❑ PROBLEMI SULLE SIMILITUDINI

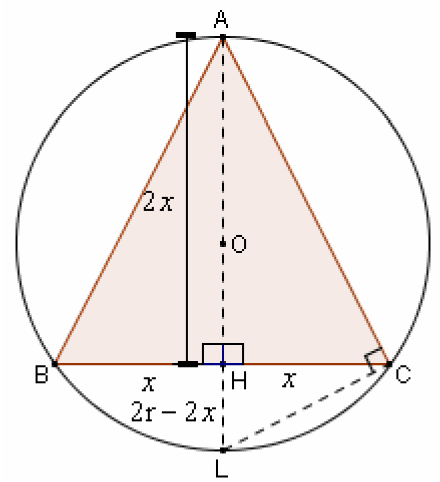
E) Problemi vari sulle similitudini

18) In una circonferenza di raggio r è inscritto un triangolo isoscele, la cui base BC è uguale all'altezza AH.

I) Trovare la misura di BC=AH

II) Determinare sul segmento AH un punto K in modo che, condotta per K la perpendicolare ad AH, che tagli AB in D, AC in E, e la circonferenza in F (dalla parte di D) e in G (dalla parte di E), sia verificata la relazione $\mathrm{DF}+\mathrm{EG}=\mathrm{r}$

I) *Innanzitutto osserviamo che l'altezza AH del triangolo isoscele ABC passa per il centro O della circonferenza: ciò è intuibile per motivi di simmetria, e può essere dimostrato ricordando che in un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base fa anche da mediana, quindi è asse della base; ma in ogni circonferenza, è noto che l'asse di una corda passa sempre per il centro. Indichiamo con L il punto in cui il prolungamento di AH incontra la circonferenza; AL è dunque un diametro.*



Poniamo $\mathrm{BH}=\mathrm{HC}=x$
da cui:
$\mathrm{BC}=\mathrm{AH}=2x$;
$\mathrm{HL}=\mathrm{AL}-\mathrm{AH}=2\mathrm{r}-2x$.

Congiungiamo C con L e osserviamo che il triangolo ACL è rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza, e CH ne è l'altezza relativa all'ipotenusa.
Applicando dunque il 2° Teor. di Euclide possiamo impostare l'equazione risolvente per trovare x.

$$\mathrm{CH}^2=\mathrm{AH}\cdot\mathrm{HL};\quad x^2=2x(2\mathrm{r}-2x);\quad x^2=4\mathrm{r}x-4x^2;\quad 5x^2-4\mathrm{r}x=0;\quad x(5x-4\mathrm{r})=0;\quad \boxed{x=0\ \vee\ x=\frac{4}{5}\mathrm{r}}.$$

Il valore x=0 esprime una "soluzione degenere", nella quale il triangolo si ridurrebbe al punto A.
E' vero che anche in questo caso, essendo i lati e l'altezza di questo triangolo puntiforme quattro segmenti nulli, avremmo la base uguale all'altezza come richiede il problema;
tuttavia, è evidente che la "vera" soluzione è $x=\frac{4}{5}\mathrm{r}$, a cui corrispondono le misure $\boxed{\mathrm{BC}=\mathrm{AH}=\frac{8}{5}\mathrm{r}}$.

L'equazione risolvente si sarebbe potuta anche impostare senza ricorrere ad Euclide e applicando invece il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo HOC, ottenuto tracciando il raggio OC.

$\mathrm{BH}=\mathrm{HC}=x$

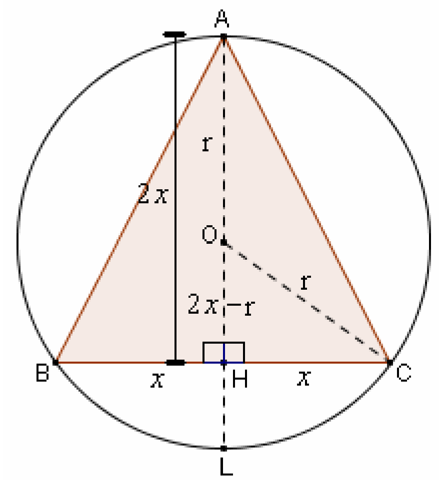
$\mathrm{BC}=\mathrm{AH}=2x$

$\mathrm{OH}=\mathrm{AH}-\mathrm{AO}=2x-\mathrm{r}$ (NOTA)

$$\mathrm{HC}^2+\mathrm{OH}^2=\mathrm{OC}^2$$
$$x^2+(2x-\mathrm{r})^2=\mathrm{r}^2$$
$$x^2+4x^2-4\mathrm{r}x\cancel{+\mathrm{r}^2}=\cancel{\mathrm{r}^2}$$
$$5x^2-4\mathrm{r}x=0$$
$$x(5x-4\mathrm{r})=0$$

