Alcuni momenti significativi
della storia delle equazioni algebriche

Dario Palladino
Università di Genova

La risoluzione delle equazioni risale all'antichità e ha accompagnato l'intero sviluppo della matematica fino ai nostri giorni. In questo intervento ci soffermiamo schematicamente su alcuni momenti nodali delle complesse vicende della storia delle equazioni, accompagnandoli, senza alcuna pretesa di approfondire le questioni storiche, con qualche esempio tratto da testi di storia della matematica.

In prima approssimazione si può dire che il concetto di equazione e di sistema di equazioni non ha subito sostanziali mutamenti: le equazioni e i sistemi sono stati da sempre impiegati per risolvere problemi di varia natura, i cui enunciati sono rimasti sostanzialmente inalterati col passare del tempo, anche se le applicazioni dell'algebra si sono sempre più estese con l'allargarsi dell'impiego di modelli matematici nell'indagine della realtà. I cambiamenti sostanziali si sono verificati nelle notazioni e nei procedimenti risolutivi che le nuove rappresentazioni simboliche e formali hanno consentito di porre in atto.

Nelle tavolette di argilla risalenti alla civiltà assiro-babilonese (dinastia di Hammurabi, XVI-XVIII sec. a.C.) sono presenti molti problemi di secondo grado quale il seguente (nel quale scriviamo i numeri nel nostro sistema di numerazione): «Lunghezza, larghezza. Ho moltiplicato la lunghezza per la larghezza ed ho fatto una superficie. Ho aggiunto alla superficie ciò di cui la lunghezza supera la larghezza e ciò fa 183. La lunghezza e la larghezza insieme fanno 27. Quanto sono la lunghezza e la larghezza?». Esso si traduce nel sistema che oggi, ponendo x la lunghezza e y la larghezza, scriviamo:

$$\begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{cases}$$

La risoluzione proposta nella tavoletta illustra come già quasi due millenni prima di Cristo fosse nota la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. La soluzione è la seguente: «Tu: per il tuo procedimento aggiungi 27 al 183, fa 210. Aggiungi 2 al 27, fa 29. La sua metà è 14,5, il quadrato di 14,5 è 210,25; da 210,25 togli 210, rimane 0,25, la radice di 0,25 è 0,5. Aggiungi 0,5 al 14,5, fa 15, questa è la lunghezza. Togli 0,5, viene 14, togli quel 2 che avevi aggiunto, viene 12, questa è la larghezza». Il procedimento, tutt'altro che semplice da estrapolare da queste poche righe, corrisponde ai passaggi che attualmente sviluppiamo come segue:

$$\begin{cases} xy + x - y + x + y = 183 + 27 \\ x + y + 2 = 27 + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y+2) = 210 \\ x + (y+2) = 29 \end{cases}$$

$$t^2 - 29\,t + 210 = 0$$

$$t = \frac{29}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{29}{2}\right)^2 - 210} = 14,5 \pm \sqrt{210,25 - 210} =$$

$$= 14,5 \pm \sqrt{0,25} = 14,5 \pm 0,5$$

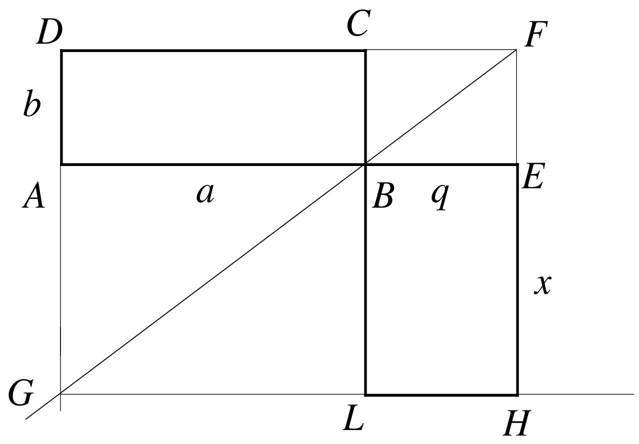
$x = 14,5 + 0,5 = 15$

$y + 2 = 14,5 - 0,5 = 14$, da cui $y = 12$

In un papiro Egizio risalente al 1650 a.C. si trova enunciato il problema di determinare il valore del mucchio (così era detta l'incognita) se il mucchio e un settimo del mucchio sono uguali a 19. Si tratta di risolvere l'equazione, la cui risoluzione è alla portata di un ragazzino di scuola media e sulla quale torneremo più avanti, che oggi scriviamo:

