

EQUAZIONI DI 2° GRADO LETTERALI
CORREZIONE DEGLI ESERCIZI "DISPARI"

1)

$$x(x+b) = 6b^2$$

$$x^2 + bx - 6b^2 = 0$$

$$(x+3b)(x-2b) = 0$$

$$x = -3b \vee x = 2b$$

3)

$$(x+a)^2 - 4(x+a) + 3 = 0$$

$$x^2 + 2ax + a^2 - 4x - 4a + 3 = 0$$

$$x^2 + 2ax - 4x + a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$x^2 + 2(a-2)x + (a^2 - 4a + 3) = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -a + 2 \pm \sqrt{(a-2)^2 - (a^2 - 4a + 3)} = \\ &= -a + 2 \pm \sqrt{\cancel{a^2} - \cancel{4a} + 4 - \cancel{a^2} + \cancel{4a} - 3} = \\ &= -a + 2 \pm 1 = \begin{cases} 1-a \\ 3-a \end{cases} \end{aligned}$$

oppure:

$$(x+a)^2 - 4(x+a) + 3 = 0$$

$$x+a = z$$

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

$$(z-1)(z-3) = 0$$

$$z = 1 \vee z = 3$$

$$x+a = 1 \vee x+a = 3$$

$$x = 1-a \vee x = 3-a$$

5)

$$2ax(2\sqrt{3}-3) = (x-3a)^2$$

$$4ax\sqrt{3} - 6ax = x^2 - 6ax + 9a^2$$

$$x^2 - 4ax\sqrt{3} + 9a^2 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= 2a\sqrt{3} \pm \sqrt{(2a\sqrt{3})^2 - 9a^2} = \\ &= 2a\sqrt{3} \pm \sqrt{12a^2 - 9a^2} = 2a\sqrt{3} \pm \sqrt{3a^2} = \\ &= 2a\sqrt{3} \pm a\sqrt{3} = \begin{cases} a\sqrt{3} \\ 3a\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

7)

$$(x+b)^2 - a(a+4b) = 4a(x-a)$$

$$x^2 + 2bx + b^2 - a^2 - 4ab = 4ax - 4a^2$$

$$x^2 + 2bx - 4ax + 3a^2 + b^2 - 4ab = 0$$

$$x^2 + 2x(b-2a) + (3a^2 + b^2 - 4ab) = 0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -b + 2a \pm \sqrt{\cancel{b^2} - \cancel{4ab} + 4a^2 - 3a^2 - \cancel{b^2} + \cancel{4ab}} = \\ &= -b + 2a \pm \sqrt{a^2} = -b + 2a \pm a = \begin{cases} a-b \\ 3a-b \end{cases} \end{aligned}$$

9)

$$(a+1)x^2 - 2(a+2)x + (a+3) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{(a+2)^2 - (a+1)(a+3)}}{2(a+1)} =$$

$$= \frac{a+2 \pm \sqrt{\cancel{a^2} + \cancel{4a} + 4 - \cancel{a^2} - \cancel{3a} - \cancel{a} - 3}}{2(a+1)} =$$

$$= \frac{a+2 \pm 1}{2(a+1)} = \begin{cases} \frac{\cancel{a+1}}{2(a+1)} = \frac{1}{2} \\ \frac{a+2 \pm 1}{2(a+1)} = \frac{a+3}{2(a+1)} \end{cases}$$

Con $a = -1$, l'equazione diventa

$$-2x + 2 = 0; \quad x = 1$$

11)

$$(m-1)x^2 - m^2 = m^2(x-2); \quad mx^2 - x^2 - m^2 = m^2x - 2m^2; \quad mx^2 - x^2 - m^2x + m^2 = 0$$

$$(m-1)x^2 - m^2x + m^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 4m^2(m-1)}}{2(m-1)} = \frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 4m^3 + 4m^2}}{2(m-1)} = \frac{m^2 \pm \sqrt{(m^2 - 2m)^2}}{2(m-1)} =$$

$$= \frac{m^2 \pm (m^2 - 2m)}{2(m-1)} = \begin{cases} \frac{2m}{2(m-1)} = \boxed{\frac{m}{m-1}} \\ \frac{2m^2 - 2m}{2(m-1)} = \frac{\cancel{2m(m-1)}}{\cancel{2(m-1)}} = \boxed{m} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Con } m=1}$ l'eq. si abbassa di grado: $-x+1=0$, $\boxed{x=1}$

