OLTRE LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

1. EQUAZIONI ALGEBRICHE, LORO SOLUZIONI E RISOLUBILITA'

Definizioni

Un'equazione si dice "**algebrica**" se è riconducibile alla forma **$P(x)=0$, con $P(x)$ polinomio**

Dicesi "**grado**" di un'equazione algebrica $P(x)=0$, il grado del polinomio $P(x)$

❑ QUANTE SOLUZIONI HA UN'EQUAZIONE ALGEBRICA ?

Alla domanda risponde il "Teorema Fondamentale dell'Algebra",
di cui abbiamo già parlato a pag. 56, nel capitolo sui Numeri Complessi.

La prima dimostrazione del T.F.A. viene attribuita al tedesco Gauss (1777-1855) e datata 1799, anche se tale dimostrazione, non esente da pecche, dovette essere successivamente perfezionata ad opera del francese Jean Robert Argand (1768-1822) e dello stesso Friedrich Gauss.

Teorema Fondamentale dell'Algebra (T.F.A.)

♥ **Un'equazione algebrica di grado *n* a coefficienti reali o complessi ammette esattamente *n* soluzioni, purché si intenda di cercare le soluzioni in campo complesso e si conti ciascuna soluzione con la "molteplicità" (NOTA) che le compete.**

NOTA
La definizione di **molteplicità di una soluzione di un'equazione algebrica**
(sinonimo di "soluzione" è "radice") può essere formulata in diversi modi equivalenti.
Ad esempio, possiamo dire che
una soluzione α di un'equazione algebrica $P(x)=0$ ha molteplicità k se e solo se il fattore $(x-\alpha)$ compare per esattamente k volte nella scomposizione del polinomio P in fattori di 1° grado.
Si può dimostrare (vedi pag. 56) che una scomposizione in fattori "lineari" (= di 1° grado) esiste certamente per *ogni* polinomio a coefficienti reali o complessi, anche se non è possibile costruire alcun algoritmo di carattere generale che permetta di effettuarla, "nella pratica", per un polinomio arbitrario.

❑ Esempio 1

$x^4+2x^3-15x^2=0$

$x^2(x^2+2x-15)=0$

$x^2=0 \ \ (x\cdot x=0) \to \ x_1=x_2=0, \ \ o\ anche: "x=0 \ soluzione\ di\ molteplicità\ 2"$

$x^2+2x-15=0 \to \ \ x_3=-5, \ x_4=3 \ \ \ (con\ la\ formula\ oppure\ per\ scomposizione)$

Dunque abbiamo trovato **4 soluzioni, tante quant'è il grado**, a patto di tener conto che la soluzione $x=0$ "va contata 2 volte", "è soluzione doppia", "è soluzione di molteplicità 2".

❑ Esempio 2

$x^5-6x^4+13x^3-14x^2+12x-8=0$

Scomponiamo con Ruffini ottenendo:

$(x-2)^3(x^2+1)=0$

da cui:

$(x-2)^3=0 \ \to \ x=2 \quad (molteplicità\ 3)$

$x^2+1=0 \ \to \ nessuna\ soluzione\ in\ \mathbb{R},\ ma\ in\ \mathbb{C}: \ x^2=-1, \ da\ cui \ \ x=\pm i$

Anche:

$(x-2)(x-2)(x-2)(x+i)(x-i)=0$ in quanto $(x+i)(x-i)=x^2-i^2=x^2-(-1)=x^2+1$

In definitiva, le soluzioni sono: $\left[\begin{array}{ll} x=2 & (molteplicità\ 3) \\ x=-i & (molteplicità\ 1) \\ x=i & (molteplicità\ 1) \end{array}\right.$

Volendo si può scrivere: $x_1=2 \quad x_2=2 \quad x_3=2 \quad x_4=-i \quad x_5=i$

Le soluzioni risultano quindi essere 5, cioè esattamente tante quant'è il grado dell'equazione.
Se invece avessimo lavorato esclusivamente in campo reale, avremmo trovato una sola soluzione ($x=2$) o, tenendo conto della molteplicità, 3 soluzioni $x_1=x_2=x_3=2$.

❑ ESISTONO FORMULE PER LA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE DI GRADO SUPERIORE AL 2°?

Abbiamo visto che **le equazioni di 2° grado** $ax^2+bx+c=0$ **ammettono una formula risolutiva**:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$ FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE DI 2° GRADO

Anche le equazioni di 1° grado $ax+b=0$
ammettono un procedimento risolutivo, che, volendo, si può sintetizzare in una formula:

$$ax+b=0;\quad ax=-b;\quad \boxed{x=-\frac{b}{a}}$$ FORMULA RISOLUTIVA DELL' EQUAZIONE DI 1° GRADO

Già 4000 anni fa circa, i babilonesi sapevano affrontare un'equazione di 2° grado (purché avesse almeno una soluzione positiva), con procedimenti che sostanzialmente equivalevano all'applicazione della formula da noi attualmente usata.

Bene!

♥ **Pure le equazioni di 3° e di 4° grado ammettono la loro formula risolutiva**; tali formule furono scoperte nel XVI secolo (apparvero per la prima volta in un testo del **1545**, l' "Ars Magna" dell'italiano **Girolamo Cardano**).

♥ **E' stato invece dimostrato che le equazioni di 5° grado e di grado superiore al 5° non ammettono formula risolutiva**; cioè, che non può esistere alcuna formula la quale permetta di calcolare, mediante un numero finito di operazioni sui coefficienti, le soluzioni di una *generica* equazione di 5° grado, o di 6° grado, ecc.

Tale dimostrazione di impossibilità si deve ai due studiosi
- Niels Henrik **Abel** (norvegese, 1802-1829)
- ed Évariste **Galois** (francese, 1811-1832, ritenuto uno dei matematici più geniali di tutti i tempi).

Purtuttavia, per le equazioni di 5° grado o di grado superiore al 5° esistono metodi che consentono di *approssimare* le soluzioni (vale a dire, di calcolarle non proprio esattamente, ma comunque con la precisione desiderata).
Tali metodi, la cui applicazione al giorno d'oggi è facilitata dall'uso dei computer, fanno parte di quella branca della Matematica che prende il nome di "**calcolo numerico**".

Per approfondimenti sulla storia delle equazioni algebriche
puoi ad esempio consultare un bell'articolo del professor Dario Palladino ⇨

In queste pagine non presenteremo le formule risolutive delle equazioni di 3° e di 4° grado, e neppure i metodi di "calcolo numerico" cui accennavo prima; tuttavia
- *vedremo rapidamente alcuni metodi per la risoluzione di certe equazioni algebriche che costituiscono "**casi particolari**" (eq."binomie", "trinomie", risolubili "per fattorizzazione" o "con artifici")*
- *riprenderemo il **metodo grafico**, già presentato nel Volume 1, che permette di visualizzare e di approssimare le soluzioni di un'equazione qualsiasi (anche non algebrica!). Bisogna innanzitutto imparare a tracciare bene questi grafici con carta e matita; volendoli poi realizzare al computer, ci si può servire ad esempio dell'ottimo freeware GeoGebra.*

TERMINOLOGIA

❑ **Quando si parla di equazioni, talvolta al posto di "SOLUZIONE" si usa il sinonimo "RADICE".**

Per fare un esempio, l'equazione $3x-7=0$ ha una sola *radice*: il numero $7/3$.
Ancora: l'equazione $x^2-4x-5=0$ ha due radici, che sono -1 e 5.

❑ **Si dice "ZERO" di un polinomio ogni numero che, sostituito al posto della variabile del polinomio, rende quest'ultimo uguale a 0.**

Ad esempio, gli "zeri" del polinomio x^3-x sono i numeri $x=0,\ x=1,\ x=-1$.
Insomma, schematicamente: α è uno zero del polinomio $P(x)$ se e solo se risulta $P(\alpha)=0$.

Ovviamente, dato un polinomio $P(x)$, i suoi zeri non sono altro che le soluzioni o radici dell'equazione $P(x)=0$ (quest'ultima si dice "l'equazione associata al polinomio P").

Insomma, **gli zeri di un polinomio sono le soluzioni (= "radici") dell'equazione associata**.
E' lecito comunque, anche se un tantino improprio, parlare di "radici" (inglese: *roots*) pure con riferimento a un polinomio, anziché impiegare il termine "zeri".

Dal sito www.und.nodak.edu (Università del Nord Dakota)

Fundamental Theorem of Algebra

The fundamental theorem of algebra (FTA) states:
"Every polynomial of degree *n* with complex coefficients has *n* roots in the complex numbers".

Early work with equations only considered positive real **roots** so the FTA was not relevant.

Cardan realized that one could work with numbers outside of the reals while studying a formula for the roots of a cubic equation. While solving $x^3 = 15x + 4$ using the formula he got an answer involving the square root of -121. He manipulated this to obtain the correct answer, $x = 4$, even though he did not understand exactly what he was doing with these "complex numbers" .

In 1572 **Bombelli** created rules for these "complex numbers" .

In 1637 **Descartes** said that one can "imagine" for every equation of degree *n*, *n* roots, but these imagined roots do not correspond to any real quantity.

Albert Girard, a Flemish mathematician, was the first to claim that there are always *n* solutions to a polynomial of degree *n* in 1629 in "L'invention en algèbre". He does not say that the solutions are of the form a + b*i*, a, b real. Many mathematicians accepted Girard's claim that a polynomial equation must have *n* roots, and proceeded to try to show that these roots were of the form a + b*i*, a, b real, instead of first showing that they actually existed.

This was the *downfall* of many attempts to prove the FTA. Various people tried to disprove and prove the FTA.

Leibniz gave a "proof" that the FTA was false in 1702 by saying $x^4 + t^4$ couldn't be written as the product of 2 real quadratic factors. He did not realize that the square root of *i* could be written in the form $a + bi$, a, b real. In 1742 **Euler** showed Leibniz's *counterexample* was incorrect.

D'Alembert in 1746 and Euler in 1749 attempted proofs of the FTA. **Lagrange** and **Laplace** attempted proofs, but also failed, as they were assuming the existence of roots.

Gauss is credited with the first proof of the FTA in his doctoral thesis of 1799. He *spotted* the error in the others' proofs, that they were assuming the roots existed and then trying to deduce properties of them. This proof has some gaps in it and is not considered rigorous by today's standards.

In 1814 the Swiss accountant **Jean Robert Argand** published a proof of the FTA and two years later Gauss published a second proof.

This time Gauss's proof was complete and correct. He did a third proof the same year, and in 1849 a fourth proof was completed.