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

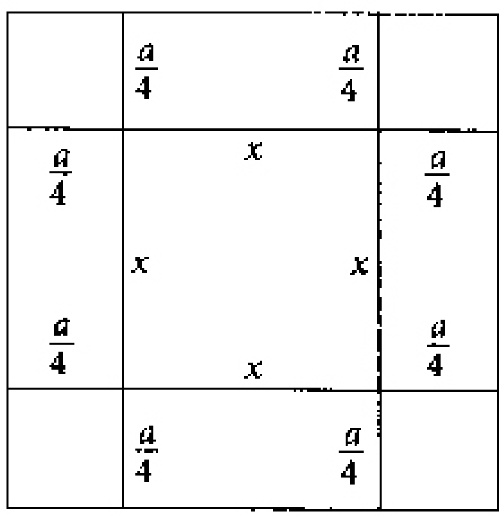
Nella cultura greca questi problemi numerici, non dissimili da quelli presenti ancora oggi nei testi per la scuola media, non erano ritenuti importanti poiché di natura applicativa: la vera Matematica era la geometria. Pertanto, presso i Greci sia il calcolo letterale, sia l'algebra erano vincolati all'interpretazione geometrica. Già la semplice scrittura della generica equazione di primo grado, $ax = b$, era inconcepibile dato che ax, essendo un prodotto, rappresentava un rettangolo e b un segmento, e non ha senso uguagliare una figura piana con una lineare. Un'equazione di primo grado poteva essere, ad esempio, $ab = qx$, e veniva espressa nel modo seguente: "Dato il rettangolo di dimensioni a e b, determinare un rettangolo ad esso equivalente avente un lato pari a q". La risoluzione era affidata ad una costruzione geometrica quale la seguente:



Dato il rettangolo *ABCD* di dimensioni a e b, si prolunga *AB* di un segmento *BE* pari a q. Costruito il rettangolo *BEFC*, si individua il punto *G* come intersezione dei prolungamenti di *FB* e di *DA*. Completando il rettangolo *FDGH* si determina il rettangolo *LHEB* avente un lato pari a q e l'altro che risolve l'equazione, dato che, come è evidente dalla figura, i rettangoli *ABCD* e *LHEB* sono equivalenti (si ottengono sottraendo dai triangoli uguali *GDF* e *GHF* le coppie di triangoli uguali *BCF* e *BEF*, *GAB* e *GLB*).

Il famoso algebrista arabo al-Khuwarizmi, nella sua opera *Al-gebr we'l mukabala* del IX secolo d.C., illustra con esempi la risoluzione di vari tipi di equazioni di secondo grado (va ricordato che l'uso dei numeri negativi è molto più recente, per cui, in corrispondenza di ogni grado, si distinguevano varie equazioni) e fornisce una dimostrazione geometrica delle formule impiegate.

Descriviamo come risolve le equazioni del tipo $x^2 + ax = b$ (per rispettare l'omogeneità della formula b era detto *radice*). Si considera un quadrato di lato x (ossia di area x^2) e sui suoi lati si costruiscono quattro rettangoli aventi come altro lato $\frac{a}{4}$, come illustrato nella figura seguente. L'area del quadrato più i quattro rettangoli è pari a $x^2 + 4 \cdot \frac{a}{4} = x^2 + ax$, ossia al primo membro dell'equazione, che quindi è uguale a b. Completando la figura con quattro quadrati, i quali hanno ciascuno area $\frac{a^2}{16}$, si ottiene un quadrato più grande, di area $\frac{a^2}{4} + b$, il cui lato è $\sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$. L'incognita x si ottiene togliendo dal lato del quadrato grande il doppio del lato dei quadrati più piccoli e ciò equivale alla formula:



$$x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2}$$

Al-Khuwarizmi non risolve il problema nella forma generale qui proposta, ma ne propone vari casi particolari e presenta altre costruzioni relative alle equazioni del tipo $x^2 + b = ax$ e $x^2 = ax + b$.