13)

$$a(ax-2) \cdot \frac{x}{x+1} + 1 = x; \quad \frac{ax(ax-2)}{x+1} + 1 = x$$

$$\frac{a^2x^2 - 2ax + 1}{x+1} = \frac{x^2 + x}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

$$a^2x^2 - x^2 - 2ax + 1 = 0; \quad (a^2 - 1)x^2 - 2ax + 1 = 0; \quad (a+1)(a-1)x^2 - 2ax + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - (a+1)(a-1)}}{(a+1)(a-1)} = \frac{a \pm \sqrt{\cancel{a^2} - \cancel{a^2} + 1}}{(a+1)(a-1)} = \frac{a \pm 1}{(a+1)(a-1)} = \begin{cases} \frac{\cancel{a-1}}{(a+1)\cancel{(a-1)}} = \frac{1}{a+1} \\ \frac{\cancel{a+1}}{(a+1)\cancel{(a-1)}} = \frac{1}{a-1} \end{cases}$$

Con $a = 1$ l'equazione diventa: $-2x + 1 = 0$; $x = \frac{1}{2}$

Con $a = -1$ l'equazione diventa: $2x + 1 = 0$; $x = -\frac{1}{2}$

La soluzione $x = \frac{1}{a+1}$ non è accettabile se $\frac{1}{a+1} = -1$; $1 = -a - 1$; $\boxed{a = -2}$

In questo caso, la soluzione "sopravvissuta" è $x = \left[\frac{1}{a-1} \right]_{a=-2} = \frac{1}{-2-1} = -\frac{1}{3}$

La soluzione $x = \frac{1}{a-1}$ non è accettabile se $\frac{1}{a-1} = -1$; $1 = -a + 1$; $\boxed{a = 0}$

In questo caso, la soluzione "sopravvissuta" è $x = \left[\frac{1}{a+1} \right]_{a=0} = \frac{1}{0+1} = 1$

15)

$$(k-5)x + \frac{k-3}{x} = 2(k-4); \quad (k-5)x^2 + k-3 = 2(k-4)x \quad x \neq 0; \quad \boxed{(k-5)x^2 - 2(k-4)x + (k-3) = 0}$$

$$x_{1,2} = \frac{(k-4) \pm \sqrt{(k-4)^2 - (k-5)(k-3)}}{k-5} = \frac{k-4 \pm \sqrt{\cancel{k^2} - 8k + 16 - \cancel{k^2} + 3k + 5k - 15}}{k-5} = \frac{k-4 \pm 1}{k-5} = \begin{cases} \frac{\cancel{k-5}}{\cancel{k-5}} = 1 \\ \frac{k-3}{k-5} \end{cases}$$

Con $k = 5$, si ha $\cancel{0}x^2 - 2x + 2 = 0$ con l'unica soluzione $x = 1$

La soluzione $x = 1$ è sempre accettabile, mentre l'altra soluzione $x = \frac{k-3}{k-5}$

è accettabile purché non sia nulla, ossia con $k \neq 3$; nel caso particolare $k = 3$ risulta non accettabile

17)

$$\frac{x}{2x-3} + 3 \cdot \frac{h^2}{(x-2)(2x-3)} = 2 \cdot \frac{h}{x-2}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 3h^2}{\cancel{(x-2)(2x-3)}} = \frac{4hx - 6h}{\cancel{(x-2)(2x-3)}} \quad x \neq 2, x \neq \frac{3}{2}$$

$$x^2 - 2x - 4hx + 3h^2 + 6h = 0$$

$$x^2 - 2x(1+2h) + 3h^2 + 6h = 0$$

$$x_{1,2} = 1 + 2h \pm \sqrt{1 + 4h + 4h^2 - 3h^2 - 6h} = 1 + 2h \pm \sqrt{h^2 - 2h + 1} =$$

$$= 1 + 2h \pm \sqrt{(h-1)^2} = 1 + 2h \pm (h-1) = \begin{cases} h+2 \\ 3h \end{cases}$$

$$h+2=2 \quad h=0 \quad h+2=\frac{3}{2} \quad h=-\frac{1}{2}$$

$$3h=2 \quad h=\frac{2}{3} \quad 3h=\frac{3}{2} \quad h=\frac{1}{2}$$

In definitiva,

con $h=0$ l'equazione ha una sola soluzione ($x=0$)

con $h=-\frac{1}{2}$ l'equazione ha una sola soluzione ($x=-\frac{3}{2}$)

con $h=\frac{2}{3}$ l'equazione ha una sola soluzione ($x=\frac{8}{3}$)

con $h=\frac{1}{2}$ l'equazione ha una sola soluzione ($x=\frac{5}{2}$)

mentre con $h \neq 0, h \neq \pm \frac{1}{2}, h \neq \frac{2}{3}$ le soluzioni sono due: $x = h+2, x = 3h$