Root = "radice" (anche in botanica!)
In matematica, "root" può significare
- "radice" nel senso di "radice quadrata, cubica …"

o anche, **parlando di equazioni**,
- "radice" nel senso di "**soluzione**"

e, **parlando di polinomi**,
- "radice" nel senso di "**zero**"

Girolamo **Cardano**, italiano (1501-1576)

Rafael **Bombelli**, italiano (1526-1572)

René **Descartes o "Cartesio"**, filosofo e matematico francese (1596-1650)

Albert **Girard**, fiammingo (1595-1632)

downfall = caduta, crollo

Gottfried **Leibniz,** filosofo e matematico tedesco (1646-1716)
Leonhard **Euler (Euléro)**, svizzero (1707-1783)

counterexample = controesempio

Jean **d'Alembert** (1717-1783) filosofo, scienziato e matematico francese

Joseph-Louis **Lagrange** (1736-1813) scienziato e matematico franco-italiano

Pierre-Simon de **Laplace** (1749-1827) scienziato e matematico francese

Carl Friedrich **Gauss**, tedesco (1777-1855)

to spot = (in questo caso) individuare, riconoscere, scoprire

Jean Robert **Argand**, svizzero (1768-1822)

Queste brevi note storiche sul Teorema Fondamentale dell'Algebra ci hanno portato, in particolare, ad incontrare
- alcuni fra i più importanti **filosofi** di tutti i tempi come Cartesio e Leibniz,
- alcuni fra i sommi **matematici** di tutti i tempi come Eulero e Gauss,
- e alcuni fra i massimi **protagonisti della cultura e della scienza** come D'Alembert, Lagrange e Laplace.

2. LE "SOLUZIONI TROVATE PER STRADA"

Quando, in un'equazione,
càpita di poter semplificare per un'espressione contenente l'incognita,
la semplificazione si può effettuare, ma a patto di tener conto che
i valori dell'incognita, i quali annullano l'espressione per cui si semplifica,
sono soluzioni dell'equazione!
(infatti, se sostituiti in essa, la trasformerebbero nell'uguaglianza vera 0 = 0)

Quindi occorrerà annotare a margine tali valori,
che mi piace chiamare, come faceva il mio caro insegnante di Liceo prof. Giampaolo Bandi,
"**soluzioni trovate per strada**".

Esempio:

$$(3x-6)\left(x^2-x+1\right)=x^2-4$$

$$3\cancel{(x-2)}\left(x^2-x+1\right)=(x+2)\cancel{(x-2)} \qquad \boxed{\begin{array}{c} x=2 \text{ soluzione} \\ \text{"trovata per strada"!!!} \end{array}}$$

$$3x^2-3x+3=x+2$$

$$3x^2-4x+1=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\left\langle\begin{array}{l}\boxed{1/3}\\ \boxed{1}\end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Riepilogo soluzioni: } x=2,\ x=1/3,\ x=1}$$

Si poteva anche procedere così:

$$3(x-2)\left(x^2-x+1\right)=(x+2)(x-2)$$

$$3(x-2)\left(x^2-x+1\right)-(x+2)(x-2)=0$$

$$(x-2)\left(3x^2-3x+3-x-2\right)=0$$

$$(x-2)\left(3x^2-4x+1\right)=0$$

$$x-2=0 \quad\vee\quad 3x^2-4x+1=0$$

$$x=2 \quad\vee\quad x=1/3 \ \vee\ x=1$$

Arturo Gibellino di Gattinara,
Strada che porta al mare ed oltre (1971)

IN GENERALE:

- $\boxed{\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)=\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{C}(x)}$

  $\cancel{\mathrm{A}(x)}\cdot\mathrm{B}(x)=\cancel{\mathrm{A}(x)}\cdot\mathrm{C}(x)$ semplifico, ma risolvo la $\boxed{\mathrm{A}(x)=0}$ e tengo conto che
  le sue soluzioni sono soluzioni anche dell'equazione data

  Proseguo poi con la $\boxed{\mathrm{B}(x)=\mathrm{C}(x)}$ alla ricerca di altre soluzioni

  OPPURE:

- $\boxed{\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)=\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{C}(x)}$

  $\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)-\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{C}(x)=0$

  $\mathrm{A}(x)\left[\mathrm{B}(x)-\mathrm{C}(x)\right]=0$

  $$\boxed{\mathrm{A}(x)=0} \quad\vee\quad \mathrm{B}(x)-\mathrm{C}(x)=0$$
  $$\Updownarrow$$
  $$\boxed{\mathrm{B}(x)=\mathrm{C}(x)}$$

  Resta confermato anche in questo modo "alternativo" che le soluzioni della
  $\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x)=\mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{C}(x)$
  sono

  $$\left\langle\begin{array}{l}\text{tutte le soluzioni della } \mathrm{A}(x)=0\\ \text{più tutte le soluzioni dell'equazione "semplificata" } \mathrm{B}(x)=\mathrm{C}(x)\end{array}\right.$$

3. EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO: PRINCIPALI TIPOLOGIE

A) Equazioni risolubili per SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

1) $\boxed{x^3 - 4x = 0}$

$x(x^2-4)=0$
$x(x+2)(x-2)=0$
$x=0 \ \vee \ x=-2 \ \vee \ x=2$
equazione di $3°$ *grado* $\rightarrow$ 3 *soluzioni*: $x_1=0, \ x_2=-2, \ x_3=2$

2) $\boxed{x^4 + x^2 - 12 = 0}$

$(x^2-3)(x^2+4)=0$
$x^2-3=0 \quad x^2=3 \quad x=\pm\sqrt{3}$
$x^2+4=0 \quad x^2=-4$ *impossibile in* $\mathbb{R}$; *in* $\mathbb{C}$, $x=\pm 2i$
equazione di $4°$ *grado* $\rightarrow$ *in* $\mathbb{C}$, 4 *soluzioni*: $x_1=-\sqrt{3}, \quad x_2=\sqrt{3}, \quad x_3=-2i, \quad x_4=2i$

3) $\boxed{4x^3 - 8x^2 - 11x - 3 = 0}$

Scomponendo con Ruffini si ottiene:
$(x-3)(2x+1)^2=0$
$x=3 \ \vee \ x=-\frac{1}{2}$ (*soluz. di molteplicità* 2)
equazione di $3°$ *grado* $\rightarrow$ *tenendo conto della molteplicità*, 3 *soluzioni*: $x_1=3, \ x_2=x_3=-\frac{1}{2}$

4) $\boxed{6x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 = 0}$

$x^2(6x^3-3x^2-2x+1)=0$
$x^2\left[3x^2(2x-1)-(2x-1)\right]=0$
$x^2(2x-1)(3x^2-1)=0$

$x^2=0 \rightarrow x=0$ (*molt.* 2)
$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$
$3x^2-1=0 \rightarrow x^2=\frac{1}{3} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

5) $\boxed{x^2(x^2-1)=1-2x}$

$x^4-x^2=1-2x$
$x^4-x^2+2x-1=0$
$x^4-(x-1)^2=0$
$(x^2+x-1)(x^2-x+1)=0$

$x^2+x-1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
$x^2-x+1=0$ *imposs. in* $\mathbb{R}$ $(\Delta<0)$; *in* $\mathbb{C}$, $x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

B) Equazioni BINOMIE $\boxed{ax^n+b=0}$

1)

$\boxed{8x^3-125=0}$

$8x^3=125$

$x^3=\frac{125}{8}$

$x=\sqrt[3]{\frac{125}{8}}=\frac{5}{2}$

Risolvendo per scomposizione in fattori,
si troverebbero anche le soluzioni complesse:

$8x^3-125=0$

$(2x-5)(4x^2+10x+25)=0$

$x=\frac{5}{2};\quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-100}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{-75}}{4}=$

$=\frac{-5\pm i\sqrt{75}}{4}=\frac{-5\pm 5i\sqrt{3}}{4}$

2)

$\boxed{128x^3+6=0}$

Semplifico innanzitutto per 2 e ottengo

$64x^3+3=0$

$64x^3=-3$

$x^3=-\frac{3}{64}$

$x=\sqrt[3]{-\frac{3}{64}}=-\sqrt[3]{\frac{3}{64}}=-\frac{\sqrt[3]{3}}{4}$

3)

$\boxed{81x^4-16=0}$

$81x^4=16$

$x^4=\frac{16}{81}$

$x=\pm\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\pm\frac{2}{3}$

Scomponendo in fattori:

$81x^4-16=0$

$(9x^2+4)(9x^2-4)=0$

$9x^2+4=0;\quad x^2=-\frac{4}{9}$ *imposs. in* $\mathbb{R}$; *in* $\mathbb{C}$, $x=\pm\frac{2}{3}i$

$9x^2-4=0;\quad x^2=\frac{4}{9}\quad x=\pm\frac{2}{3}$

4) $\boxed{81x^4+16=0}$ *impossibile in* $\mathbb{R}$

5)

$\boxed{x^5-32=0}$

$x^5=32$

$x=\sqrt[5]{32}=2$

6)

$\boxed{x^5+32=0}$

$x^5=-32$

$x=\sqrt[5]{-32}=-2$

7)

$\boxed{x^6-1=0}$

$x^6=1$

$x=\pm\sqrt[6]{1}=\pm 1$

8)

$\boxed{x^6+1=0}$

$x^6=-1$

impossibile in $\mathbb{R}$

9)

$\boxed{x^7+5x^4=0}$

$x^4(x^3+5)=0$

$x^4=0\rightarrow x=0$

$x^3+5=0\rightarrow x^3=-5\rightarrow x=\sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}$

Uno SCHEMA GENERALE per le equazioni binomie

Se p è una costante positiva (p > 0)

- *esponente pari:* $\left[\begin{array}{l} x^{2n}=p \quad\rightarrow x=\pm\sqrt[2n]{p}\ \text{(2 soluzioni opposte in } \mathbb{R}) \\ x^{2n}=-p \quad\rightarrow \text{impossibile in } \mathbb{R} \end{array}\right.$
- *esponente dispari:* $\left[\begin{array}{l} x^{2n+1}=p \quad\rightarrow x=\sqrt[2n+1]{p}\ \text{(1 soluzione in } \mathbb{R}) \\ x^{2n+1}=-p \quad\rightarrow x=\sqrt[2n+1]{-p}=-\sqrt[2n+1]{p}\ \text{(1 soluzione in } \mathbb{R}) \end{array}\right.$

C) Eq. TRINOMIE $\boxed{ax^{2n}+bx^n+c=0}$ e, in particolare, BIQUADRATICHE $\boxed{ax^4+bx^2+c=0}$

1)

$$\boxed{8\underbrace{x^6}_{(x^3)^2}-7x^3-1=0}$$

$x^3=t$

$8t^2-7t-1=0$

$$t_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{16}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{16}=\frac{7\pm9}{16}=\left\langle\begin{matrix}-\frac{1}{8}\\1\end{matrix}\right.$$