È quindi necessario tener presente come, almeno in generale, la risoluzione delle equazioni fosse vincolata all'interpretazione geometrica limitando così il grado a tre. Solo nel sedicesimo secolo l'algebra iniziò un suo vero e proprio sviluppo autonomo dalla geometria, quando le lettere furono intese rappresentare non grandezze geometriche, ma numeri: attraverso l'opera di F. Viète (1540-1603) e R. Descartes (Cartesio) (1596-1650) raggiunse una sistemazione e un modo di presentazione simile a quelli attuali poco più di due secoli fa, nell'*Introduzione completa all'algebra* (1770) di L. Euler (Eulero) (1707-1783).

Nello stesso periodo giunse a maturazione il linguaggio algebrico vero e proprio. In precedenza (*algebra retorica*) operazioni ed equazioni, con la loro risoluzione, venivano espressi con parole (ad esempio l'incognita veniva detta la "cosa", il suo quadrato il "censo", la sua terza potenza il "cubo", la quarta potenza "censo censo") ed era assai arduo seguire i passaggi con cui si perveniva ai risultati finali dei problemi. Ne seguì una fase intermedia (*algebra sincopata*), in cui comparvero alcuni simboli e parole stilizzate: ad esempio Luca Pacioli (1445-circa 1514), autore dell'opera *Summa de arithmetica* (1494) che contribuì alla diffusione in occidente dell'uso delle cifre arabo-indiane, indicava con "co" l'incognita, con "ce" il suo quadrato, con "cu" il suo cubo e con "p" e "m" l'addizione e la sottrazione. Solo in seguito l'algebra ricevette la veste che la rende simile alle attuali esposizioni (*algebra simbolica*).

Prima di allora i testi di aritmetica e algebra venivano scritti completamente in lingua (prima in latino, poi in volgare), e lentamente furono arricchiti con simboli. La lettura di queste opere è assai complessa: solo pochi studiosi di matematica erano in grado di capirle e di risolvere problemi che oggi sono alla portata degli studenti del primo biennio delle scuole superiori. Come l'introduzione del sistema decimale ha consentito a tutti di fare calcoli con i numeri, così l'introduzione del calcolo letterale e delle sue applicazioni agli altri settori della matematica ha messo a disposizione di tutti uno strumento di grande efficacia per risolvere problemi che in precedenza solo pochi esperti erano in grado di affrontare.

Vediamo un esempio dal trattato di al-Khuwarizmi che ci sembra particolarmente istruttivo per illustrare la difficoltà di lettura dei trattati di algebra prima dell'avvento del simbolismo (e si noti che il problema è dei più semplici):

«Ho diviso dieci in due parti, poi ho moltiplicato ogni parte per se stessa e preso la somma delle due, che fa cinquantotto dirham. Poni una della due parti una cosa e l'altra dieci meno una cosa. Moltiplica dieci meno una cosa per se stesso, fa cento più un censo meno venti cose, poi una cosa per una cosa, fa un censo. Poi addiziona entrambi, fa cento più due censi meno venti cose, equivalente a cinquantotto dirham. Restaura il cento più due censi con le venti cose mancanti e portale ai cinquantotto, fa allora cento più due censi equivalente a cinquantotto dirham più venti cose. Riporta a un unico censo prendendo la metà di tutto ciò che hai. Fa cinquanta dirham più un censo equivalente a ventinove dirham più dieci cose. Diminuiscilo, cioè sottrai da cinquanta ventinove, rimane ventuno più un censo uguale a dieci cose. Dimezza le radici, fa cinque, moltiplicalo per se stesso, fa venticinque. Sottrai da questo il ventuno legato al censo, rimane quattro. Prendi la sua radice che fa due e sottrai questo dalla metà delle radici, cioè cinque. Rimane tre che è una delle due parti e l'altra è sette. Questo problema ti ha riferito uno dei sei casi, cioè censi più numeri equivalente a radici».

