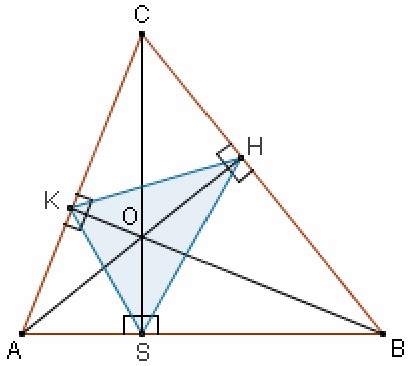
**25) In un triangolo ABC, le tre altezze sono AH, BK, CS, l'ortocentro è O.**

a) **Dimostra che il quadrilatero OHCK è inscrivibile in una circonferenza**
b) **Dimostra che il quadrilatero ABHK è inscrivibile in una circonferenza**
c) **I centri di tali due circonferenze stanno in posizioni molto particolari: sapresti specificarle? E giustificare la risposta?**
d) **Quali altri quadrilateri della figura sono inscrivibili in una circonferenza?**
e) **Dimostra che le tre altezze AH, BK, CS sono bisettrici degli angoli del triangolo HKS avente per vertici i piedi delle altezze stesse.**




**DIM.**

**a) Dimostra che il quadrilatero OHCK è inscrivibile in una circonferenza**

Questo quadrilatero ha due angoli opposti supplementari $\left(C\widehat{K}O + C\widehat{H}O = 90° + 90° = 180°\right)$
e pertanto avrà certamente supplementari anche gli altri due angoli opposti
(la somma di tutti e quattro gli angoli interni, in qualsiasi quadrilatero, vale sempre 360°).
Ma per un teorema noto **ogni quadrilatero con gli angoli opposti supplementari è inscrivibile in una circonferenza.**

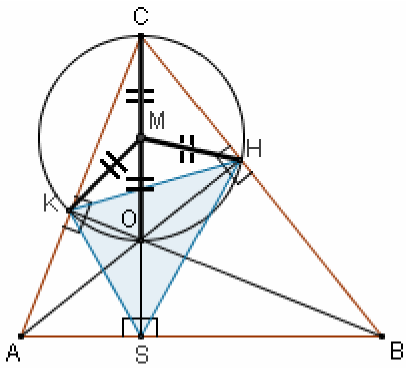
**b) Dimostra che il quadrilatero ABHK è inscrivibile in una circonferenza**

Osserviamo i due triangoli rettangoli AKB e AHB, con l'ipotenusa AB in comune.
Un teorema noto ci assicura che **la circonferenza avente per diametro l'ipotenusa di un triangolo rettangolo passa per il vertice dell'angolo retto**.
Ma allora, se consideriamo la circonferenza di diametro AB
(che avrà per centro il punto medio di AB), questa passerà sia per K che per H.
Esiste dunque una circonferenza passante per tutti e quattro i punti A, B, H, K:
il quadrilatero ABHK è inscrivibile.

**c) I centri di tali due circonferenze stanno in posizioni molto particolari: sapresti specificarle? E giustificare la risposta?**

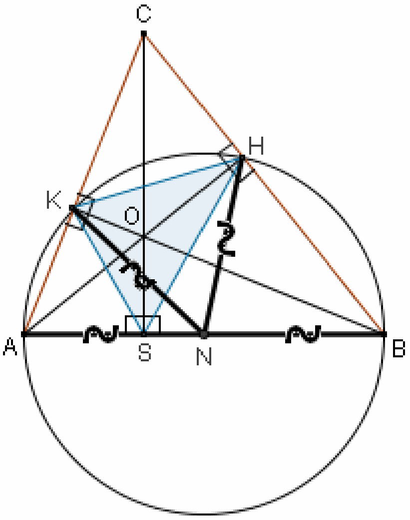
OHCK è formato da due triangoli rettangoli, situati da parte opposta rispetto all'ipotenusa comune:
il centro della circonferenza circoscritta ad OHCK
è dunque il punto medio di quell'ipotenusa comune CO, perché **la circonferenza che ha per diametro l'ipotenusa di un triangolo rettangolo passa per il vertice dell'angolo retto**,
quindi se andiamo a considerare la circonferenza di diametro CO,
avente per centro il punto medio di CO, questa passerà per C, O, H, K
e sarà dunque la circonferenza circoscritta ad OHCK.