$t=-\frac{1}{8}\ \vee\ t=1,\ \textit{da cui}:$

$$x^3=-\frac{1}{8}\rightarrow\boxed{x=-\frac{1}{2}}$$

$$x^3=1\rightarrow\boxed{x=1}$$

♥ La posizione $x^3=t$ si può evitare: basta "operare come se al posto di x ci fosse il blocco x^3"

$$\left(x^3\right)_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{16}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{16}=\frac{7\pm9}{16}=\left\langle\begin{matrix}-\frac{1}{8}\\1\end{matrix}\right.$$

$$x^3=-\frac{1}{8}\rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$x^3=1\rightarrow x=1$$

2)

$$\boxed{4\underbrace{x^4}_{(x^2)^2}-11x^2-3=0}$$

EQUAZIONE BIQUADRATICA (cioè, trinomia con n = 2)

$$\left(x^2\right)_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121+48}}{8}=\frac{11\pm\sqrt{169}}{8}=\frac{11\pm13}{8}=\left\langle\begin{matrix}-\frac{1}{4}\\3\end{matrix}\right.$$

$x^2=-\frac{1}{4}$ *impossibile in* $\mathbb{R}$

$x^2=3\rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

3)

$$\boxed{x^4-11x^2+18=0}$$

Come prima, oppure per scomposizione in fattori:

$\left(x^2-9\right)\left(x^2-2\right)=0$

$x^2-9=0\ \rightarrow\ x^2=9;\ x=\pm3$

$x^2-2=0\ \rightarrow\ x^2=2;\ x=\pm\sqrt{2}$

Uno SCHEMA GENERALE per le equazioni biquadratiche

$ax^4+bx^2+c=0$

Se $\Delta<0$, *non si ha nessuna soluzione in* $\mathbb{R}$

Se $\Delta\geq0$: $\left(x^2\right)_{1,2}=\ldots=\left\langle\begin{matrix}h\\k\end{matrix}\right.$

Ora,

se $h>0,\ k>0$ *4 soluzioni in* $\mathbb{R}$	*se* $h<0,\ k<0$ *nessuna soluzione in* $\mathbb{R}$	*se* $h,\ k$ *discordi* *2 soluzioni in* $\mathbb{R}$

Nel caso particolare $h=k\ (\Delta=0)$,

se $h=k>0$ *4 soluzioni,* *a due a due coincidenti, in* $\mathbb{R}$	*se* $h=k<0$ *nessuna soluzione in* $\mathbb{R}$

D) Equazioni risolubili con ARTIFICI (= posizioni)

1) $\boxed{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=2}$

$\boxed{\frac{x-1}{x-2}=t}$

$$t^4+t^2=2;\quad t^4+t^2-2=0;\quad \left(t^2\right)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left\langle\begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\right.$$

$$t^2=-2\ \textit{imposs. in}\ \mathbb{R};\quad t^2=1\to\boxed{t=\pm 1}$$

$$\frac{x-1}{x-2}=\boxed{-1}\ \to\ x-1=-x+2\ (x\neq 2);\ 2x=3;\ \boxed{x=3/2}$$

$$\frac{x-1}{x-2}=\boxed{1}\ \to\ \cancel{x}-1=\cancel{x}-2\ (x\neq 2)\ \textit{impossibile}$$

2) $\boxed{\left(x^2+3x+1\right)^3=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x}$

Converrà addizionare 1 *ad ambo i membri, per ottenere*:

$$\left(x^2+3x+1\right)^3+1=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x+1$$

dopodiché:

$$x^2+3x+1=z$$

$$z^3+1=z^2+z;\quad z^3-z^2-z+1=0;\quad z^2(z-1)-(z-1)=0;$$

$$(z-1)\left(z^2-1\right)=0;\quad (z-1)(z+1)(z-1)=0;\quad (z-1)^2(z+1)=0;\quad z=1\ \vee\ z=-1$$

$$x^2+3x\cancel{+1}=\cancel{1};\ x(x+3)=0;\ x=0\vee x=-3$$

$$x^2+3x+1=-1;\ x^2+3x+2=0;\ \ldots\ x=-1\vee x=-2$$

Le soluzioni sono, in definitiva:

$\boxed{x=-3,\ x=-2,\ x=-1,\ x=0}$

In alternativa:

$$\left(x^2+3x+1\right)^3=\left(x^2+3x+1\right)^2+x^2+3x+1-1$$

$x^2+3x+1=z$, ecc.

3) $\boxed{x^6-5x^2+2=0}$

Lasciando così, non si riesce a scomporre; ponendo invece $x^2=t$ *si ha* $t^3-5t+2=0$ *ed è possibile scomporre con Ruffini in quanto si osserva che* $P(2)=0$. *Si ottiene*:

$$(t-2)\left(t^2+2t-1\right)=0$$

$$t=2\to x^2=2;\ \boxed{x=\pm\sqrt{2}}$$

$$t=-1-\sqrt{2}\to x^2=-1-\sqrt{2}<0\ \textit{impossibile in}\ \mathbb{R}$$

$$t=-1+\sqrt{2}\to x^2=-1+\sqrt{2};\ \boxed{x=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

ALTRI ESEMPI DI QUESTO TIPO

4) $\left(\frac{x}{1-x}\right)^3+7\left(\frac{x}{1-x}\right)^2+14\cdot\frac{x}{1-x}+8=0$ $\quad\left[x=2,\ x=\frac{4}{3}\right]$

5) $\left(x\sqrt{2}+1\right)^{-3}-\left(x\sqrt{2}+1\right)^{-2}-3\left(\frac{1}{x\sqrt{2}+1}-1\right)-2\sqrt{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{2}+1}-1\right)=0$

uh, qui si può trovare una soluzione "per strada", semplificando! $\quad\left[x=0,\ x=-1,\ x=1-\sqrt{2}\right]$

6) $\left(x^2-2x-3\right)^2-2\left(x^2-2x\right)+3=0$ $\quad\left[x=1\pm\sqrt{3},\ x=1\pm\sqrt{7}\right]$

4. ESERCIZI SULLE EQUAZIONI ALGEBRICHE DI GRADO SUPERIORE AL 2°
(soluzioni a pagina 79)

(è richiesto di **determinare le sole soluzioni reali**)

BINOMIE

1) $16x^4-1=0$ 2) $27x^3-1=0$ 3) $16x^4+1=0$
4) $27x^3+1=0$ 5) $x^6-1=0$ 6) $x^6+1=0$
7) $x^5-1=0$ 8) $x^5+1=0$ 9) $x^3-2=0$
10) $32x^5+3=0$ 11) $9x^4=1$ 12) $x^5=x$
13) $(x^3+4)(x^3-1)=3x^3+1$ 14) $x^6+3x^2=0$ 15) $5x^3+8=0$

BIQUADRATICHE E TRINOMIE IN GENERE

16) $4x^4-9x^2+2=0$ 17) $2x^4-5x^2-3=0$ 18) $x^4-5x^2-36=0$ 19) $x^4-6x^2+9=0$
20) $x^4-10x^2\sqrt{2}+18=0$ 21) $x^6+2x^3-3=0$ 22) $3x^8-10x^4=8$ 23) $x^4+5x^2+4=0$
24) $9x^6-28x^4+3x^2=0$ 25) $16x^4+1=8x^2$ 26) $x^7+9x^4+14x=0$ 27) $x^3\left(x^3-4\right)=12$
28) $x^8-18x^4+81=0$ 29) $x^{18}+4x^{12}+3x^6=0$ 30) $x^{10}=2^3\cdot x^5+3^2$ 31) $x^2=\dfrac{x^4+1}{6}$
32) $x^4+2\left(2-\sqrt{3}\right)x^2-2\left(2\sqrt{3}-3\right)=0$ 33) $\left(abx^2\right)^2+1=\left(a^2+b^2\right)x^2$
34) $x^4-2\left(a^2+b^2\right)x^2+a^4+b^4-2a^2b^2=0$ 35) $\left(\dfrac{x^2}{m-1}\right)^2+m^2=\dfrac{2m}{m-1}x^2+\left(\dfrac{x}{m-1}\right)^2$
36) $kx^2-\dfrac{1}{x^2}=1-k$ 37) $x^2\left(x^2+1\right)=a^2\left(a^2-1\right)$ 38) $x^2+4\dfrac{b^2}{x^2}=(b-2)^2+4b$

RISOLUBILI PER SCOMPOSIZIONE COL METODO DI RUFFINI

39) $45x^3+6x^2-13x+2=0$ 40) $3x^3+5x^2=7x+10$ 41) $x^4-7x^3+17x^2-17x+6=0$
42) $7b^3+b+8=0$ 43) $6a^3-7a^2-21a-6=0$ 44) $24\alpha^3+26\alpha^2+9\alpha+1=0$
45) $y^6-3y^5+10y^4-24y^3+32y^2-48y+32=0$ 46) $x^5=27x^2(x+2)$

RISOLUBILI PER SCOMPOSIZIONE CON RACCOGLIMENTI PARZIALI

47) $9x^5-x^3+45x^2-5=0$ 48) $12a^3+20a^2+27a+45=0$ 49) $8b^3-6b^2-36b+27=0$

RISOLUBILI CON SCOMPOSIZIONI DI VARIO TIPO

50) $9y^4+12y^3-11y^2+2y=0$ 51) $x^4-4x^2-1=4x$ 52) $16x^9+16x^8+15x^5+15x^4-x-1=0$
53) $b^7+2b^5+8b^4+5b^3=0$ 54) $9x^5+25x^3=30x^4$ 55) $16a^8-16a^6+6a^5-6a^3=a^2-1$

RISOLUBILI CON ARTIFICI (= POSIZIONI)

56) $\left(x^2-x\right)^2+\left(x^2-x\right)-6=0$ 57) $\left(x^2-2x-3\right)^4-13\left(x^2-2x-3\right)^2+36=0$ 58) $x^6=13x^2-12$ $(x^2=t)$
59) $\left(y^2-13\right)^3+7\left(y^2-13\right)^2-6=0$ 60) $\left(x-x^{-1}\right)^4=3\left(x-x^{-1}\right)^2+4$ 61) $x^6-7x^4+11x^2+3=0$ $(x^2=t)$

$(5x-4)^3=27$ si potrebbe affrontare ponendo $5x-4=t$, ma non è il caso: direttamente, potremo scrivere
$$(5x-4)^3=27 \leftrightarrow 5x-4=3 \leftrightarrow 5x=7 \leftrightarrow x=7/5$$
E in modo simile, ma con attenzione al doppio segno:
$(5x+2)^4=81 \;\leftrightarrow\; 5x+2=\pm3 \;\leftrightarrow\; 5x+2=3\ (x=1/5)\ \vee\ 5x+2=-3\ (x=-1)$

62) $(8x-1)^3=8$ 63) $(8x-1)^4=16$ 64) $x^4(x+5)^4=1296$ 65) $2-(x+1)^6=0$ 66) $\left(2x-x^2\right)^3+512=0$

RISOLUBILI TENENDO CONTO DELLE "SOLUZIONI TROVATE PER STRADA"

67) $x^5=2x^3$ 68) $x^2-36=x^3-6x^2$
69) $\left(x^2-9\right)(3x-5)=\left(9-x^2\right)(x-1)$ 70) $x^4(x+1)=6x^3$
71) $(x-1)\left(x^2+x+2\right)+\left(x^2+x-2\right)(x-1)=0$ 72) $x^4+2x^3+x^2=(x+1)^3$

ESERCIZI VARI (risposte a pagina 79)

1) Quali fra le seguenti equazioni:
a) $x^8+x^2+1=0$ b) $x^4+2\sqrt{3}=4$ c) $x^4-1234x^2-2345=0$ d) $x^3+9876543x^2+8765432=0$
ammettono almeno una soluzione reale?