Il procedimento descritto col nostro linguaggio simbolico è il seguente:

$$(10 - x)^2 + x^2 = 58$$
$$100 + x^2 - 20x + x^2 = 58$$
$$100 + 2x^2 = 58 + 20x$$
$$50 + x^2 = 29 + 10x$$
$$21 + x^2 = 10x$$
$$x = \frac{10}{2} - \sqrt{25 - 21} = 5 - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3$$

La difficoltà di eseguire calcoli e passaggi in forma retorica giustifica procedimenti di risoluzione che oggi ci appaiono alquanto artificiosi. Ad esempio gli egiziani, per risolverle il problema che abbiamo enunciato in precedenza, attribuivano all'incognita un valore opportuno (e ciò in seguito venne detto "metodo di falsa posizione") ed eseguivano i calcoli a primo membro. Confrontando il valore ottenuto col secondo membro, risalivano alla soluzione con una proporzione. In termini moderni, si dà ad esempio a x il valore 7 (e ciò consente di fare i calcoli senza dover sommare frazioni): se $x = 7$, il primo membro vale $7 + \frac{7}{7} = 8$. La soluzione dell'equazione si trova con la proporzione $x : 7 = 19 : 8$, da cui $x = \frac{19 \cdot 7}{8} = \frac{133}{8}$.

La regola di falsa posizione fu elaborata anche dai matematici arabi medioevali. Data l'equazione $ax + b = 0$, si scriveva la soluzione mediante una formula che possiamo giustificare nel modo seguente.

Si attribuisce a x il valore h e si calcola il valore k del primo membro $ah + b = k$. Sottraendo membro a membro si ricava a e si ottiene $a = \frac{k}{h - x}$.

Si sostituisce a nell'equazione data e, risolvendo rispetto a x, si trova $x = \frac{h(k - b) - hk}{k - b}$.

Ad esempio, data l'equazione $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 21 = 0$, dando a x il valore $h = 12$, si trova $k = -14$, e quindi $x = \frac{12(-14 + 21) + 12 \cdot 14}{-14 + 21}$ = 36.

Nell'algebra retorica questo procedimento apparentemente complesso evitava di sommare i termini simili e, scegliendo opportunamente il valore di h, si evitavano calcoli con le frazioni nella determinazione di k.

Nei testi di algebra questo metodo è comparso fino ad epoca relativamente recente. Nel manuale V. Buonsanto, *Elementi di aritmetica*, Napoli, 1843 si legge ad esempio: "Si andrà in cerca di un numero che sciolga un quesito: ma voi nol troverete altrimenti che per mezzo di un numero *falso*, che non lo scioglie. Ecco in che consiste il *metodo di falsa posizione semplice*. Vi sia stato detto: *un terzo ed un quarto del mio danaro sono* 24 *ducati. Quanto danaro ho io?* Ignorando il vero numero de' ducati, supponete che chi vi ha parlato ne abbia 12. *Questo numero così arbitrariamente supposto si chiama posizione*. Ma è facile vedere esser *falsa una tale supposizione*, perché il terzo e il quarto di 12 sono 4 + 3 = 7: e perciò il vostro amico dovrebbe avere non 24 ducati per un terzo e un quarto, ma 7. Dite però così. Se 7 nasce dalla falsa posizione 12; il 24 da qual numero nascerà? Farete dunque $7 : 12 = 24 : \frac{288}{7}$ e $\frac{288}{7} = 41$ e $\frac{1}{7}$. Per isciogliere simili quesiti si può supporre qualunque numero: ma giova soprattutto il supporlo tale che non involga la noia delle frazioni. Giova parimenti supporlo piccolo".