19)

$$\frac{x}{x-q} + \frac{q^2-3}{x^2-3qx+2q^2} = \frac{2}{2q-x}$$

$$\frac{x}{x-q} + \frac{q^2-3}{(x-q)(x-2q)} = -\frac{2}{x-2q}$$

$$\frac{x^2-2qx+q^2-3}{\cancel{(x-q)(x-2q)}} = \frac{-2x+2q}{\cancel{(x-q)(x-2q)}} \quad x \neq q, x \neq 2q$$

$$x^2 - 2qx + 2x + q^2 - 2q - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x(q-1) + q^2 - 2q - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = q-1 \pm \sqrt{(q-1)^2 - (q^2 - 2q - 3)} = q-1 \pm \sqrt{\cancel{q^2} - 2q + 1 - \cancel{q^2} + 2q + 3} = q-1 \pm 2 = \begin{cases} q-3 \\ q+1 \end{cases}$$

$q-3=q$ imposs.

$q-3=2q$ $q=-3$

$q+1=q$ imposs.

$q+1=2q$ $q=1$

Con $q \neq -3, q \neq 1$: $x = q-3, x = q+1$

Con $q = -3$ una sola soluzione ($x = -2$)

Con $q = 1$ una sola soluzione ($x = -2$)

21)

$$1 + \frac{3a+1}{a(x-3)} + \frac{2x^2(a-1)}{(x-3)^2} + \frac{4}{a(x-3)^2} = 0$$

$$\frac{a(x-3)^2 + (3a+1)(x-3) + 2ax^2(a-1) + 4}{a(x-3)^2} = 0 \quad (a \neq 0, x \neq 3)$$

$$\cancel{ax^2} - \cancel{6ax} + \cancel{9a} + \cancel{3ax} - \cancel{9a} + x - 3 + 2a^2x^2 - \cancel{2ax^2} + 4 = 0$$

$$2a^2x^2 - ax^2 - 3ax + x + 1 = 0$$

$$a(2a-1)x^2 - (3a-1)x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3a-1 \pm \sqrt{(3a-1)^2 - 4a(2a-1)}}{2a(2a-1)} =$$

$$= \frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 + 4a}}{2a(2a-1)} =$$

$$= \frac{3a-1 \pm \sqrt{a^2 - 2a + 1}}{2a(2a-1)} =$$

$$= \frac{3a-1 \pm \sqrt{(a-1)^2}}{2a(2a-1)} =$$

$$= \frac{3a-1 \pm (a-1)}{2a(2a-1)} = \begin{cases} \frac{\cancel{3a} - \cancel{1} - a + 1}{2a(2a-1)} = \frac{\cancel{2a}}{\cancel{2a}(2a-1)} = \frac{1}{2a-1} \\ \frac{3a-1+a-1}{2a(2a-1)} = \frac{4a-2}{2a(2a-1)} = \frac{\cancel{2}(2a-1)}{\cancel{2a}(2a-1)} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Con $a = 0$ l'equazione diventerebbe priva di significato

Con $a = \frac{1}{2}$ l'equazione diventa: $-\left(\frac{3}{2}-1\right)x+1=0$; $-\frac{1}{2}x+1=0$; $x=2$

La soluzione $x = \frac{1}{2a-1}$ risulta non accettabile se

$$\frac{1}{2a-1} = 3; \quad 1 = 6a - 3; \quad -6a = -4; \quad 6a = 4; \quad a = \frac{2}{3}$$

In questo caso, la soluzione "sopravvissuta" vale $x = \left[\frac{1}{a}\right]_{a=\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

La soluzione $x = \frac{1}{a}$ risulta non accettabile se

$$\frac{1}{a} = 3; \quad 1 = 3a; \quad a = \frac{1}{3}$$

In questo caso, la soluzione "sopravvissuta" vale $x = \left[\frac{1}{2a-1}\right]_{a=\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}-1} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$