2) Si può dire che a) l'equazione $x^9+x^3=30$ è una "trinomia"? b) $x^3+\sqrt{3}=\sqrt{2}$ è una "binomia"?

3) Cosa afferma il Teorema Fondamentale dell'Algebra?
Spiega perché la risoluzione delle due equazioni
a) $x^4=2\left(x^2+12\right)$ b) $x^5+30x^4+300x^3+1000x^2=0$
ne conferma la validità.

4) Spiega perché NON è corretto affermare che l'equazione $x^3=1000$ ha una soluzione di molteplicità 3

5) Metti una croce su "Vero" o su "Falso":

a) L'equazione di 4° grado ammette formula risolutiva	Vero	Falso
b) L'equazione di 5° grado ammette formula risolutiva	Vero	Falso
c) 0 è uno zero del polinomio $2x^3-x^2-3x$, e anche -1 lo è	Vero	Falso
d) L'equazione $x^{123}+x^{125}=0$ ha fra le sue soluzioni l'unità immaginaria i	Vero	Falso
e) L'equazione $x^6-8x^4+16x^2=0$ ha tre radici di molteplicità 2	Vero	Falso

Risolvi le equazioni binomie che seguono:

6) $81x^4-4=0$ 7) $\dfrac{1}{x^{18}}=9^9$ 8) $5x^6=5^{-2}$ 9) $x^5+5^{\frac{1}{2}}=0$

10) $x^4-2\sqrt{2}=3$ 11) $x^3+\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)=0$ 12) $x^4+2\sqrt{5}=4$

Per le seguenti equazioni occorre tener presente il discorso su "radicali e valori assoluti" di pag. 31 quindi introdurre, se necessario, qualche stanghetta di valore assoluto, oppure riconoscere quando l'equazione è impossibile in $\mathbb{R}$, eventualmente distinguendo più casi. In tutti gli esercizi, si suppone che NON sia noto il segno dei parametri a, b, c.

13) $x^4-1296a^4=0$ 14) $8x^3-343a^9=0$ 15) $a^2x^4-b^8=0$ 16) $64x^6-a^2=0$ 17) $x^8-a^{10}=0$
18) $x^3+a^6b^3c=0$ 19) $x^6-a^7=0$ 20) $x^4-a^4b^3=0$ 21) $x^4+a^2b^4c^6=0$

Risolvi le equazioni trinomie che seguono:

22) $256x^8=1+60x^4$ 23) $256x^6=1+60x^3$ 24) $x^3=\dfrac{64000}{x^3+936}$ 25) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-2\cdot\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2}=2\sqrt{2}$

26) $x^8(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)=2\left(x^8+2\right)$ 27) $\dfrac{5}{2^{-1}x^2+3}=\dfrac{2}{2^{-2}x^2+3}+2^{-1}$ 28) $\dfrac{x^4}{2}+2^{-1}=x^2\sqrt{2}$

29) $x^2\left(x^2+2\sqrt{2}\right)=6$ 30) $x^2\left(x^2-2\sqrt{5}\right)+13=6\left(\sqrt{5}-x^2\right)$ 31) $x^4+b^2+\left(b^2+1\right)\left(b^2-2x^2\right)=0$

32) $x^3+4\dfrac{a^3}{x^3}=a^3+4$ 33) $x^4+(m-x)(m+x)=m^4$ 34) $x^4+k^3=k(k+1)x^2$ 35) $x^6+k^4=k\left(k^2+1\right)x^3$

Risolvi effettuando opportune "posizioni":

36) $\dfrac{13x+3}{3x-2}=30\cdot\dfrac{3x-2}{13x+3}+1$ 37) $\left(x^2-3x-7\right)^2=x^2-3x-1$ 38) $\dfrac{x+998}{x+997}+\dfrac{x+1000}{x+1001}=\dfrac{14}{5}$

39) $\dfrac{x}{x+11}+8\cdot\left(\dfrac{x+11}{x}\right)^2=2\left(1+2\cdot\dfrac{x+11}{x}\right)$ 40) $(2x+882)^2=x+441$ 41) $x^6+4=3x^4$

42) $(288y+143)^3+1=144(2y+1)(288y+143)$

Risolvi per fattorizzazione:

43) $\dfrac{(1+x)(x-1)}{60}=x^{-1}+15x^{-2}$ 44) $x^4-3x^2+7=\dfrac{21}{x^2}$ 45) $2x^2\left(10x^3+1\right)=8x^4+5x^3$

Risolvi tenendo conto delle soluzioni "trovate per strada":

46) $(2x+3)^2(2x-3)^4=(2x-3)^2(2x+3)^4$ 47) $\dfrac{x^6-4}{3x}=x^3+2$ 48) $\left(x^4-2\right)\left(2x^2+x-30\right)+2x^2=x^6$

49) Scrivi un'equazione che abbia come soluzioni i numeri: $-3, -1, +1, +2$

50) Scrivi un'equazione che abbia come soluzioni i numeri: $0, 1/2, 1/3, 1/4$

51) Scrivi un'equazione che abbia come soluzioni: $x=-1$ con molteplicità 3; $x=0$ con molteplicità 2.

52) Inventa un'equazione di 4° grado che abbia due soluzioni reali e due complesse, ma non sia una biquadratica.

53) Inventa un'equazione di 6° grado che abbia $x=0$ come soluzione di molteplicità 4, ma non abbia altre soluzioni reali.

54) Per quale valore del parametro k l'equazione $kx^3+x^2+x+k=0$ ammette come radice $x=-3$?

55) Per quali valori dei parametri a, b l'eq. $x^3+ax^2+bx+1=0$ è verificata sia da $x=1$ che da $x=2$?

56) Per quali valori dell'esponente intero m l'equazione $x^m+x^3=1+x^2$ ammette come soluzione $x=1$?

57) Scrivi un esempio di equazione di 8° grado, che non abbia soluzioni reali.

58) Scrivi un esempio di equazione che contenga tre termini, di cui uno con x^6, e un altro con x^3, ma sia priva di soluzioni reali.

Da www.regentsprep.org
Practice with Polynomial Equations of Higher Degree

59) Solve the equation $x^4-20x^2+64=0$

60) Find the roots of the equation $x^4=29x^2-100$

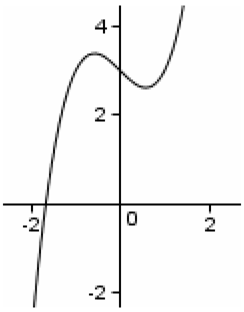
61) Find the zeroes of the function $P(x)=x^5-12x^3+32x$

62) A medical research lab is testing a new drug on a patient.
The amount of the drug remaining in the patient's bloodstream t hours after the drug is administered can be modelled by the equation

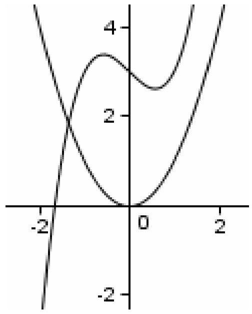
$$P(t)=-2t^3+6t^2-8t+8$$

Using a graph, find out how many hours after administration the drug will be totally eliminated from the patient's bloodstream.

63) Il grafico sottostante è finalizzato a risolvere l'equazione $x^3-x+3=0$.
Quante sono le soluzioni reali?
□ 0 □ 1 □ 2 □ 3



64) Il grafico sottostante è finalizzato a risolvere l'equazione $x^3-x+3=x^2$.
Quante sono le soluzioni reali?
□ 0 □ 1 □ 2 □ 3



65) Dov'è l'errore?

$x^5-3x^3-4x=0$

Semplifico: $x^4-3x^2-4=0$

Pongo $x^2=w$ *e ottengo* $w^2-3w-4=0$ $(w-4)(w+1)=0$

$w=4 \to x^2=4 \to x=\pm 2$; $w=-1 \to x^2=-1$ *impossibile in* $\mathbb{R}$

Le soluzioni reali sono perciò $x=-2$ *e* $x=2$

66) Dov'è l'errore?

$\sqrt{12}+x^6=4$

$x^6=4-\sqrt{12}$; $x^6=4-2\sqrt{3}$

$x^6=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$; $x^3=\sqrt{3}-1$;

$x=\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$

67) Risolvi utilizzando per i vari calcoli un foglio elettronico. Arrotonda le soluzioni a 3 cifre decimali.
a) $1,357x^4-4,321x^2-7,531=0$ b) $x^6+0,111x^3=9,877$

68) Per le seguenti equazioni, determina anche le soluzioni complesse.
A tale scopo, può essere necessaria una scomposizione in fattori.
a) $x^4=1$ b) $4\left(3x^2+16\right)=x^4$ c) $x^3=1000$ d) $16x^4+8x^2+1=0$ e) $x^4+6x^2+25=0$

69) Risolvi in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni a coeff. complessi: a) $ix^2+7x-10i=0$ b) $x^2-(2+4i)x+6+4i=0$

70) Risolvi in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni a coefficienti complessi:
a) $2x^3-(4+i)x^2+(20+2i)x-10i=0$ b) $x^4+8(x+i)=(ix)^3$