Nei trattati di algebra si usava, oltre la falsa posizione semplice, la *doppia falsa posizione*. Data l'equazione $ax + b = 0$ si danno ad x due valori qualsiasi h_1 e h_2 e si trovano i valori k_1 e k_2 dei due primi membri:

$$a\,h_1 + b = k_1 \quad \text{e} \quad a\,h_2 + b = k_2 \qquad (*)$$

Sottraendo membro a membro si ricava $a(h_1 - h_2) = k_1 - k_2$.
Moltiplicando la prima delle (*) per h_2 e la seconda per h_1, si ha:

$$a\,h_1\,h_2 + b\,h_2 = k_1\,h_2 \quad \text{e} \quad a\,h_2\,h_1 + b\,h_1 = k_2\,h_1$$

Sottraendo membro si ricava $b(h_2 - h_1) = k_1\,h_2 - k_2\,h_1$.
Dividendo membro a membro le due uguaglianze ottenute si ha:

$$-\frac{b}{a} = \frac{k_1 h_2 - k_2 h_1}{k_1 - k_2}$$

che è la soluzione dell'equazione data.

Questa regola si trova esposta nel *Liber Abaci* (1202) di Leonardo Pisano, nella *Summa de arithmetica* (1494) di Luca Pacioli, nel *General Trattato* (1560) di N. Tartaglia e in molte altre opere (anche più recenti).

Interessanti considerazioni si possono trarre dalle complesse vicende storiche che hanno condotto gli algebristi italiani del Cinquecento, Scipione Dal Ferro (circa 1465-1526), Niccolò Tartaglia (circa 1500-1576), Gerolamo Cardano (1501-1576), Ludovico Ferrari (1522-1565) e Rafael Bombelli (circa 1526-circa 1573), alla scoperta delle formule risolutive delle equazioni di terzo e quarto grado. Accenniamo brevemente a qualche momento significativo di queste vicende. Attualmente, per dimostrare la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado si procede nel modo seguente.

Se in una equazione generica di terzo grado:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (a \neq 0)$$

si pone $x = y - \frac{b}{3a}$, si ottiene una equazione di terzo grado in y che non contiene il termine di secondo grado in y e, dividendo per il primo coefficiente a, si può scrivere $y^3 + py + q = 0$.

Quindi, risolvendo le equazioni di terzo grado senza il termine di grado 2, ossia del tipo:

$$x^3 + px + q = 0$$

si possono risolvere tutte le equazioni di terzo grado.

Si pone $x = u + v$ e si determinano u e v in modo che x sia soluzione dell'equazione. Si ha:

$$x^3 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$$
$$x^3 = u^3 + v^3 + 3uvx$$
$$x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0.$$

Affinché questa equazione coincida con quella data, deve essere:

$$-3uv = p \qquad \text{e} \qquad -(u^3 + v^3) = q$$

ossia:

$$uv = -\frac{p}{3} \qquad \text{e} \qquad u^3 + v^3 = -q,$$

da cui:

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

Pertanto, u^3 e v^3 sono soluzioni dell'equazione:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

e quindi:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{e} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

In definitiva si ha:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

che è la *risolvente* dell'equazione cubica.

La soluzione delle equazioni di terzo grado fu trovata, almeno per certi casi, dal matematico bolognese Scipione dal Ferro intorno al 1520 il quale, tuttavia, non rese nota la sua scoperta per usarla nelle sfide tra matematici che a quei tempi erano frequenti. Pare tuttavia che la rivelò ad un suo allievo, un mediocre matematico di nome Antonio Maria Fior che, nel 1535, osò sfidare il grande matematico Niccolò Fontana da Brescia, noto come Tartaglia, proponendogli una serie di problemi che conducevano ad equazioni di terzo grado. Tartaglia riuscì a trovare per conto suo la formula risolutiva e vinse la sfida, ma anch'egli tenne segreta la formula per avvalersene in altre sfide. Gerolamo Cardano, venuto a conoscenza della scoperta di Tartaglia, gli chiese di comunicargli la formula promettendo di mantenerla segreta. Il matematico bresciano comunicò la formula a Cardano mediante un celebre componimento in versi del quale riportiamo i primi versi:

