

SISTEMI DI GRADO SUPERIORE AL 1° CON TRE O PIU' INCOGNITE**Correzione degli esercizi "dispari"**

3)

$$\begin{cases} x + y + t = 2 \\ x - t = 2 \\ x^2 + t^2 = y^2 + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ t + y + t = 2; \quad y = -2t \\ x^2 + t^2 = y^2 + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ (t + 2)^2 + t^2 = (-2t)^2 + 6 \end{cases}$$

$$t^2 + 4t + 4 + t^2 = 4t^2 + 6$$

$$2t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t - 1)^2 = 0$$

$$t = 1$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ x = t + 2 = 1 + 2 = 3 \\ y = -2t = -2 \cdot 1 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

5)

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ xyz = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ -2z = -y; \quad z = \frac{y}{2} \\ 2y \cdot y \cdot \frac{y}{2} = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = \frac{y}{2} \\ y^3 = 8; \quad y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 2y = 4 \\ z = \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

7)

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 0,3y - 0,2z = \frac{2}{5} \\ xy + z^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3y - 2z = 4 \text{ (ottenuta tramite moltiplicazione per 10)} \\ xy + z^2 = 9 \end{cases}$$

La prima equazione contiene solo x e y , la seconda solo y e z ;
 converrà quindi esprimere sia x che z in funzione di y :

$$\begin{cases} x = \frac{10 - y}{2} \\ z = \frac{3y - 4}{2} \\ \frac{10 - y}{2} \cdot y + \left(\frac{3y - 4}{2}\right)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\frac{10y - y^2}{2} + \frac{9y^2 - 24y + 16}{4} = 9$$

$$20y - 2y^2 + 9y^2 - 24y + 16 = 36$$

$$7y^2 - 4y - 20 = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{7} = \frac{2 \pm \sqrt{144}}{7} = \frac{2 \pm 12}{7} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{10}{7} \\ 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = \frac{10 - y}{2} = \frac{10 + \frac{10}{7}}{2} = \frac{80}{7} = \frac{40}{7} \\ y = -\frac{10}{7} \\ z = \frac{3y - 4}{2} = \frac{3\left(-\frac{10}{7}\right) - 4}{2} = \frac{-\frac{30}{7} - 4}{2} = \frac{-\frac{58}{7}}{2} = -\frac{29}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{10 - y}{2} = \frac{10 - 2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ y = 2 \\ z = \frac{3y - 4}{2} = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

9)

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ x - y - z + t = 1 \\ x - y + z - t = -1 \\ xy + zt = 3 \end{cases}$$

Per questo sistema in 4 incognite, risulta conveniente applicare dapprima il metodo di riduzione (=addizione e sottrazione), in modo da ottenere equazioni molto semplici.

$$\begin{aligned} (1) + (2) & \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2t = 6; \quad x + t = 3 \\ 2x + 2z = 4; \quad x + z = 2 \end{array} \right. \\ (1) + (3) & \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2z = 4; \quad x + z = 2 \\ 2x - 2y = 0; \quad x - y = 0; \quad x = y \end{array} \right. \\ (2) + (3) & \left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y = 0; \quad x - y = 0; \quad x = y \\ xy + zt = 3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

A questo punto, è possibile servirsi delle prime 3 equazioni per esprimere y, z, t in funzione di x:

$$\begin{cases} t = 3 - x \\ z = 2 - x \\ y = x \\ x^2 + (2 - x)(3 - x) = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + 6 - 2x - 3x + x^2 = 3$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x = 1 \\ z = 2 - x = 2 - 1 = 1 \\ t = 3 - x = 3 - 1 = 2 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = x = \frac{3}{2} \\ z = 2 - x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ t = 3 - x = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

11)

$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} - \frac{4}{3} = 0 \\ 2x + y + 6z = 13 \\ x^2 + yz = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \text{ (moltiplicazione per 6)} \\ 2x + y + 6z = 13 \\ x^2 + yz = 2 \end{cases}$$

Caso fortunato:

se si moltiplica la prima equazione per 2 e le si sottrae la seconda, si può ricavare immediatamente l'incognita y !

$$2 \cdot \begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 2x + y + 6z = 13 \\ x^2 + yz = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 16 \\ 2x + y + 6z = 13 \\ x^2 + yz = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) - (2) & \begin{cases} 3y = 3; & y = 1 \\ (2) & \begin{cases} 2x + y + 6z = 13 \\ (3) & \begin{cases} x^2 + yz = 2 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x + 1 + 6z = 13; & 2x + 6z = 12; & x + 3z = 6 \\ x^2 + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 2 - x^2 \\ x + 3(2 - x^2) = 6; & x \cancel{+6} - 3x^2 = \cancel{6}; & 3x^2 - x = 0; & x(3x - 1) = 0; & x = 0 \vee x = 1/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 - x^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 1 \\ z = 2 - x^2 = 2 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9} \end{cases}$$

13)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{25}{9} \\ 5z - x - y = \frac{5}{3} \\ xy = \frac{5}{3}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = \frac{25}{9} \\ x+y = 5z - \frac{5}{3} \\ xy = \frac{5}{3}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 5z - \frac{5}{3} \\ xy = \frac{5}{3}z \end{cases}$$

$$\left(5z - \frac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{3}z = \frac{25}{9}; \quad 25z^2 - \frac{50}{3}z + \frac{25}{9} - \frac{10}{3}z = \frac{25}{9}$$

$$25z^2 - \frac{60}{3}z + \frac{25}{9} - \frac{10}{3}z = 0; \quad 5z^2 - 4z = 0; \quad z(5z - 4) = 0; \quad z = 0 \vee z = \frac{4}{5}$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x+y = 5z - \frac{5}{3} = -\frac{5}{3} \\ xy = \frac{5}{3}z = 0 \end{cases}$$

$$t^2 + \frac{5}{3}t = 0$$

$$t\left(t + \frac{5}{3}\right) = 0$$

$$t = 0 \vee t = -\frac{5}{3}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = -5/3 \\ z = 0 \end{cases}} \quad \boxed{\begin{cases} x = -5/3 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} z = \frac{4}{5} \\ x+y = 5z - \frac{5}{3} = 5 \cdot \frac{4}{5} - \frac{5}{3} = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3} \\ xy = \frac{5}{3}z = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$t^2 - \frac{7}{3}t + \frac{4}{3} = 0$$

$$3t^2 - 7t + 4 = 0$$

$$3t^2 - 3t - 4t + 4 = 0$$

$$3t(t-1) - 4(t-1) = 0$$

$$(t-1)(3t-4) = 0$$

$$t = 1 \vee t = 4/3$$

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 4/3 \\ z = 4/5 \end{cases}} \quad \boxed{\begin{cases} x = 4/3 \\ y = 1 \\ z = 4/5 \end{cases}}$$