RISPOSTE

Pag. 76 1) $\pm\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) *imposs.* 4) $-\frac{1}{3}$ 5) ± 1 6) *imposs.* 7) 1 8) -1 9) $\sqrt[3]{2}$ 10) $-\frac{\sqrt[5]{3}}{2}$ 11) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
12) $0, \pm 1$ 13) $\pm\sqrt[6]{5}$ 14) 0 15) $-2/\sqrt[3]{5}$ 16) $\pm 1/2, \pm\sqrt{2}$ 17) $\pm\sqrt{3}$ 18) ± 3 19) $\pm\sqrt{3}$ 20) $\pm\sqrt[4]{2}, \pm 3\sqrt[4]{2}$
21) $1, -\sqrt[3]{3}$ 22) $\pm\sqrt{2}$ 23) *imposs.* 24) $0, \pm 1/3, \pm\sqrt{3}$ 25) $\pm 1/2$ 26) $0, -\sqrt[3]{7}, -\sqrt[3]{2}$ 27) $-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{6}$
28) $\pm\sqrt{3}$ 29) 0 30) $-1, \sqrt[5]{9}$ 31) $\pm\left(\sqrt{2}-1\right), \pm\left(\sqrt{2}+1\right)$ 32) $\pm\sqrt{\sqrt{3}-1}$ 33) Con $\begin{matrix} a\neq 0 \\ b\neq 0\end{matrix}$: $\pm\frac{1}{a}, \pm\frac{1}{b}$ …
34) $\pm(a+b), \pm(a-b)$ 35) $m\neq 1:\ \pm m, \pm(m-1)$ 36) $Se\ k>0: \pm\sqrt{1/k}.\ Se\ k\le 0: nessuna\ sol.\ reale$
37) $Se\ a<-1 \vee a>1: \pm\sqrt{a^2-1};\ se\ a=-1 \vee a=1:\ 0;\ se\ -1<a<1,\ a\neq 0: nessuna\ sol.\ reale;\ se\ a=0:0$
38) $Se\ b\neq 0:\ \pm b, \pm 2;\ se\ b=0:\ \pm 2$ 39) $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{5}$ 40) $-2, \frac{1\pm\sqrt{61}}{6}$ 41) 1, 2, 3 42) -1 43) $-\frac{1}{3}, \frac{3\pm\sqrt{57}}{4}$
44) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ 45) 1, 2 46) $0, -3, 6$ 47) $\pm\frac{1}{3}, -\sqrt[3]{5}$ 48) $-\frac{5}{3}$ 49) $\frac{3}{4}, \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$
50) $0, -2, \frac{1}{3}$ 51) $-1, 1\pm\sqrt{2}$ 52) $-1, \pm\frac{1}{2}$ 53) $0, -1$ 54) $0, \frac{5}{3}$ 55) $\pm 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
56) $2, -1$ 57) $1\pm\sqrt{7}, 1\pm\sqrt{6}, 1\pm\sqrt{2}, 0, 2$ 58) $\pm 1, \pm\sqrt{3}$ 59) $\pm 2\sqrt{3}, \pm\sqrt{10-\sqrt{15}}, \pm\sqrt{10+\sqrt{15}}$
60) $1\pm\sqrt{2}, -1\pm\sqrt{2}$ 61) $\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 62) $\frac{3}{8}$ 63) $-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$ 64) $-6, -3, -2, 1$ 65) $\pm\sqrt[6]{2}-1$ 66) $-2, 4$
67) $0, \pm\sqrt{2}$ 68) $6, 3, -2$ 69) $-3, 3, \frac{3}{2}$ 70) $0, -3, 2$ 71) $1, 0, -1$ 72) $-1, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Pagg. 77-78 1) b), c), d) 2) a) No (per via degli esp.) b) Sì 4) Avrebbe soluz. di molt. 3 la $(x-10)^3=0$
5) VFVVV 6) $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ 7) $x=\pm\frac{1}{3}$ 8) $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ 9) $x=-\sqrt[10]{5}$ 10) $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ 11) $\begin{matrix} x=\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}= \\ =-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\end{matrix}$
12) $imp.\left(4-2\sqrt{5}<0\right)$ 13) $\pm 6|a|$ (*) 14) $\frac{7}{2}a^3$ 15) $\pm\frac{b^2}{\sqrt{|a|}}\ (a\neq 0)$ 16) $\pm\frac{\sqrt[3]{|a|}}{2}$ (*) 17) $\pm|a|\sqrt[4]{|a|}$ 18) $-a^2b\sqrt[3]{c}$
19) $x=a\sqrt[6]{a}\ se\ a\ge 0;\ imp.\ in\ \mathbb{R}\ se\ a<0$ 20) $x=\pm|a|\sqrt[4]{b^3}$ (*) $se\ b\ge 0;\ imp.\ in\ \mathbb{R}\ se\ b<0, a\neq 0;\ 0\ se\ a=0$
(*) Qui compare il simbolo di valore assoluto anche se il ± lo renderebbe, a ben guardare, non "obbligatorio"
21) *generalmente imposs. in* $\mathbb{R}$; $x=0$ *se almeno uno fra a, b, c vale* 0 22) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 23) $-\frac{1}{4}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$
24) $-10, 4$ 25) $\pm 2, \pm\sqrt{2\sqrt{2}}=\pm\sqrt[4]{8}$ 26) $\pm\sqrt[4]{2}$ 27) ± 2 28) $\pm\sqrt{\sqrt{2}+1}, \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$ 29) $\pm\sqrt[4]{2}$ 30) $\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$
31) $\pm b, \pm\sqrt{b^2+2}$ (per via del doppio segno davanti, è indifferente scrivere $\pm b$ o $\pm|b|$) 32) $a, \sqrt[3]{4}$
33) $Se\ -1\le m\le 1: \pm m, \pm\sqrt{1-m^2},\ altrimenti\ \pm m$ 34) $Se\ k\ge 0: \pm\sqrt{k}, \pm k;\ se\ k<0: \pm k$ 35) $\sqrt[3]{k}, k$
36) $3, \frac{1}{4}$ 37) $-2, 5, \frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$ 38) $-996, -1002\ (x+997=y)$ 39) $-22, -\frac{22}{3}$ 40) $-441, -\frac{1763}{4}$ 41) $\pm\sqrt{2}$
42) $-\frac{1}{2}, -\frac{71}{144}$ 43) $6, -5$ 44) $\pm\sqrt{3}$ 45) $0, \frac{2}{5}, \pm\frac{1}{2}$ 46) $0, \pm\frac{3}{2}$ 47) $-\sqrt[3]{2}, -1, 2$ 48) $\pm\sqrt[4]{2}, -6, 5$
49) La più semplice è $(x+3)(x+1)(x-1)(x-2)=0$ 50) $x(2x-1)(3x-1)(4x-1)=0$ 51) $x^2(x+1)^3=0$
52) Basta moltiplicare e uguagliare a 0 due trinomi di 2° grado, uno con $\Delta<0$ l'altro con $\Delta>0$
53) Ad esempio, $x^4(x^2+1)=0$ 54) Dopo aver sostituito -3 al posto di x: $k=3/13$
55) $a=-5/2, b=1/2$ 56) Per tutti 57) Potrebbe essere $x^8+1=0$, o $x^8+x^6+1=0$, o $(x^2+1)^4=0$ …
58) Basta inventare un trinomio di 2° grado con $\Delta<0$, e sostituire x^3 al posto di x
59) Metodo più svelto: $(x^2-4)(x^2-16)=0;\ x^2=4 \vee x^2=16;\ x=\pm 2 \vee x=\pm 4$
60) $\pm 2, \pm 5$ 61) $0, \pm 2, \pm 2\sqrt{2}$ 62) Dopo 2 ore 63) 1 64) 1
65) All'atto della semplificazione, bisognava segnare la "soluzione trovata per strada" $x=0$
66) $x^6=\left(\sqrt{3}-1\right)^2 \to x^3=\pm\left(\sqrt{3}-1\right)$ 67) a) $\pm 2{,}106$ b) $-1{,}473; +1{,}456$
68) a) $\pm 1, \pm i$ b) $\pm 4, \pm 2i$ c) $10, -5\pm 5i\sqrt{3}$ d) $\pm\frac{1}{2}i$ e) $x^4+10x^2+25-4x^2=0 \ldots \to 1\pm 2i, -1\pm 2i$
69) a) $x=2i, x=5i$ b) $x=1-i, x=1+5i$ 70) a) $x=i/2, x=1\pm 3i$ b) $x=-2, x=-i, x=1\pm i\sqrt{3}$

5. EQUAZIONI IRRAZIONALI

Vengon dette "**irrazionali**"
quelle equazioni nelle quali l'incognita compare almeno una volta sotto il segno di radice.

Ad esempio, sono equazioni irrazionali le seguenti:

$$\sqrt{2x+1}=x-7; \qquad \sqrt[5]{x}+x-2=0; \qquad \sqrt[3]{x-1}+1=\sqrt{x}$$

NOTA. Osserviamo che invece un'equazione come la $x^2-x\sqrt{2}-4=0$
NON rientra nella categoria delle "equazioni irrazionali":
è, semmai, una equazione *a COEFFICIENTI irrazionali*.

Quando si deve risolvere un'equazione irrazionale,
generalmente si procede eliminando i radicali sotto i quali compare l'incognita.
E tale obiettivo si raggiunge elevando, una o più volte,
entrambi i membri dell'equazione data, ad un'opportuna potenza.

C'è però una "**sorpresa**" che occorre prepararsi a fronteggiare:

Quando si prende un'equazione e si elevano ambo i membri ad uno stesso esponente,
l'equazione cui si perviene alla fine *non sempre è equivalente* all'equazione iniziale,
cioè: *non sempre ha le stesse soluzioni* dell'equazione iniziale.

Precisamente:

- ❑ Quando ambo i membri di un'equazione vengono elevati al cubo,
o comunque ad esponente **DISPARI**,
tutto "fila liscio" perché l'equazione "di arrivo" è sempre equivalente a quella "di partenza"

MENTRE

- ❑ quando ambo i membri di un'equazione vengono elevati al quadrato,
o comunque ad esponente **PARI**,
PUO' DARSI che l'equazione "di arrivo" abbia
QUALCHE SOLUZIONE IN PIU' RISPETTO A QUELLA DI PARTENZA.

**L'elevamento ad esponente PARI di un'equazione è dunque un passaggio "insidioso",
perché potrebbe (uso il condizionale: non sempre ciò succede, ma *è possibile che* succeda)
avere l'effetto di introdurre delle "false soluzioni", delle "soluzioni non accettabili".**

Prendiamo ad esempio l'equazione

(1) $\sqrt{2x+1}=x-7$

Se la eleviamo al quadrato, otteniamo

(2) $\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=(x-7)^2$

Risolviamo dunque la (2): avremo

$$2x+1=x^2-14x+49; \qquad x^2-16x+48=0$$

e troveremo due soluzioni: $x=4$ e $x=12$.

Sennonché, andando a riprendere l'equazione iniziale (1), potremo constatare che,
mentre $x=12$ ne è, effettivamente, soluzione (prova a sostituire e vedrai), invece $x=4$ NON lo è:

$$[1°\,membro]_{x=4}=\left[\sqrt{2x+1}\right]_{x=4}=\sqrt{8+1}=\sqrt{9}=3$$

$$[2°\,membro]_{x=4}=[x-7]_{x=4}=4-7=-3$$

Insomma, il valore $x=4$ "va bene" per l'equazione DI ARRIVO (2),
ma "NON va bene" per l'equazione DI PARTENZA (1),
perché non rende i due membri della (1) UGUALI, bensì li rende OPPOSTI !!!

La spiegazione di tutto ciò sta in una considerazione molto elementare.