$x=\frac{4}{5}\mathrm{r}$ (mentre $x=0$ viene subito esclusa, perchè abbiamo impostato supponendo l'altezza maggiore del raggio)

NOTA
Osserviamo che così scrivendo diamo già per scontato che sia 2x>r; in effetti, affinché base e altezza di ABC siano uguali si vede subito "a occhio", escludendo il caso degenere del triangolo puntiforme, che l'altezza e la base uguali devono essere maggiori del raggio.



II) $AK = x \rightarrow KL = 2r - x$

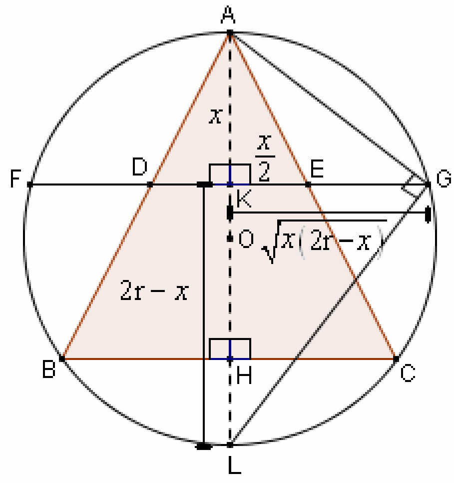
$$KG = \sqrt{AK \cdot KL} = \sqrt{x \cdot (2r - x)}$$

(Euclide 2°, AGL)

Ora $KE = \frac{x}{2}$,

perché, così come nel triangolo AHC la base è metà dell'altezza, altrettanto avverrà in AKE che è simile ad AHC.
Allora

$$EG = DF = KG - KE = \sqrt{x \cdot (2r - x)} - \frac{x}{2}.$$



Equazione risolvente:

$$DF + EG = r$$

$$2EG = r$$

$$2\left(\sqrt{x \cdot (2r - x)} - \frac{x}{2}\right) = r$$

$$2\sqrt{x \cdot (2r - x)} - x = r; \quad 2\sqrt{x \cdot (2r - x)} = x + r;$$

$$4x \cdot (2r - x) = (x + r)^2; \quad 8rx - 4x^2 = x^2 + 2rx + r^2;$$

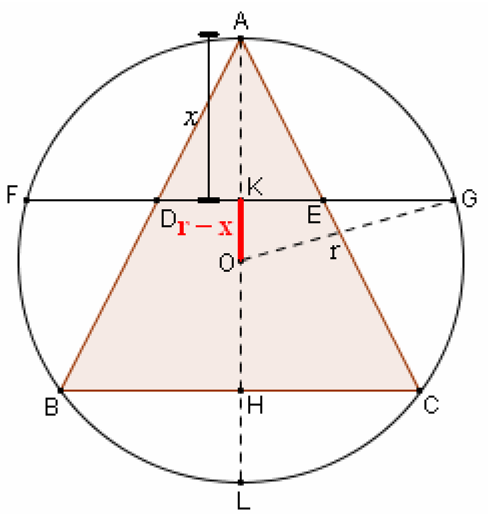
$$-5x^2 + 6rx - r^2 = 0; \quad 5x^2 - 6rx + r^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3r \pm \sqrt{9r^2 - 5r^2}}{5} = \frac{3r \pm \sqrt{4r^2}}{5} = \frac{3r \pm 2r}{5} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{5}r \\ r \end{array} \right.$$

