light waves)
  as well as alternating currents.
  Understanding complex analysis, the study of functions of complex variables,
  has enabled mathematicians to solve **fluid dynamic problems**
  particularly for largely 2 dimensional problems where viscous effects are small.
  You can also understand their instability and progress to turbulence.
  All of the above are relevant in the real world, as they give insight into how to pump oil in oilrigs,
  how earthquakes shake buildings and how electronic devices (such as transistors and microchips)
  work on a quantum level (increasingly important as the devices shrink.) [Gareth Owen, Crewe UK]

Traduzione:
Sono enormemente utilizzati in matematica e fisica applicata.
I numeri complessi (somma di numeri reali e numeri immaginari)
si presentano in modo assai naturale nello studio della fisica quantistica.
Sono utili per modellizzare i moti periodici (ad esempio le onde nell'acqua o le onde luminose)
come pure le correnti alternate.
Comprendere l'analisi complessa, lo studio delle funzioni di variabile complessa,
ha reso i matematici capaci di risolvere problemi di fluidodinamica
in particolare per problemi sostanzialmente bidimensionali in cui gli effetti dovuti alla viscosità sono piccoli.
Si può anche comprendere l'instabilità di tali sistemi e il loro evolvere verso la turbolenza.
Tutte le questioni di cui sopra sono rilevanti nel mondo reale,
perché permettono di capire più chiaramente come pompare il petrolio negli impianti di trivellazione,
come i terremoti scuotono gli edifici e come i dispositivi elettronici (es. transistor e microchip)
funzionano a livello quantistico (il che è via via più importante al crescere della miniaturizzazione).

- Ask any phisical scientist or engineer (mechanical, civil or electrical)
  how they would get on without using the square root of minus one.
  They will tell you most of our technology depends on it.
  For example, without **using imaginary numbers to calculate various circuit theories**,
  you would not be reading this on a computer. [G. Baker, Ockendon UK]

Traduzione:
Domanda a qualsiasi fisico o ingegnere (meccanico, civile od elettrico)
come se la caverebbero senza utilizzare la radice quadrata di -1.
Ti diranno che la maggior parte della nostra tecnologia dipende da essa.
Per esempio, senza l'uso dei numeri immaginari per calcolare varie teorie sui circuiti,
non staresti leggendo queste righe su di un computer.

- Imaginary numbers can be very useful for solving engineering problems.
  An example is if you have a pendulum swinging, it starts to slow down and eventually stop.
  If you want to work out the motion of the pendulum over a certain time (i.e. derive a formula) then the best way to do it is to use complex numbers. [Aidan Randle-Conde, Crewe UK]

Traduzione:
I numeri immaginari possono essere molto utili per risolvere problemi ingegneristici.
Per esempio, se hai un pendolo che oscilla, comincerà a rallentare e prima o poi si fermerà.
Se vuoi fare una analisi quantitativa del moto del pendolo in un certo intervallo di tempo
(es. ricavare una formula) allora il miglior modo di farlo è usare i numeri complessi.

- Mathematicians have fun?!
  [Tim Campbell, Wigan UK]

❑ Tanto di cappello, poi, a Philip Spencer dell'Università di Toronto (Canada)
che si occupa splendidamente di numeri complessi e delle loro applicazioni sulla pagina web
www.math.toronto.edu/mathnet/questionCorner/complexinlife.html dalla quale riporto questo estratto:

- In electronics, the state of a circuit element is described by two real numbers
  (the voltage V across it and the current I flowing through it).
  A circuit element also may possess a capacitance C and an inductance L that
  (in simplistic terms) describe its tendency to resist changes in voltage and current respectively.
  Rather than the circuit element's state having to be described by two different real numbers V and I, it can be described by a single complex number $z = V + i\,I$.
  Similarly, inductance and capacitance can be thought of as the real and imaginary parts of another single complex number $w = C + i\,L$.
  The laws of electricity can be expressed using complex addition and multiplication.

  Another example is **electromagnetism.**
  Rather than trying to describe an electromagnetic field by two real quantities (electric field strength and magnetic field strength), it is best described as a single complex number, of which the electric and magnetic components are simply the real and imaginary parts.

In elettronica, lo stato di un elemento di circuito è descritto da due numeri reali
(la differenza di potenziale V fra le sue estremità e la corrente elettrica I che scorre in esso).
Un elemento di circuito può possedere anche una capacità C e un'induttanza L
che (parlando in modo semplice) descrivono la sua tendenza a resistere
ai cambiamenti di differenza di potenziale e di corrente rispettivamente.
L'elemento di circuito, invece di dover essere descritto da due diversi numeri reali V e I,
può essere descritto da un singolo numero complesso $z = V + i\,I$

[NOTA: a volte si usa, in questi contesti, il simbolo j al posto del simbolo i per indicare l'unità immaginaria, proprio perché una I - maiuscola o anche minuscola - è già "impegnata" per indicare l'intensità della corrente].

Analogamente, l'induttanza e la capacità possono essere pensate
come la parte reale e [il coeff. della parte] immaginaria di un altro singolo numero complesso $w = C + i\,L$.
Le leggi dell'elettricità possono essere espresse usando l'addizione e moltiplicazione fra numeri complessi.