> Quando che 'l cubo con le cose appresso
> se agguaglia a qualche numero discreto
> trovan dui altri differenti in esso.
> Da poi terrai questo per consueto
> che il lor produtto sempre sia eguale
> al terzo cubo delle cose neto,
> El residuo poi suo generale
> delli lor lati cubi ben sottratti
> varrà la tua cosa principale.
> ………………………………………………

Cardano estese i risultati di Tartaglia e riuscì a trovare una dimostrazione geometrica alquanto complessa della formula risolutiva, che pubblicò nella sua *Ars Magna* del 1545 (nella letteratura la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado viene abitualmente detta *formula cardanica* o *di Cardano*). Anche se Cardano citò nella sua opera Scipione dal Ferro e Tartaglia, la reazione di quest'ultimo a veder pubblicati da un altro i suoi risultati fu molto violenta e culminò in una serie di *Cartelli di matematica disfida*. Queste sfide coinvolsero, oltre a Tartaglia e Cardano, un brillante allievo di quest'ultimo, Ludovico Ferrari, professore anch'egli come il suo maestro Cardano all'Università di Bologna, al quale si deve la risoluzione dell'equazione generale di quarto grado ricondotta, mediante alcuni opportuni passaggi a quella di un'equazione di terzo grado (la risolvente cubica dell'equazione di quarto grado). Per comprendere i motivi di queste dispute si deve tener presente che, a quei tempi, i "maestri" non erano dipendenti pubblici, ma erano assunti e pagati in base alle loro scoperte, alla loro notorietà, alla loro capacità di dimostrare di essere superiori ad eventuali concorrenti alla loro posizione accademica. È chiaro come una situazione di questo genere abbia creato un clima di sospetto e di diffidenza e possa aver indotto a non agire secondo un'etica scientifica.

Un aspetto interessante di questa storia è il seguente: un'analisi del componimento di Tartaglia di cui abbiamo in precedenza riportato alcuni versi può mostrare come in esso si celi non solo la formula risolutiva, ma anche il procedimento con cui la si può stabilire, sostanzialmente nel modo come lo abbiamo proposto in precedenza. Dal nostro punto di vista Tartaglia ha comunicato a Cardano la formula e la sua "dimostrazione". Ebbene, durante le accese sfide, Tartaglia non accusò mai Cardano di avergli "rubato" la dimostrazione. Ciò significa, in sintesi, che i passaggi algebrici non erano affatto ritenuti dimostrazioni. A convalida di quanto abbiamo già affermato in precedenza, l'algebra si è emancipata dalla geometria solo in epoca successiva, ossia nel XVII secolo, e si è anche presa la rivincita sulla sua "rivale" con gli sviluppi della geometria analitica: il linguaggio algebrico ha reso molto più accessibile la trattazione dei luoghi geometrici (ad esempio l'ellisse, l'iperbole e la parabola) e delle loro proprietà e ha consentito generalizzazioni che la "gabbia" dell'interpretazione geometrica impediva di sviluppare.

Un problema ancora più interessante che coinvolge la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado è la seguente. Consideriamo l'equazione cubica:

$$x^3 = 15x + 4 \qquad\qquad (x^3 - 15x - 4 = 0)$$

la quale ha evidentemente la soluzione $x = 4$ ($64 = 15 \cdot 4 + 4$). Se cerchiamo di risolverla con la formula di Cardano si trova che sotto la radice quadrata compare il numero negativo:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^2}{27} = 4 - 125 = -121$$

Questa circostanza ha spinto il matematico bolognese Rafael Bombelli, nella sua *Algebra* del 1572, a operare con le radici quadrate dei numeri negativi e quindi a eseguire quelle che sono le abituali operazioni con i numeri complessi. Senza seguire i particolari dei complicati procedimenti di Bombelli, nel caso in esame, la soluzione dell'equazione è:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \qquad\qquad (°)$$

Operando sulle radici quadrate dei numeri negativi come se fossero numeri usuali, si trova che:

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$
$$(2-\sqrt{-1})^3 = 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1} = 2 - \sqrt{-121}$$

e quindi:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$
$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Sostituendo nella (°) si trova la soluzione auspicata $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Si arriva al risultato richiesto attraverso passaggi che coinvolgono entità misteriose come le radici quadrate dei numeri negativi (che non esistono nel campo reale).