entrambe accettabili, sia geometricamente che algebricamente

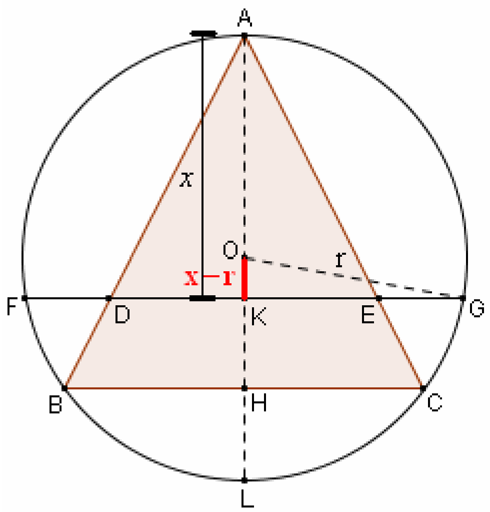
OSSERVAZIONE

Utilizzando Pitagora su OKG, anziché Euclide, **per esprimere KG in funzione di x**, sorgerebbe un **problemino interessante riguardante il segmento OK**.



Prendendo K fra A e O, è

$OK = r - x$



… mentre se prendiamo K fra O ed H, avremo

$OK = x - r$

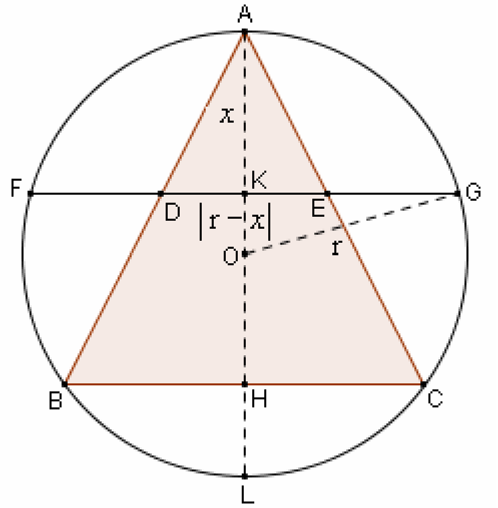
Si deve allora, nella risoluzione, distinguere i due casi?

Non è necessario!

Infatti, a ben guardare, per esprimere OK si dovrebbe prendere

- l'espressione $\mathrm{r}-x$, nel caso in cui $\mathrm{r}>x$
- l'espressione $x-\mathrm{r}$, nel caso in cui $x>\mathrm{r}$.

Ma allora basterà prendere una qualsiasi fra le due espressioni,
ad esempio $\mathrm{r}-x$,
e, nel caso in cui il risultato della sottrazione sia negativo (perché $x>\mathrm{r}$),
sostituirla con $x-\mathrm{r}$ che è poi *l'opposto* del numero $\mathrm{r}-x$ …
e ciò equivale a prendere
IL VALORE ASSOLUTO dell'espressione $\mathrm{r}-x$.
In definitiva, **se vogliamo un'espressione valida in entrambi i casi,**
questa espressione sarà $|\mathrm{r}-x|$ (o anche, indifferentemente, $|x-\mathrm{r}|$):



Va detto che quando poi l'espressione in gioco viene utilizzata
nell'applicazione del Teorema di Pitagora,
il valore assoluto non dà alcun fastidio perché

$$|\mathbf{r}-x|^2=(\mathbf{r}-x)^2:$$

il quadrato del valore assoluto di un numero, è sempre uguale al quadrato del numero stesso (qualunque sia il segno di questo).

Ricapitoliamo:

$\mathrm{AK}=x$

$\mathrm{OK}=|\mathrm{r}-x|=|x-\mathrm{r}|$

$\mathrm{KG}=\sqrt{\mathrm{OG}^2-\mathrm{OK}^2}=\sqrt{\mathrm{r}^2-|\mathrm{r}-x|^2}=\sqrt{\mathrm{r}^2-(\mathrm{r}-x)^2}=\sqrt{\cancel{\mathrm{r}^2}\cancel{-\mathrm{r}^2}+2\mathrm{r}x-x^2}$

$\mathrm{DF}=\mathrm{EG}=\mathrm{KG}-\mathrm{KE}=\sqrt{2\mathrm{r}x-x^2}-\dfrac{x}{2}$ (la stessa espressione ottenuta col metodo precedente!)

ecc. ecc.