

## SISTEMI DI GRADO SUPERIORE AL 1°

Correzione di alcuni degli esercizi proposti:

n. 3, 4, 9, 12, 14

3)

$$\begin{cases} 3x - y = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = 8 - 3x; & y = 3x - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (3x - 8)^2 = 10 \end{cases}$$

$$x^2 + 9x^2 - 48x + 64 = 10$$

$$10x^2 - 48x + 54 = 0$$

$$5x^2 - 24x + 27 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 135}}{5} = \frac{12 \pm \sqrt{9}}{5} = \frac{12 \pm 3}{5} = \begin{cases} \frac{9}{5} \\ \frac{15}{5} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3x - 8 = 9 - 8 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = 3x - 8 = 3 \cdot \frac{9}{5} - 8 = \frac{27}{5} - 8 = \frac{27 - 40}{5} = -\frac{13}{5} \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ xy + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{10 - 3y}{2} \\ \frac{10 - 3y}{2} \cdot y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{10y - 3y^2}{2} + 4 = 0$$

$$10y - 3y^2 + 8 = 0$$

$$3y^2 - 10y - 8 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{3} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{3} = \frac{5 \pm 7}{3} = \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ \frac{12}{3} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 \\ x = \frac{10 - 3y}{2} = \frac{10 - 12}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = \frac{10 - 3y}{2} = \frac{10 + 2}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 6 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

9)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0 \end{cases}$$

$$(1) - (2) \begin{cases} 2x + 2y - 16 = 0 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ x^2 + (8 - x)^2 - 6x - 2(8 - x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ x^2 + 64 - 16x + x^2 - 6x - 16 + 2x = 0; \quad 2x^2 - 20x + 48 = 0; \end{cases}$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0; \quad (x - 4)(x - 6) = 0; \quad x = 4 \vee x = 6$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 8 - 4 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 - 6 = 2 \end{cases}$$

12)

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy = a(2a - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ (y + 1)^2 + (y + 1)y = a(2a - 1) \end{cases}$$

$$y^2 + 2y + 1 + y^2 + y = 2a^2 - a$$

$$2y^2 + 3y + 1 - 2a^2 + a = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8(1 - 2a^2 + a)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8 + 16a^2 - 8a}}{4} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{1 + 16a^2 - 8a}}{4} = \frac{-3 \pm (1 - 4a)}{4} = \begin{cases} \frac{-3 - 1 + 4a}{4} = \frac{4a - 4}{4} = a - 1 \\ \frac{-3 + 1 - 4a}{4} = \frac{-2 - 4a}{4} = -\frac{1 + 2a}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 1 = a - 1 + 1 = a \\ y = a - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + 1 = -\frac{1 + 2a}{2} + 1 = \frac{-1 - 2a + 2}{2} = \frac{1 - 2a}{2} \\ y = -\frac{1 + 2a}{2} \end{cases}$$

14)

$$\begin{cases} bx + ay = 2ab \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2ab - ay}{b} \quad (b \neq 0) \\ \left( \frac{2ab - ay}{b} \right)^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\frac{4a^2b^2 - 4a^2by + a^2y^2}{b^2} + y^2 = a^2 + b^2$$

$$4a^2b^2 - 4a^2by + a^2y^2 + b^2y^2 = a^2b^2 + b^4$$

$$a^2y^2 + b^2y^2 - 4a^2by + 3a^2b^2 - b^4 = 0$$

$$(a^2 + b^2)y^2 - 4a^2by + b^2(3a^2 - b^2) = 0$$

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{2a^2b \pm \sqrt{4a^4b^2 - b^2(a^2 + b^2)(3a^2 - b^2)}}{a^2 + b^2} = \frac{2a^2b \pm \sqrt{b^2[4a^4 - (a^2 + b^2)(3a^2 - b^2)]}}{a^2 + b^2} = \\ &= \frac{2a^2b \pm \sqrt{b^2[4a^4 - 3a^4 + a^2b^2 - 3a^2b^2 + b^4]}}{a^2 + b^2} = \frac{2a^2b \pm \sqrt{b^2[a^4 - 2a^2b^2 + b^4]}}{a^2 + b^2} = \\ &= \frac{2a^2b \pm \sqrt{b^2(a^2 - b^2)^2}}{a^2 + b^2} = \frac{2a^2b \pm b(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} = \begin{cases} \frac{2a^2b - a^2b + b^3}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b + b^3}{a^2 + b^2} = \frac{b(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = b \\ \frac{2a^2b + a^2b - b^3}{a^2 + b^2} = \frac{3a^2b - b^3}{a^2 + b^2} = \frac{b(3a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \boxed{x = \frac{2ab - ay}{b} = \frac{2ab - ab}{b} = \frac{a \cancel{b}}{\cancel{b}} = \boxed{a}} \\ \boxed{y = b} \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} \boxed{x = \frac{2ab - ay}{b} = \frac{2ab - a \frac{b(3a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}}{b} = \frac{2ab(a^2 + b^2) - ab(3a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} = \\ = \frac{ab(2a^2 + 2b^2 - 3a^2 + b^2)}{b(a^2 + b^2)} = \frac{a \cancel{b}(-a^2 + 3b^2)}{\cancel{b}(a^2 + b^2)} = \frac{\boxed{a(3b^2 - a^2)}}{a^2 + b^2}} \\ \boxed{y = \frac{b(3a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Con  $b = 0$  il sistema diventa  $\begin{cases} 0 \cdot x + ay = 2a \cdot 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ay = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$

e ora:

se  $a \neq 0$ ,  $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = a^2; \quad x = \pm a \end{cases}$  che poi non è altro che la soluzione generale "particolarizzata"

se  $a = 0$ ,  $\begin{cases} 0 \cdot y = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{la prima equazione è indeterminata...} \\ \text{... ma la seconda è verificata esclusivamente dalla coppia } x = 0, y = 0 \end{cases}$

e pertanto il sistema è verificato esclusivamente dalla coppia  $x = 0, y = 0$