- **Se due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i loro quadrati (questo è ovvio!):**
  $\mathbf{a = b \Rightarrow a^2 = b^2}$

  … MA NON VALE IL VICEVERSA, cioè:

- **se i quadrati di due numeri sono uguali, allora non è detto che siano uguali anche i due numeri iniziali:**
  questi potrebbero essere uguali, ma potrebbero anche essere opposti.
  $\mathbf{a^2 = b^2 \quad \underset{\text{"NON IMPLICA"}}{\not\Rightarrow} \quad a = b;}$

  l'implicazione valida è invece quest'altra: $\mathbf{a^2 = b^2 \Rightarrow a = b}$ **VEL** $\mathbf{a = -b}$

Dunque se noi prendiamo un'equazione

$$(1) \quad \mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x)$$

e la eleviamo al quadrato, ottenendo:

$$(2) \quad [\mathrm{A}(x)]^2 = [\mathrm{B}(x)]^2$$

è garantito che ogni soluzione della (1) sia anche soluzione della (2),
ma non è detto invece che avvenga anche il viceversa!
Se un certo valore di x è soluzione della (2),
vuol dire che quel valore di x rende uguali i QUADRATI delle due espressioni A(x) e B(x);
ma riguardo alle espressioni A(x) e B(x), potrebbe renderle UGUALI oppure renderle OPPOSTE.
E in quest'ultimo caso, il valore di x in questione sarebbe soluzione della (2), ma NON della (1).

Ricapitolando schematicamente:

Date le due equazioni

$$\mathbf{(1)} \qquad \mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x)$$

$$\mathbf{(2)} \qquad [\mathrm{A}(x)]^2 = [\mathrm{B}(x)]^2$$

si ha che

$(1) \Rightarrow (2)$

quindi ogni soluzione di (1) è anche soluzione di (2);
passando dalla (1) alla (2) non perdiamo soluzioni;
però

$(2) \not\Rightarrow (1)$

quindi, presa una soluzione di (2), non è certo che questa sia pure soluzione di (1):
potrebbe esserlo, ma anche non esserlo.
Passando dalla (1) alla (2), può darsi che si acquistino indesiderate "false soluzioni".

Come fare, allora, di fronte ad un'equazione irrazionale la cui risoluzione abbia comportato almeno una volta l'elevamento al quadrato, o comunque ad esponente pari?

Semplice!

Abbiamo visto che elevando ad esponente pari, non perdiamo nessuna soluzione, ma potremmo disgraziatamente "acquistare" una o più "false soluzioni", "soluzioni non accettabili".
Allora …

… basterà ricordarsi, alla fine, di prendere ciascuna soluzione trovata
e sostituirla nell'equazione iniziale.
Se l'uguaglianza risulterà verificata, tutto OK,
mentre se l'uguaglianza non risulterà verificata,
vorrà dire che quella soluzione non è accettabile e la scarteremo.

Osserviamo che
questo problema dell'eventuale "non accettabilità" non si presenta invece
quando l'eliminazione dei radicali richiede soltanto elevamenti ad esponente DISPARI.

Infatti (riferendoci, per fissare le idee, all'esponente 3):

- se due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i loro cubi,
  E VICEVERSA:
- se i cubi di due numeri sono uguali, allora sono uguali anche i due numeri iniziali.

Insomma,

$$\mathrm{a} = \mathrm{b} \Leftrightarrow \mathrm{a}^3 = \mathrm{b}^3$$

Perciò

$$\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x) \Leftrightarrow [\mathrm{A}(x)]^3 = [\mathrm{B}(x)]^3$$

e il fatto che valga la DOPPIA implicazione ci assicura che

i) ogni soluzione di $\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x)$ è anche soluzione di $[\mathrm{A}(x)]^3 = [\mathrm{B}(x)]^3$ (implicazione $\Rightarrow$)

ii) ogni soluzione di $[\mathrm{A}(x)]^3 = [\mathrm{B}(x)]^3$ è anche soluzione di $\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x)$ (implicazione $\Leftarrow$)

ovvero le due equazioni

$$\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x), \quad [\mathrm{A}(x)]^3 = [\mathrm{B}(x)]^3$$

hanno LE STESSE soluzioni, sono "**EQUIVALENTI**".

Per completare il discorso, occorre dire che c'è anche UN ALTRO MOTIVO per cui,
elevando ad esponente PARI ambo i membri di un'equazione,
può capitare che si pervenga ad un'equazione non equivalente a quella di partenza.

Consideriamo l'equazione seguente: $\sqrt{2x-13} = \sqrt{x-7}$
Elevando al quadrato, si ottiene $2x-13 = x-7$ con la soluzione $x = 6$.
Però a questo punto si vede che il valore trovato $x = 6$ NON è soluzione dell'equazione iniziale,
perché, sostituendo in essa, si ottengono **radici quadrate di numeri negativi**.
Ora, se - come di norma avviene - si vuol restare rigorosamente nel campo dei numeri reali,
se ne conclude che le operazioni in gioco non sono eseguibili
e che quindi $x = 6$ è "soluzione non accettabile".

La ragione per cui

$$2x-13 = x-7 \underset{\substack{\text{NON}\\\text{IMPLICA}}}{\not\Rightarrow} \sqrt{2x-13} = \sqrt{x-7}$$

NON sta questa volta nel fatto che quadrati uguali $\underset{\substack{\text{NON}\\\text{IMPLICA}}}{\not\Rightarrow}$ basi uguali

(un'espressione contenente *x* può essere pensata - nell'ambito dei numeri reali -
come il quadrato di un'altra, soltanto limitatamente a quei valori di *x* che la rendono positiva!)

Qui siamo invece di fronte alla circostanza per cui
se un certo valore di *x* verifica un'equazione $\mathrm{C}(x) = \mathrm{D}(x)$,
ma ne rende i due membri entrambi negativi,
quel valore di *x* NON sarà soluzione della $\sqrt{\mathrm{C}(x)} = \sqrt{\mathrm{D}(x)}$,
per il fatto che non ne renderà i due membri uguali, bensì entrambi privi di significato (in $\mathbb{R}$).

Osserviamo che, anche relativamente a quest'ultima questione,
se i radicali in gioco hanno indice dispari il problema non si presenta:
una radice con indice dispari è eseguibile in campo reale anche se il radicando è negativo.

ESEMPI SVOLTI

- $2\sqrt{8-x}+x=5$

  Isolo innanzitutto il radicale, ottenendo

  $2\sqrt{8-x}=5-x$

  ... e ora elevo al quadrato, per sbarazzarmi della radice quadrata:

  $\left(2\sqrt{8-x}\right)^2=(5-x)^2$

  $4(8-x)=25-10x+x^2$

  $32-4x=25-10x+x^2$

  $x^2-6x-7=0$

  $(x+1)(x-7)=0$

  $\boxed{x=-1} \vee \underset{\text{non accettabile}}{\cancel{x=7}}$

  Verifica tu stesso, sostituendo nell'equazione iniziale o comunque nel passaggio che precede l'elevamento al quadrato, che una delle soluzioni trovate è accettabile e l'altra no.

- $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}-2\sqrt{6-x}=0$

  Se elevassi al quadrato ora, a primo membro avrei il quadrato di un trinomio e svolgendolo otterrei – nei doppi prodotti – altre tre radici quadrate!!!
  Conviene invece dapprima ripartire le radici in modo più equilibrato fra i due membri (due da una parte e una dall'altra)
  perché così, elevando successivamente al quadrato, il numero delle radici diminuirà.

  $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{6-x}$

  $\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)^2=\left(2\sqrt{6-x}\right)^2$

  $x\cancel{+4}+x\cancel{-4}+2\sqrt{(x+4)(x-4)}=4(6-x)$

  $2x+2\sqrt{x^2-16}=24-4x$

  $\cancel{2}\sqrt{x^2-16}=\cancel{24}^{12}-\cancel{6}^{3}x$

  $\left(\sqrt{x^2-16}\right)^2=(12-3x)^2$

  $x^2-16=144-72x+9x^2$

  $\cancel{8}x^2-\cancel{72}^{9}x+\cancel{160}^{20}=0$

  $(x-4)(x-5)=0 \quad \boxed{x=4} \vee \underset{\text{non accettabile}}{\cancel{x=5}}$

- $\sqrt[3]{x^3-4x}+2=x$

  $\sqrt[3]{x^3-4x}=x-2$

  $\left(\sqrt[3]{x^3-4x}\right)^3=(x-2)^3$

  $\cancel{x^3}-4x=\cancel{x^3}-6x^2+12x-8$

  $6x^2-16x+8=0$

  $3x^2-8x+4=0$

  $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\dfrac{4\pm\sqrt{4}}{3}=\dfrac{4\pm2}{3}=\begin{cases}\boxed{2/3}\\ \boxed{2}\end{cases}$

  Se ora vuoi fare la verifica sostituendo, falla pure, ma a dire il vero è ***superflua****!*
  Infatti abbiamo elevato al cubo (***esponente dispari*** *) e non al quadrato, quindi le soluzioni trovate saranno senz'altro accettabili.*

♥ RIASSUNTO DELLA TEORIA

a) Se si elevano al quadrato, o comunque ad **ESPONENTE PARI**, ambo i membri di un'equazione, si perviene a una nuova equazione, che *conserva tutte le soluzioni dell'equazione di partenza*, ma *potrebbe anche ammettere soluzioni* estranee all'equazione di partenza, e quindi *non accettabili*. Occorrerà, perciò, alla fine, "**FARE LA VERIFICA**", ossia prendere ogni soluzione trovata e sostituirla nell'equazione iniziale per vedere se è accettabile o no (NOTA).

b) Invece se si elevano al cubo (o, più in generale, ad un **ESPONENTE DISPARI**) ambo i membri di un'equazione, si perviene sempre ad un'equazione equivalente a quella data. In questo caso, dunque, LA **VERIFICA** FINALE DI ACCETTABILITA' **NON E' NECESSARIA**.

