

EQUAZIONI IRRAZIONALI - CORREZIONE

9)

$$\frac{2\sqrt{3-x}+1}{x} = 3$$

$$2\sqrt{3-x}+1 = 3x \quad \left(\begin{array}{l} x \neq 0, \text{ perché moltiplicando per } x \\ \text{il denominatore } x \text{ se n'è andato...} \end{array} \right)$$

$$2\sqrt{3-x} = 3x-1 \quad (2\sqrt{3-x})^2 = (3x-1)^2 \quad 4(3-x) = 9x^2 - 6x + 1$$

$$12 - 4x = 9x^2 - 6x + 1 \quad 9x^2 - 2x - 11 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+99}}{9} = \frac{1 \pm \sqrt{100}}{9} = \frac{1 \pm 10}{9} = \left\{ \begin{array}{l} \cancel{\frac{11}{9}} \\ \frac{11}{9} \end{array} \right. \text{ non acc.}$$

10)

$$2(2\sqrt{x-1}+1) = x \quad 4\sqrt{x-1}+2 = x \quad 4\sqrt{x-1} = x-2 \quad (4\sqrt{x-1})^2 = (x-2)^2$$

$$16(x-1) = x^2 - 4x + 4 \quad 16x - 16 = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 20x + 20 = 0 \quad x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 20} = 10 \pm \sqrt{80} = 10 \pm \sqrt{16 \cdot 5} = 10 \pm 4\sqrt{5}$$

Controllo di accettabilità :

effettuiamo sul passaggio $\boxed{4\sqrt{x-1} = x-2}$, che precede l'elevamento al quadrato.

Con la sostituzione $x = 10 - 4\sqrt{5}$ abbiamo

$$4\sqrt{10 - 4\sqrt{5} - 1} = 10 - 4\sqrt{5} - 2$$

da cui si vede subito che il valore non è accettabile, perché il secondo membro è negativo, e una radice quadrata non può avere valore negativo.

Con la sostituzione $x = 10 + 4\sqrt{5}$ abbiamo

$$4\sqrt{10 + 4\sqrt{5} - 1} = 10 + 4\sqrt{5} - 2$$

$$4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 8 + 4\sqrt{5}$$

$$4\sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = 4(2 + \sqrt{5}) \text{ ok}$$

L'equazione ammette dunque la soluzione $\boxed{x = 10 + 4\sqrt{5}}$

12)

$$\sqrt[3]{x^3 - 4} + 2 = x$$

$$\sqrt[3]{x^3 - 4} = x - 2$$

$$(\sqrt[3]{x^3 - 4})^3 = (x - 2)^3$$

$$x^{\cancel{3}} - 4 = x^{\cancel{3}} - 6x^2 + 12x - 8$$

$$6x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = \boxed{\frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}}$$

Le soluzioni trovate sono certamente accettabili in quanto non abbiamo elevato ad esponente pari, ma dispari.

18)

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$\cancel{x+1} + \cancel{x-1} + 2\sqrt{x^2-1} = \cancel{x}$$

$$2\sqrt{x^2-1} = -x$$

$$(2\sqrt{x^2-1})^2 = (-x)^2$$

$$4(x^2-1) = x^2$$

$$4x^2 - 4 = x^2$$

$$3x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ entrambe non accettabili}$$

26)

$$1 + 3\sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{3x^2+1}$$

$$(1 + 3\sqrt{x^2+1})^2 = (2\sqrt{3x^2+1})^2$$

$$1 + 9(x^2+1) + 6\sqrt{x^2+1} = 4(3x^2+1)$$

$$1 + 9x^2 + 9 + 6\sqrt{x^2+1} = 12x^2 + 4$$

$$\cancel{6^2}\sqrt{x^2+1} = \cancel{3}x^2 - \cancel{6^2}$$

$$(2\sqrt{x^2+1})^2 = (x^2-2)^2$$

$$4(x^2+1) = x^4 - 4x^2 + 4$$

$$4x^2 \cancel{4} = x^4 - 4x^2 \cancel{4}$$

$$x^4 - 8x^2 = 0; \quad x^2(x^2-8) = 0; \quad x^2 = 0 \vee x^2 = 8$$

$$\cancel{x=0} \vee x = \pm\sqrt{8} = \boxed{\pm 2\sqrt{2}} \text{ non acc.}$$

30)

$$\sqrt[3]{x^4+6x^2} = 3$$

$$(\sqrt[3]{x^4+6x^2})^3 = 3^3$$

$$x^4 + 6x^2 = 27$$

$$x^4 + 6x^2 - 27 = 0$$

$$(x^2+9)(x^2-3) = 0$$

$$x^2+9 = 0 \text{ impossibile}$$

$$x^2-3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$\boxed{x = \pm\sqrt{3}} \text{ certamente accettabili} \\ \text{(esponente dispari)}$$

32)

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt{2x-1} = 0$$

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt{2x-1}$$

$$(\sqrt[4]{x})^4 = (\sqrt{2x-1})^4$$

$$x = (2x-1)^2$$

$$x = 4x^2 - 4x + 1; \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \left\langle \begin{array}{l} \cancel{\frac{1}{4}} \\ \boxed{1} \end{array} \right. \text{ non acc.}$$