*Il fatto che OHCK ammetta una circonferenza circoscritta e che questa abbia per centro il punto medio di CO si può provare anche col ragionamento seguente: è noto che* ***la mediana relativa all'ipotenusa, in un triangolo rettangolo, è uguale a metà dell'ipotenusa stessa****, quindi se noi andiamo a congiungere il punto medio M di CO con i due punti K e H, otterremo in definitiva quattro segmenti, MK, MH, MO ed MC, tutti uguali fra loro perché tutti uguali alla metà di CO. Dunque puntando il compasso in M con apertura, ad esempio, MO, la circonferenza tracciata passerà, oltre che per O, anche per H, C e K.*



Anche all’interno di ABHK possiamo osservare due triangoli rettangoli,
situati questa volta dalla stessa parte rispetto all’ipotenusa comune:
il centro della circonferenza circoscritta ad ABHK
è dunque il punto medio di quell’ipotenusa comune AB, perché **la circonferenza avente per diametro l’ipotenusa di un triangolo rettangolo passa per il vertice dell’angolo retto**,
e di conseguenza la circonferenza di diametro AB, con centro nel punto medio di AB,
passerà per A, B, H, K.

*Come prima, c’è anche un modo alternativo di dimostrare che ABHK ammette una circonferenza circoscritta, la quale ha per centro il punto medio di AB. Congiungendo il punto medio N di AB con i due punti K e H, avremo NA=NB=NH=NK perché* ***in ogni triangolo rettangolo la mediana relativa all’ipotenusa è metà dell’ipotenusa stessa****, e perciò la circonferenza di centro N e raggio, ad esempio, NA, passa per tutti e quattro i punti A, B, H, K.*

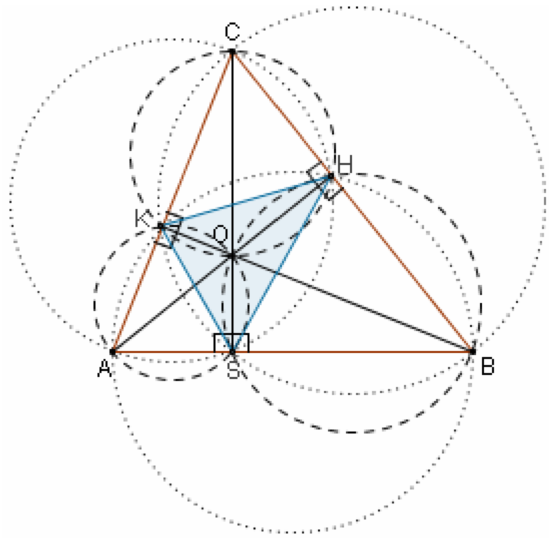



**d) Quali altri quadrilateri della figura sono inscrivibili in una circonferenza?**

Si tratta di

a) tutti i **quadrilateri** che sono “**analoghi ad OHCK**”, in quanto sono formati da due triangoli rettangoli disposti da parti opposte rispetto all’ipotenusa comune: **OKAS, OHBS**;

b) e tutti i **quadrilateri** che sono “**analoghi ad ABHK**”, in quanto hanno per vertici i vertici di due triangoli rettangoli disposti dalla stessa parte rispetto all’ipotenusa comune: **ACHS, BCKS**.




**e) Dimostra che le tre altezze AH, BK, CS sono bisettrici degli angoli del triangolo HKS avente per vertici i piedi delle altezze stesse.**

Occorre, per dimostrare questa non facile tesi, considerare opportune **coppie di circonferenze circoscritte**, ed applicare il teorema secondo cui **angoli alla circonferenza che insistono su di uno stesso arco sono uguali**.

Ad esempio, per far vedere che $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$,
si considera la circonferenza circoscritta ad OHCK
per dedurre che $\widehat{H}_1 = \widehat{C}_3$ (insistono entrambi su $\overset{\frown}{KO}$),
poi la circonferenza circoscritta ad ACHS
per dedurre che $\widehat{H}_2 = \widehat{C}_3$ (insistono entrambi su $\overset{\frown}{AS}$).
Segue $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ per la proprietà transitiva.

Analogamente si può procedere per gli angoli di vertici K ed S.