Nel 1746 il matematico francese J. D'Alembert (1717-1783) diede una prima dimostrazione, seppur non del tutto rigorosa, del teorema fondamentale dell'algebra: un'equazione di grado $n \geq 1$ ha sempre nel campo complesso n soluzioni distinte o coincidenti. Fu il grande matematico tedesco K.F. Gauss (1777-1855) a dare una dimostrazione rigorosa del teorema fondamentale dell'algebra e a proporre la rappresentazione dei numeri complessi nel piano che, consentendo una visualizzazione della loro struttura, ha reso naturale l'accettazione di questi nuovi numeri nell'ambito dei quali tutte le equazioni ammettono soluzione.

La teoria della risoluzione dei sistemi si è sviluppata parallelamente a quella delle equazioni, e quindi le sue origini risalgono all'antichità. Come è noto, la risoluzione generale dei sistemi di primo grado è oggi associata alla teoria delle matrici e dei determinanti. L'idea di scrivere i coefficienti e i termini in un quadro di numeri risale già ai matematici cinesi del secondo secolo prima di Cristo. In occidente la storia ha origini più recenti, con lo sviluppo dell'algebra iniziato nel Cinquecento. Nella già citata *Ars Magna* (1545) di Gerolamo Cardano (1501-1576) compare una regola per risolvere i sistemi lineari di due equazioni in due incognite che, nella sostanza, equivale alla nota regola di Cramer. Molti importanti matematici hanno fornito contributi alla teoria delle matrici e dei determinanti. Ad esempio lo scozzese Colin Maclaurin (1698-1746) nel suo *Treatise of Algebra* (1730) dimostrò la regola di Cramer per i sistemi lineari con due e tre incognite, e fu appunto Gabriel Cramer (1704-1752) a proporre, in un saggio del 1750, la regola generale per i sistemi di n equazioni e n incognite. Fu comunque Augustin Louis Cauchy (1789-1857) a usare il termine "determinante" in senso moderno, anche se la teoria dei determinanti e delle matrici così come la si presenta attualmente fu elaborata nel corso del XIX secolo da Carl Gustav Jacobi (1804-1851), da James Joseph Sylvester (1814-1897) e da Arthur Cayley (1821-1895), il quale introdusse la notazione tuttora in uso delle sbarre verticali e presentò nel 1858 la prima definizione astratta di matrice e la relativa algebra delle matrici nella quale, come è noto, il prodotto non è commutativo.

Ritornando alle equazioni, un momento particolarmente significativo è stato la dimostrazione all'inizio dell'ottocento del teorema di P. Ruffini (1765-1822) e di N. Abel (1802-1829) che ha sancito l'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni generali di grado superiore al quarto, impresa nella quale si erano cimentati quasi tutti i più grandi matematici dal cinquecento in poi. Nella individuazione delle equazioni di grado superiore al quarto risolubili per radicali, Evariste Galois (1811-1832) aprì la strada verso l'algebra moderna, intesa come scienza delle strutture astratte (gruppi, anelli, corpi, campi, spazi vettoriali), che verso la fine dell'ottocento ha profondamente mutato lo scenario della matematica.

Bibliografia

G. T. Bagni, *Storia della matematica*, Pitagora Editrice, Bologna, 1996.

R. Franci, L. Toti Rigatelli, *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano, 1979.

S. Maracchia, *Da Cardano a Galois. Momenti di storia dell'algebra*, Feltrinelli, Milano, 1979.