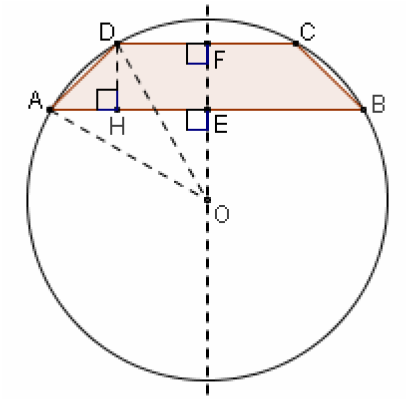
❑ PROBLEMI SUI POLIGONI REGOLARI

1) Un trapezio è inscritto in una circonferenza di raggio r.
Determinare il lato obliquo del trapezio, sotto l'ipotesi che le sue basi siano uguali ai lati del triangolo equilatero inscritto e dell'esagono inscritto.
Distinguere i due casi:
a) le due basi stanno, rispetto al centro, dalla stessa parte;
b) le due basi stanno da parti opposte rispetto al centro.



Tracciamo il diametro perpendicolare alle due basi,
e applicando Pitagora ai due triangoli rettangoli OAE, ODF
potremo ricavare OE ed OF
per poi calcolare la differenza OF–OE
che sarà uguale all'altezza DH del trapezio.
Calcoleremo successivamente AH
come semidifferenza fra le basi.
Infine, con Pitagora su AHD, determineremo AD.

Procediamo.

AB=lato triangolo equilatero inscritto=$r\sqrt{3}$ da cui AE=$\frac{AB}{2}=\frac{r\sqrt{3}}{2}$

DC=lato esagono regolare inscritto=r da cui DF=$\frac{DC}{2}=\frac{r}{2}$

Quindi

$$OE=\sqrt{r^2-\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{r^2-\frac{3r^2}{4}}=\sqrt{\frac{4r^2-3r^2}{4}}=\sqrt{\frac{r^2}{4}}=\frac{r}{2}$$

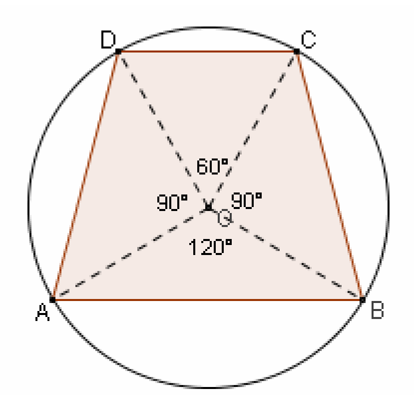
$$OF=\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}}=\sqrt{\frac{4r^2-r^2}{4}}=\sqrt{\frac{3r^2}{4}}=\frac{r}{2}\sqrt{3}$$

$$DH=FE=OF-OE=\frac{r}{2}\sqrt{3}-\frac{r}{2}=\frac{r}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$AH=\frac{AB-DC}{2}=\frac{r\sqrt{3}-r}{2}=\frac{r\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\frac{r}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Allora il triangolo AHD è rettangolo ISOSCELE, quindi ha gli angoli acuti di 45°

e pertanto è $AD=AH\sqrt{2}=\frac{r}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\sqrt{2}=\frac{r\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$



Nel caso in cui le basi stiano da parti opposte rispetto al centro,
possiamo procedere in modo simile a prima
o anche **evitando completamente i calcoli**:
infatti, se la corda AB è uguale al lato del triangolo equilatero inscritto,
sull'arco che va da A fino a B insistono angoli alla circonferenza di 60°
e pertanto l'angolo al centro $A\hat{O}B$ è di 120°.
Analogamente, se DC è uguale al lato dell'esagono regolare inscritto,
a DC corrisponde un angolo al centro di 60°: $D\hat{O}C=60°$.

Allora $A\hat{O}D=\frac{360°-120°-60°}{2}=90°$

e il triangolo AOD è rettangolo isoscele: $AD=OA\sqrt{2}=r\sqrt{2}$.