23)

$$m + 2 \frac{m^2 - x}{x - m} - \frac{m}{x} \cdot \frac{3x + m}{x - m} = 0; \quad m + \frac{2m^2 - 2x}{x - m} - \frac{3mx + m^2}{x(x - m)} = 0$$

$$\frac{mx(x - m) + x(2m^2 - 2x) - (3mx + m^2)}{x(x - m)} = 0;$$

$$\frac{mx^2 - m^2x + 2m^2x - 2x^2 - 3mx - m^2}{x(x - m)} = 0 \quad (x \neq 0, x \neq m)$$

$$mx^2 - 2x^2 + m^2x - 3mx - m^2 = 0$$

$$(m - 2)x^2 + m(m - 3)x - m^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-m(m - 3) \pm \sqrt{[m(m - 3)]^2 + 4m^2(m - 2)}}{2(m - 2)} = \frac{-m(m - 3) \pm \sqrt{m^2(m^2 - 6m + 9) + 4m^3 - 8m^2}}{2(m - 2)} =$$

$$= \frac{-m(m - 3) \pm \sqrt{m^4 - 6m^3 + 9m^2 + 4m^3 - 8m^2}}{2(m - 2)} = \frac{-m(m - 3) \pm \sqrt{m^4 - 2m^3 + m^2}}{2(m - 2)} =$$

$$= \frac{-m(m - 3) \pm \sqrt{(m^2 - m)^2}}{2(m - 2)} = \frac{-m^2 + 3m \pm (m^2 - m)}{2(m - 2)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-m^2 + 3m - m^2 + m}{2(m - 2)} = \frac{-2m^2 + 4m}{2(m - 2)} = \frac{-\cancel{2}m(\cancel{m - 2})}{\cancel{2}(m - 2)} = -m \\ \frac{\cancel{m^2} + 3m - \cancel{m^2} - m}{2(m - 2)} = \frac{\cancel{2}m}{\cancel{2}(m - 2)} = \frac{m}{m - 2} \end{cases}$$

Se $m = 2$ l'equazione diventa: $(2 - 2)x^2 + 2(2 - 3)x - 2^2 = 0$; $-2x - 4 = 0$; $2x + 4 = 0$; $x = -2$

La soluzione $x = -m$ non è accettabile se

$$-m = 0; \quad m = 0 \quad \text{oppure} \quad -m = m; \quad 2m = 0; \quad m = 0$$

La soluzione $x = \frac{m}{m - 2}$ non è accettabile se

$$\frac{m}{m - 2} = 0; \quad m = 0 \quad \text{oppure}$$

$$\frac{m}{m - 2} = m; \quad m = m^2 - 2m; \quad -m^2 + 3m = 0; \quad m^2 - 3m = 0; \quad m(m - 3) = 0; \quad m = 0 \vee m = 3$$

Ricapitolando:

con $m = 2$ si ha 1 sola soluzione: $x = -2$

con $m = 3$ si ha 1 sola soluzione: $x = [-m]_{m=3} = -3$

con $m = 0$ l'equazione è impossibile ($x_1 = x_2 = 0$ non accettabile)

25)

$$p(p+1)(x^2-1) + (2p+1)x = 0; \quad (p^2+p)(x^2-1) + 2px + x = 0$$

$$p^2x^2 - p^2 + px^2 - p + 2px + x = 0; \quad p^2x^2 + px^2 + 2px + x - p^2 - p = 0$$

$$\boxed{p(p+1)x^2 + (2p+1)x - p(p+1) = 0}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2p-1 \pm \sqrt{(2p+1)^2 + 4p^2(p+1)^2}}{2p(p+1)} = \frac{-2p-1 \pm \sqrt{4p^2 + 4p+1 + 4p^4 + 8p^3 + 4p^2}}{2p(p+1)} =$$

$$= \frac{-2p-1 \pm \sqrt{4p^4 + 8p^3 + 8p^2 + 4p+1}}{2p(p+1)} = \frac{-2p-1 \pm \sqrt{4p^4 + 4p^2 + 1 + 8p^3 + 4p^2 + 4p}}{2p(p+1)} =$$

$$= \frac{-2p-1 \pm \sqrt{(2p^2 + 2p+1)^2}}{2p(p+1)} = \frac{-2p-1 \pm (2p^2 + 2p+1)}{2p(p+1)}$$

$$x_1 = \frac{-2p-1-2p^2-2p-1}{2p(p+1)} = \frac{-2p^2-4p-2}{2p(p+1)} = \frac{-\cancel{2}(p^2+2p+1)}{\cancel{2}p(p+1)} = -\frac{(p+1)^{\cancel{2}}}{p(\cancel{p+1})} = \boxed{-\frac{p+1}{p}}$$

$$x_2 = \frac{\cancel{-2p} + 1 + 2p^2 + \cancel{2p} + 1}{2p(p+1)} = \frac{\cancel{2}p^{\cancel{2}}}{\cancel{2}p(p+1)} = \boxed{\frac{p}{p+1}}$$

Con $p = 0$ l'equazione diventa: $x = 0$

Con $p = -1$ l'equazione diventa: $-x = 0, x = 0$