Un altro esempio è l'elettromagnetismo. Piuttosto che cercare di descrivere un campo elettromagnetico
tramite due quantità reali (l'intensità del campo elettrico e l'intensità del campo magnetico),
è meglio rappresentarla attraverso un singolo numero complesso,
di cui la componente elettrica e magnetica sono semplicemente le parti reale e immaginaria.

5. QUALCHE ESERCIZIO SUI NUMERI COMPLESSI

Premessa: le potenze successive dell'unità immaginaria

$i^0 = 1$ (*così come in* $\mathbb{R}$: "*un numero non nullo elevato a* 0 *dà, per definizione,* 1")

$i^1 = i$ (*così come in* $\mathbb{R}$: "*un numero elevato a* 1 *resta, per definizione, invariato*")

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$\boxed{i^4} = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = \boxed{+1}$

$i^5 = i^4 \cdot i = (+1)\cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (+1)\cdot i^2 = (+1)\cdot(-1) = -1$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = (+1)\cdot i^3 = (+1)\cdot(-i) = -i$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = (+1)\cdot i^4 = (+1)\cdot(+1) = +1$

$i^9 = i^8 \cdot i = (+1)\cdot i = i$

...

Le potenze successive dell'unità immaginaria i
hanno dunque un andamento "ciclico":
continuano a ripetere all'infinito sempre il medesimo ritornello $\boxed{1 \quad i \quad -1 \quad -i}$

esponente n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
risultato i^n	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	...

ESERCIZI

1) $\left(\frac{2}{3}i\right)^2$ 2) $\left(-\frac{2}{3}i\right)^2$ 3) $\left(\frac{1}{2}i\right)^3$ 4) $\left(\frac{1}{2}i\right)^4$ 5) $i(2+i)$ 6) $(7+5i)+(-9+4i)$ 7) $(7+5i)-(-9+4i)$

8) $(7+5i)\cdot(-9+4i)$ 9) $(3-2i)\cdot(3+2i)$ 10) $\frac{2+i}{3-i}$ 11) $\frac{3}{5+6i}$ 12) $(5+3i)^2$ 13) $\left(\frac{1}{2}-3i\right)^2$ 14) $\frac{(2+i)(3-i)}{i}$

15) i^{29} 16) $i^{371}+i^{372}+i^{373}+i^{374}$ 17) $(1+i)^3$ 18) $(1+i)^6$ 19) $i^{30}+i^{300}$ 20) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)^2$ 21) $\sqrt{-16}$

22) $\frac{1}{i^{23}}$ 23) $\sqrt{-7}$ 24) $6\left(\frac{2}{3}-i\right)-5(1-3i)$ 25) $\frac{1+i}{3-4i}$ 26) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)+\frac{1}{i^{14}}$ 27) $\frac{i^4+2i}{2i}$ 28) $\frac{1+i}{1-i}$ 29) $\frac{1}{\pi i}$

30) $(a+bi)^2 \quad (a,b\in\mathbb{R})$ 31) $(a+bi)(a-bi) \quad (a,b\in\mathbb{R})$ 32) $i\cdot[(1+i)(2+i)-(1-i)(3-i)]$ 33) $(2-i)^4$

34) Quale fra le seguenti uguaglianze è FALSA?
(a) $i^{176}=1$ (b) $\frac{1}{i^3}=i^5$ c) $\frac{1}{i}+i^3=0$ d) $\frac{1}{i^{10}}=i^2$

Da www.cliffsnotes.com:

35) The values of a and b (with b>0) which satisfy $(a+bi)^2=5+12i$ are:
(a) $a=3, b=-2$ (b) $a=3, b=2$ (c) $a=2, b=3$ (d) $a=2, b=-3$

36) The solution of the equation $(3-i)(z+4-2i)=10+20i$ is:
(a) $z=1-3i$ (b) $z=-3+9i$ (c) $z=46-52i$ (d) $z=5+5i$

37) Trova per tentativi i due numeri complessi $a+bi$ il cui quadrato è $2i$

38) Risolvi in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni di 2° grado:
a) $x^2-4x+13=0$
b) $2x^2+2x+3=0$
c) $9x^2+1=0$

RISULTATI

1) $-\frac{4}{9}$ 2) $-\frac{4}{9}$ 3) $-\frac{1}{8}i$ 4) $\frac{1}{16}$ 5) $-1+2i$ 6) $-2+9i$ 7) $16+i$ 8) $-83-17i$ 9) 13 10) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ 11) $\frac{15}{61}-\frac{18}{61}i$

12) $16+30i$ 13) $-\frac{35}{4}-3i$ 14) $1-7i$ 15) i 16) 0 17) $-2+2i$ 18) $-8i$ 19) 0 20) $-1+2i\sqrt{6}$ 21) $\pm4i$ 22) i

23) $\pm i\sqrt{7}$ 24) $-1+9i$ 25) $-\frac{1}{25}+\frac{7}{25}i$ 26) 2 27) $1-\frac{1}{2}i$ 28) i 29) $-\frac{1}{\pi}i$ 30) a^2-b^2+2abi 31) a^2+b^2

32) $-7-i$ 33) $-7-24i$ 34) c 35) b 36) b 37) $1+i,\ -1-i$ 38) a) $x=2\pm3i$ b) $x=\frac{-1\pm i\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$ c) $x=\pm\frac{1}{3}i$