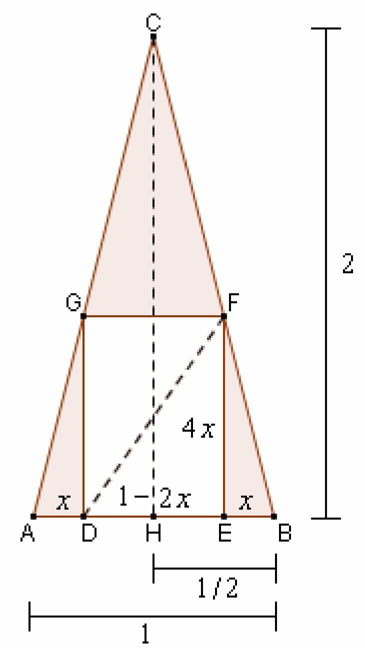
C) Problemi in cui la similitudine viene utilizzata per esprimere un segmento in funzione di *x*

14) In un triangolo isoscele, di base AB = 1 e altezza CH = 2, inscrivere un rettangolo, con un lato su AB, di diagonale unitaria.



$CA = CB$
$CH \perp AB$
$AB = 1$
$CH = 2$
DEFG rettangolo
$DF = 1$

$DE = ?\quad EF = ?$

$AD = BE = x \qquad HB = \frac{1}{2} \qquad DE = 1-2x$

$FEB \sim CHB$ (rettangoli, $\widehat{B}$ in comune)

$FE : EB = CH : HB \qquad FE : x = 2 : \frac{1}{2} \qquad FE = \frac{2x}{\frac{1}{2}} = 2x \cdot 2 = 4x$

(più rapidamente: in considerazione della similitudine,
così come $CH = 2$ è il quadruplo di $HB = \frac{1}{2}$,
altrettanto FE sarà il quadruplo di $BE = x$ quindi varrà $4x$)

$$DF = \sqrt{DE^2 + EF^2} = \sqrt{(1-2x)^2 + (4x)^2} = \sqrt{1-4x+4x^2+16x^2} = \sqrt{20x^2-4x+1}$$

Equazione risolvente:

$$\sqrt{20x^2-4x+1} = 1 \qquad 20x^2 - 4x + \cancel{1} = \cancel{1} \qquad 5x^2 - x = 0 \qquad x(5x-1) = 0 \qquad \boxed{x=0} \vee \boxed{x = \frac{1}{5}}$$

La soluzione x=0 è "degenere" in quanto corrisponde al punto E coincidente con B, quindi ad un rettangolo ridotto a due basi DE e GF, sovrapposte fra loro e ad AB, lunghe entrambe 1 e a due altezze, DG ed EF, entrambe nulle:
la "diagonale" è coincidente anch'essa con AB e quindi è uguale a 1, come si desiderava.

La soluzione $x = \frac{1}{5}$ **corrisponde ad un normale rettangolo** con

$DE = 1 - 2 \cdot \frac{1}{5} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}, \quad EF = 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

e diagonale $DF = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$ come si desiderava.