NOTA - *E' possibile (ma noi in questo volume non ce ne occuperemo) impostare dei metodi, basati sulle disequazioni, che permettono di trovare le "condizioni a priori di accettabilità" e quindi di evitare la verifica finale per sostituzione.*

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI IRRAZIONALI (clicca sulla freccia per la correzione)

1) $\sqrt{2x+3}-x=0$ 2) $\sqrt{12x-2}=6x-1$ 3) $2\sqrt{20+x}+x=4$ 4) $\sqrt{3x-5}+1=x$

5) $\sqrt{5x-1}+2x=1$ 6) $2\sqrt{x+3}=x$ 7) $2\sqrt{x}+3=x$ 8) $4\sqrt{5x-4{,}76}=3{,}2$

9) $\dfrac{2\sqrt{3-x}+1}{x}=3$ ⇨ 10) $2\left(2\sqrt{x-1}+1\right)=x$ ⇨ 11) $\dfrac{x+3}{2}=\sqrt{x(x+1)-3}$ 12) $\sqrt[3]{x^3-4}+2=x$ ⇨

13) $\sqrt[3]{3x-5}=x-1$ 14) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}=0$ 15) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}-5=0$ 16) $\sqrt{1-3x}-\sqrt{3-x}=4$

17) $\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x-5}}{2}=2$ 18) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x}$ ⇨ 19) $2\sqrt{\dfrac{x}{2}+2}+\sqrt{x-3}=5$ 20) $\sqrt{\dfrac{x+9}{2}}+1=\sqrt{8-x}$

21) $\sqrt{x+3}-3\sqrt{x}+5=0$ 22) $2\sqrt{x-5}-\sqrt{x-8}-\sqrt{x}=0$ 23) $2\sqrt{7+x}-\sqrt{2-x}=6$

24) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}-\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=0$ 25) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+3}$ 26) $1+3\sqrt{x^2+1}=2\sqrt{3x^2+1}$ ⇨

27) $2\sqrt[3]{x}=x$ 28) $\sqrt[5]{2x-3}=2$ 29) $\sqrt[6]{-x}=\sqrt{-x}$

30) $\sqrt[3]{x^4+6x^2}=3$ ⇨ 31) $\sqrt[3]{x^4-1}=2$ 32) $\sqrt[4]{x}-\sqrt{2x-1}=0$ ⇨

33) $\sqrt[6]{x}=10-\sqrt{x}$ Poni $\sqrt[6]{x}=t$ da cui $\sqrt{x}=\ldots$ ⇨ 34) $\sqrt[8]{x}+\sqrt{x}=2\sqrt[4]{x}$ ⇨

35) Da cosa si riconosce immediatamente che l'equazione $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{3}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}+1=0$ è impossibile?

36) Risolvi l'equazione $x-6\sqrt{x}-135=0$ ponendo $\sqrt{x}=y$

37) Risolvi $x^2-22=\sqrt{x^2-16}$ con la posizione $\sqrt{x^2-16}=y$

38) Risolvi $1{,}2345x-3{,}4567\sqrt{x}+2{,}3456=0$
I) ponendo dapprima $\sqrt{x}=y$ II) determinando i valori di y con l'aiuto di un foglio elettronico
III) e servendoti sempre del foglio elettronico per risalire ai valori di x, da arrotondare a 4 cifre decimali

Problemi geometrici con equazione risolvente irrazionale si trovano alle pagine 254-255 e 257

39) Risolvi $\sqrt{x+10{,}2}=x-1{,}8$ ponendo $x+0{,}2=y$

40) $x+\sqrt{1-x^2}=5^{-1}$ 41) $x=3\left(\sqrt{x+1}-1\right)$ 42) $\sqrt{3^{-1}(x-1)(x+1)+3}=x$

43) $2\left(x^2-x-2\right)^{\frac{1}{2}}=x^2-x-2$ 44) $\sqrt{\dfrac{x-4}{x+3}}=2+3\sqrt{\dfrac{x+3}{x-4}}$ 45) $\dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{x}{2x-1}}=\dfrac{2x-1}{x}$

46) $\sqrt{\dfrac{x-13}{x-7}}+\sqrt{\dfrac{x-13}{x-7}+12}=\sqrt{\dfrac{x-13}{x-7}+32}$ 47) $\sqrt{\dfrac{x-\sqrt{x}}{2}}=\dfrac{x-\sqrt{x}}{2}$ 48) $\sqrt{x(x-2)}=\dfrac{2^2-\left(2+2^{-1}x\right)+1}{\sqrt{2}}$

49) $\sqrt[3]{3+(x-1)^{\frac{1}{2}}+6(x-1)^{-\frac{1}{2}}}=2$ 50) $\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt{1+x}}}=2$ 51) $\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}}=2$

52) $\sqrt[4]{2x-2\sqrt[3]{x-2}}=\sqrt{2}$ 53) $2\left(\sqrt{2-x^2}-1\right)=x+1$ 54) $\sqrt{0{,}5x+0{,}75}=0{,}25x+0{,}75$

55) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{5\sqrt{x}+1}{x-1}$ ⇨ 56) $x+2\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}=0$ 57) $\sqrt{2-\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}-\sqrt{2+\sqrt{x-1}}$

58) $\sqrt{\dfrac{2x+1}{4x-1}}=\dfrac{1}{x}$ 59) $\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}+\sqrt{\dfrac{x}{2}+3}=2$ 60) $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}=\dfrac{10}{3}$

61) $\sqrt{\frac{1-x}{2}}+\sqrt{\frac{2-x}{3}}=\sqrt{\frac{5(4-x)-1}{6}}$ 62) $\sqrt{\frac{x+5}{x}}+\frac{x+14}{x}=3$ 63) $16\cdot\left(1{,}25\sqrt{x+1}+\frac{0{,}75}{\sqrt{x+1}}\right)=31$

64) $\frac{2}{3-\sqrt{x}}+\frac{1}{9-x}=2+\frac{1}{3+\sqrt{x}}$ 65) $\sqrt[4]{3-2\sqrt{x^2-3}}=\sqrt{\frac{x}{2}}$ 66) $\left(\frac{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+22}}{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x+22}}\right)^2=25$

67) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt[4]{x^2+6x+8}+\sqrt[8]{x^2+x-2}+\sqrt[10]{x^3+6x^2+12x+8}=0$ 68) $\left(\sqrt{x}-x+6\right)\left(\sqrt{x}-2x+1\right)=0$

69) Da www.classzone.com:
Marcy began solving $x^{2/3}=5$ by cubing each side.
What will she have to do next? What could she have done to solve the equation in just one step?

70) In un rettangolo l'altezza è di 20 cm, e misura 2 metri la somma della base con la diagonale.
Determina il perimetro del rettangolo.

71) Determina un intero sapendo che sommandogli 20 e sottraendogli 20 si ottengono due numeri, le cui radici quadrate differiscono di 4 unità.

72) Determina due numeri sapendo che sommandoli si ottiene 80, e sommandone le radici quadrate si ottiene invece 12.

Le seguenti tre equazioni sono un po' "particolari": per risolverle, occorre a un certo punto effettuare un raccoglimento a fattor comune e … sfruttare nuovamente l'uguaglianza iniziale!

73) $\sqrt[3]{6+x}+\sqrt[3]{3-x}=3$ ⇨ 74) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-12}=1$ 75) $\frac{\sqrt[3]{9+x}+\sqrt[3]{9-x}}{3}=\sqrt[3]{2}$

SOLUZIONI (le eventuali soluzioni non accettabili sono fra parentesi quadre)

1) $3\ [-1]$ 2) $\frac{1}{6};\frac{1}{2}$ 3) $-4\ [16]$ 4) $2;\ 3$ 5) $\frac{1}{4}\ [2]$ 6) $6\ [-2]$ 7) $9\ [1]$ 8) $1{,}08$ 9) $\frac{11}{9}\ [-1]$

10) $10+4\sqrt{5}\ \left[10-4\sqrt{5}\right]$ 11) $-\frac{7}{3};\ 3$ 12) $\frac{3-\sqrt{3}}{3};\ \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ 13) $-1;\ 2$ 14) $1\ [-1]$ 15) 3

16) $-33\ [-1]$ 17) $\frac{49}{9};\ 9$ 18) impossibile 19) $4\ [124]$ 20) $-1\left[\frac{47}{9}\right]$ 21) $\frac{121}{16}\ [1]$ 22) 9

23) $2\ [-94/25]$ 24) 1 25) $49/24$ 26) $-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\ [0]$ 27) $0;\ -2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}$ 28) $35/2$

29) $-1;\ 0\ [1]$ 30) $-\sqrt{3};\ \sqrt{3}$ 31) $-\sqrt{3};\ \sqrt{3}$ 32) $1\ [1/4]$ 33) 64 34) $0;\ 1;\ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8$

35) Un radicale con indice pari non può assumere valore negativo quindi la somma a 1° m. non potrà …

36) 225 37) ± 5 38) $1{,}3339;\ 2{,}7065$ 39) $5{,}8$ 40) $-3/5\ [4/5]$ 41) $0;\ 3$ 42) $7\ [2]$ 43) $-2,\ -1,\ 2,\ 3$

44) $-\frac{31}{8}$ 45) $\frac{4}{7}$ 46) 5 47) $0;\ 1;\ 4$ 48) $-2;\ \frac{18}{7}$ 49) $5;\ 10$ 50) 11383875 51) $\frac{342}{343}$ 52) $1;\ 2;\ 3$

53) $-1;\ -\frac{1}{5}$ 54) $-1;\ 3$ 55) $\frac{1}{4}\ [1]$ 56) $0;\ -4\ [1]$ 57) $5\ [1]$ 58) $1;\ \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\ \left[\frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right]$ 59) 2 60) $\frac{1}{4};\ -\frac{9}{4}$

61) $-1\ [4]$ 62) $\frac{49}{3}\ [4]$ 63) $-\frac{9}{25};\ -\frac{7}{16}$ 64) $4\ \left[\frac{49}{4}\right]$ 65) $2\ \left[-2;\ \pm 2\sqrt{21}\right]$ 66) $5;\ -30$ ($y^2=25 \Leftrightarrow y=\pm 5$)

67) -2 (una somma di quantità non negative può annullarsi solo se si annulla ciascuna delle quantità … e tutti i radicali presenti si annullano per uno stesso valore di x, che è -2)

68) $9;\ 1\ [4;\ 1/4]$ ($a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$ quindi l'equazione equivale a $\sqrt{x}-x+6=0 \vee \sqrt{x}-2x+1=0$)

69) $x^{2/3}=5;\ \left(x^{2/3}\right)^3=5^3;\ x^2=125;\ x=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$
(quando l'esponente è frazionario si intende che la base non possa essere negativa!);
oppure: $x^{2/3}=5;\ \left(x^{2/3}\right)^{3/2}=5^{3/2};\ x=\sqrt{5^3}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

70) 238 cm 71) 29 72) 16 e 64 73) $-5;\ 2$: vedi (*) qui sotto 74) $20;\ -15$ 75) ± 7

(*) $\left(\sqrt[3]{6+x}+\sqrt[3]{3-x}\right)^3=3^3$

$6+x+3\sqrt[3]{(6+x)^2}\cdot\sqrt[3]{3-x}+3\sqrt[3]{6+x}\cdot\sqrt[3]{(3-x)^2}+3-x=27 \quad 9+3\sqrt[3]{(6+x)(3-x)}\underbrace{\left(\sqrt[3]{6+x}+\sqrt[3]{3-x}\right)}_{=3}=27$ ...

EQUAZIONI IRRAZIONALI E SITUAZIONI REALI

IL POZZO

Lasciando cadere un sasso in un pozzo profondo, il suono dello "splash" si sente dopo 3,2 secondi. Qual è la profondità *s* del pozzo?