33)

$$\sqrt[6]{x} = 10 - \sqrt{x}$$

$$\sqrt[6]{x} = t \rightarrow \sqrt{x} = (\sqrt[6]{x})^3 = t^3$$

$$t = 10 - t^3$$

$$t^3 + t - 10 = 0$$

Ruffini, per la scomposizione: $P(2) = 0$

$$\dots (t-2)(t^2+2t+5) = 0 \quad t = 2 \vee t^2+2t+5 = 0 \\ \text{impossibile } (\Delta < 0)$$

$$\sqrt[6]{x} = 2 \rightarrow \boxed{x = 2^6 = 64} \text{ accettabile}$$

34)

$$\sqrt[8]{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt[4]{x}$$

$$\boxed{\sqrt[8]{x} = t} \rightarrow \begin{cases} (\sqrt[8]{x})^2 = t^2, & \sqrt[4]{x} = t^2 \\ (\sqrt[8]{x})^4 = t^4, & \sqrt{x} = t^4 \end{cases}$$

$$t + t^4 = 2t^2$$

$$t^4 - 2t^2 + t = 0$$

$$t(t^3 - 2t + 1) = 0$$

$$\boxed{t = 0}$$

$$t^3 - 2t + 1 = 0 \quad P(1) = 0 \quad (t-1)(t^2 + t - 1) = 0$$

$$\boxed{t = 1}, \quad \boxed{t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

$$\sqrt[8]{x} = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \text{ acc.}$$

$$\sqrt[8]{x} = 1 \rightarrow \boxed{x = 1} \text{ acc.}$$

$$\sqrt[8]{x} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ impossibile: una radice ottava non può avere valore negativo}$$

$$\sqrt[8]{x} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \rightarrow \boxed{x = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^8}$$

accettabile, perché l'uguaglianza

$$\sqrt[8]{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^8} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^8} = 2\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^8}$$

è vera, come si vede dai seguenti passaggi:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^4 = 2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{(\sqrt{5})^4 - 4 \cdot (\sqrt{5})^3 + 6 \cdot (\sqrt{5})^2 - 4 \cdot \sqrt{5} + 1}{16} = 2 \cdot \frac{5 + 1 - 2\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{25 - 20\sqrt{5} + 30 - 4\sqrt{5} + 1}{16} = 2 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{56^7 - 24^3 \sqrt{5}}{16_2} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5} - 1 + 7 - 3\sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{2}, \text{ ok}$$

La verifica di accettabilità, a ben guardare, non era necessaria!

Infatti l'equazione data $\sqrt[8]{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt[4]{x}$ coincide con l'equazione $t + t^4 = 2t^2$, avendo posto $\sqrt[8]{x} = t$.

Quindi le soluzioni dell'equazione $\sqrt[8]{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt[4]{x}$

sono esattamente quei valori di x per cui vale l'uguaglianza $\sqrt[8]{x} = t$,

essendo t una soluzione della $t + t^4 = 2t^2$:

ma affinché un'uguaglianza del tipo $\sqrt[8]{x} = t$ possa,

per un opportuno valore di x , avere senso,

occorre e basta che t sia ≥ 0 .

55)

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{5\sqrt{x+1}}{x-1} \quad \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{5\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})}$$

$$\frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}) + (\sqrt{x-1}) \cdot \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} = \frac{5\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1})} \quad \text{condizione: } x \neq 1 \text{ (NOTA)}$$

NOTA

$\sqrt{x+1} \neq 0$ $\sqrt{x} \neq -1$ è sempre verificata (una radice quadrata non può avere risultato negativo)

$\sqrt{x-1} \neq 0$ $\sqrt{x} \neq 1$ $x \neq 1$

$$x + 2\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2 + x - \sqrt{x} = 5\sqrt{x+1} \quad -3\sqrt{x} = -1 - 2x \quad 3\sqrt{x} = 1 + 2x \quad (3\sqrt{x})^2 = (1+2x)^2$$

$$9x = 1 + 4x + 4x^2 \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad 4x^2 - 4x - x + 1 = 0 \quad 4x(x-1) - (x-1) = 0$$

$$(x-1)(4x-1) = 0 \quad \cancel{x=1} \vee \boxed{x=1/4}$$

non acc.

73)

$$\sqrt[3]{6+x} + \sqrt[3]{3-x} = 3$$

$$\left(\sqrt[3]{6+x} + \sqrt[3]{3-x}\right)^3 = 3^3$$

$$\left(\sqrt[3]{6+x}\right)^3 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{6+x}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{3-x} + 3 \cdot \sqrt[3]{6+x} \cdot \left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{3-x}\right)^3 = 27$$

$$6 + 3 \cdot \sqrt[3]{6+x} \cdot \sqrt[3]{3-x} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[3]{6+x} + \sqrt[3]{3-x}\right)}_{=3} + 3 \cdot \sqrt[3]{3-x} = 27$$

$$6 + 9 \cdot \sqrt[3]{6+x} \cdot \sqrt[3]{3-x} + 3 = 27$$

$$9 \cdot \sqrt[3]{6+x} \cdot \sqrt[3]{3-x} = 18$$

$$\sqrt[3]{6+x} \cdot \sqrt[3]{3-x} = 2$$

$$(6+x)(3-x) = 8$$

$$18 - 6x + 3x - x^2 = 8$$

$$-x^2 - 3x + 10 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$x = -5 \vee x = 2$$