Sarebbe sbagliato, di fronte a questo problema, utilizzare unicamente la formula $s=\frac{1}{2}gt^2$ che mette in relazione lo spazio e il tempo in un moto sotto l'azione della sola forza di gravità. Infatti, a parte la questione della resistenza dell'aria al moto del sasso che comunque si può ritenere trascurabile, se si applicasse questa formula per trovare *s* a partire da $t=3,2$ non si terrebbe conto del fatto che quei $3,2$ secondi sono la somma di DUE intervalli di tempo:

1) il tempo t_1 che ci mette il SASSO per arrivare a toccare l'acqua in fondo al pozzo;
2) il tempo t_2 che impiega il SUONO per risalire dalla superficie dell'acqua alle orecchie dell'osservatore.

Per quanto riguarda t_1, abbiamo la relazione

$$s=\frac{1}{2}gt_1^2\approx\frac{1}{2}\cdot 9,8\cdot t_1^2=4,9t_1^2$$

quindi $t_1\approx\sqrt{\frac{s}{4,9}}$

mentre t_2 è legato a *s* dalla relazione

$$s=v_S\cdot t_2$$

dove v_S è la velocità del suono nell'aria.
Ora, tale velocità dipende dalla temperatura: a 21 °C è di circa 344 m/s, ma nel nostro pozzo fa decisamente freddino (5 °C pressappoco), e in queste condizioni la velocità del suono nell'aria si abbassa a circa 334,5 m/s. Dunque

$$s=v_S\cdot t_2\approx 334,5\cdot t_2\,;\quad t_2\approx\frac{s}{334,5}$$

A questo punto, sapendo che $t_1+t_2=3,2$ possiamo scrivere l'equazione irrazionale

$$\sqrt{\frac{s}{4,9}}+\frac{s}{334,5}=3,2$$

che ora risolveremo, armandoci di macchinetta calcolatrice perché i calcoli si preannunciano piuttosto impegnativi; in alternativa, potremmo utilizzare un foglio elettronico.

$$\sqrt{\frac{s}{4,9}}=3,2-\frac{s}{334,5}\quad (*)$$

$$\frac{s}{4,9}=10,24-\frac{6,4s}{334,5}+\frac{s^2}{334,5^2}$$

$$334,5^2\cdot s=4,9\cdot 334,5^2\cdot 10,24-4,9\cdot 334,5\cdot 6,4\cdot s+4,9\cdot s^2$$

...

$$4,9\cdot s^2-334,5\cdot 365,86\cdot s+4,9\cdot 334,5^2\cdot 10,24=0$$

Converrà a questo punto dividere per 4,9 (tanto, se non dividiamo ora, comunque quel 4,9 andrebbe a finire a denominatore nella formula risolutiva); arrotondando all'intero il 2° e il 3° coefficiente, avremo

$$s^2-24976s+1145756=0$$

e con la formula ridotta

$$s_{1,2}=12488\pm\sqrt{155950144-1145756}=12488\pm\sqrt{154804388}\approx 12488\pm 12442=\left\langle\begin{array}{l}46\\ \cancel{24930}\end{array}\right.$$

La seconda soluzione dell'equazione di 2° grado va evidentemente scartata, e d'altronde ci rendiamo conto che, sostituendola nell'equazione irrazionale al passaggio (*) che precede immediatamente l'elevamento al quadrato, essa renderebbe negativo il 2° membro … ma il 1° membro di (*) è un radicale quadratico, che *non può* assumere valore negativo, da cui la non accettabilità di tale soluzione.
Il nostro pozzo ha una profondità (dall'esterno alla superficie dell'acqua) di circa 46 metri.

ESERCIZI (risposte a pag. 88)

1) **IL PENDOLO**

Il periodo di un pendolo (ossia, l'intervallo di tempo affinché il pendolo compia un'oscillazione completa) è dato dalla formula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

dove *T* è il periodo in secondi, ℓ la lunghezza del pendolo in metri, g è l'accelerazione di gravità, che sulla superficie terrestre vale circa 9,8 metri al secondo per secondo.

Se in un lontano pianeta un pendolo lungo 1 metro e 80 cm oscilla con un periodo di 2 secondi e ¼ di secondo, quanto vale l'accelerazione di gravità *g* su quel pianeta?

2) **VISIBILITA'**

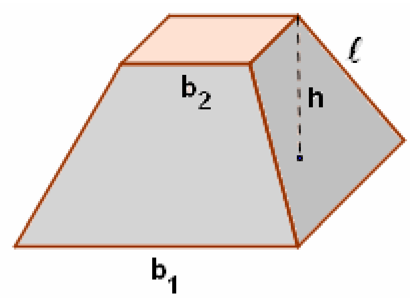
Si legge su parecchi siti anglosassoni che la distanza, sulla superficie terrestre, fino a cui si può vedere in una giornata limpida, può essere suppergiù approssimata dalla seguente formula:

$$v = \frac{1225\sqrt{a}}{1000},$$

dove v è la visibilità in miglia e a l'altezza dell'osservatore, espressa in piedi.
1 miglio è uguale a circa 1609 metri, e un piede a circa 30,5 cm.
Se la distanza massima cui si riesce a vedere è di circa 220 km, sulla cima di quale delle seguenti montagne ci si potrebbe trovare?

a) Mount Watson, Alaska, 3809 m
b) Mount Whitney, California, 4421 m
c) Mount Saint Elias, Alaska, 5489 m
d) Mount McKinley, Alaska, 6194 m

3) **ANTICHE VESTIGIA**



In una remota regione tropicale, è stata rinvenuta una costruzione a forma di tronco di piramide, con $b_1 = \text{m}\,30$, $b_2 = \text{m}\,20$, $\ell = \text{m}\,25$ (ℓ è uno degli spigoli).

Sapendo che sussiste la formula $\ell = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}(b_1 - b_2)^2}$

- determina l'altezza *h* della costruzione
- e stabilisci anche quanto misura l'apotema del tronco

4) **CONO**

La superficie laterale di un cono è data da $S_L = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, se *r* è il raggio di base e *h* l'altezza.

- Supponi nota la superficie laterale e il raggio, e inverti la formula per determinare l'altezza *h*.
- Supponi $S_L = 5\ \text{m}^2$ e $h = 1\ \text{m}$; determina il raggio *r* in metri con la precisione di 2 cifre decimali

5) **BALENE** (da *Intermediate Algebra* di Ron Larson e Kimberly Nolting)

The weight *w* (in pounds) of a killer whale can be modeled by

$$w = 280 + 325\sqrt{t}\ ,\ \ 0 \le t \le 144$$

where *t* represents the age (in months) of the killer whale.
What age did the killer whale weigh about 3400 pounds?

6) **TSUNAMI** (da www.regentsprep.org)

The speed that a tsunami can travel is modeled by the equation

$$S = 356\sqrt{d}$$

where *S* is the speed in km per hour and *d* is the average depth of the water in km

a) What is the speed of the tsunami when the average water depth is 0.512 km?
b) Solve the equation for *d*
c) A tsunami is found to be traveling at 120 km per hour. What is the average depth of the water?

7) **SOFFIA IL VENTO** (da *Intermediate Algebra* di Ron Larson e Kimberly Nolting)

The Beaufort wind scale was devised to measure wind speed.

Beaufort number	**Force of wind**	**Effects of wind**
0	Calm	Smoke rises vertically
1	Light air	Direction shown by smoke
2	Light breeze	Leaves rustle; wind felt on face
3	Gentle breeze	Leaves move; flags extend
4	Moderate breeze	Small branches sway; paper blown about
5	Fresh breeze	Small trees sway
6	Strong breeze	Large branches sway; umbrellas difficult to use
7	Moderate gale	Large trees sway; walking difficult
8	Fresh gale	Twigs break; walking hindered.
9	Strong gale	Branches scattered about; slight damage to buildings
10	Whole gale	Trees uprooted; severe damage to buildings
11	Storm	Widespread damage
12	Hurricane	Devastation

The Beaufort numbers *B*, which range from 0 to 12, can be modeled by

$B = 1,69\sqrt{s+4,45} - 3,49$ where *s* is the speed (in miles per hour) of the wind.

Find the wind speed that corresponds to the Beaufort number *B* = 11.

8) **CHIODI**

The length ℓ (in inches) of a standard nail can be modeled by $\ell = 54d^{3/2}$ where *d* is the diameter (in inches) of the nail. What is the diameter of a standard nail that is 3 inches long?

9) **BRRR …**

Un indicatore che viene utilizzato per quantificare in qualche modo il disagio dovuto alla combinazione di freddo e di vento, è il cosiddetto "wind chill" (*wind* = *vento*, *chill* = *freddo*, *gelo*).
Esso indica la temperatura percepita, quando oltre al freddo c'è anche il vento che complica le cose.
Del "wind chill" si tiene conto nelle nazioni molto fredde per prendere decisioni sulla eventuale chiusura delle scuole, sulla raccolta dell'immondizia …

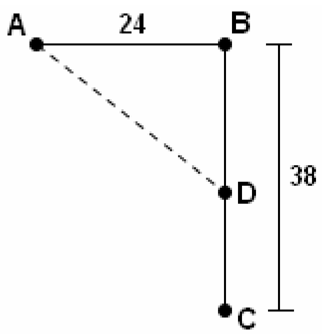
In un sito dello Yukon (Canada), troviamo la seguente formula lì utilizzata per il calcolo del *wind chill* *(abbiamo arrotondato i coefficienti, che sono più complicati nella formula originaria)*:

$$W = \left(12 + 6\sqrt{v} - 0,3v\right)\left(33 - T\right)$$

Qui *W* è appunto l'indice *wind chill*,
v la velocità del vento in km/h,
T la temperatura in gradi centigradi.

Supponiamo ora che la temperatura sia di 22 sotto zero e che la televisione abbia comunicato che il *wind chill* vale 2310.
Risali, tramite la formula, alla velocità del vento.

10) **NEL DESERTO E SULLA STRADA**



A una traversata del deserto, da A fino a D, alla velocità costante di 25 km all'ora, fa seguito la comoda tappa da D a C sulla strada statale ai 100 km orari.
Tutto il viaggio richiede in totale 1 ora e 24 minuti.
L'angolo di vertice B in figura è retto.
Ora, A dista da B 24 km, B dista da C 38 km …
Ma quale sarà la distanza fra D e C?
(*Armati di macchinetta perché i calcoli sono piuttosto impegnativi, anche se il risultato è intero*)

RISPOSTE

1) Circa 14 m al secondo per secondo 2) a 3) ≈ 24 m; $\approx 24,5$ m 4) $h = \sqrt{\dfrac{S_L{}^2}{\pi^2 r^2} - r^2}$; m 1,08 5) ≈ 92 mesi

6) a) ≈ 255 km/h b) $d = (S/356)^2$ c) ≈ 114 m 7) About 69 miles per hour 8) $\approx 0,15$ inches 9) 100 km/h

10) DC = x; $\dfrac{\sqrt{576 + (38-x)^2}}{25} + \dfrac{x}{100} = 1,4$ ... $15x^2 - 936x + 12720 = 0$ ... ; $x = 20\,\text{km}$