$$t_9 : \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$$

a)

1)

Quanto vale la "costante di affinità" $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ **?**

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

2)
L'affinità in esame è diretta o è inversa?

E' diretta ($\mathrm{D} > 0$)

3)
E' una isometria?

Sì.

$\mathrm{D} = 1;\ \ a = d,\ b = -c$

4)
E' un "caso particolare" fra quelli del paragrafo 16
(traslazione, simmetria rispetto a un punto o a una parallela agli assi, omotetia …)?

No.

b)

1)

Determina, tramite passaggi algebrici, le equazioni dell'affinità inversa.

L'inversa di $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$ si può ricavare coi passaggi seguenti:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = x' \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = y' \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y = 5x' \\ 4x + 3y = 5y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4y + 5x'}{3} \\ 4 \cdot \frac{4y + 5x'}{3} + 3y = 5y'; \quad 16y + 20x' + 9y = 15y'; \quad \overset{5}{\cancel{25}}\, y = -\overset{4}{\cancel{20}}\, x' + \overset{3}{\cancel{15}}\, y'; \quad y = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \\ x = \frac{4y + 5x'}{3} = \frac{1}{3} \cdot (4y + 5x') = \frac{1}{3} \cdot \left[4\left(-\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \right) + 5x' \right] = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{16}{5}x' + \frac{12}{5}y' + 5x' \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \\ x = \frac{1}{3} \cdot \frac{-16x' + 12y' + 25x'}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9x' + 12y'}{5} = \frac{3x' + 4y'}{5} = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \\ y = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{cases}}$$

Scambiando la coppia (x, y) con la (x', y'), questa trasformazione inversa si può scrivere come

$$\boxed{\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}}$$

2)
L'affinità in esame è involutoria?

No

3)
Nel caso l'affinità considerata fosse "particolare", abbi cura di controllare se è confermato che

- **l'inversa di una traslazione è la traslazione di vettore opposto;**
- **l'inversa di un'omotetia di rapporto *k* è un'omotetia con lo stesso centro, e rapporto 1/*k*;**
- **l'inversa di una simmetria (centrale o assiale) è la simmetria stessa**

Non rientra fra i casi particolari del paragrafo 16.

c)

Determina l'immagine e poi la controimmagine:

1) della retta $r: y = 2x + 1$

Curva assegnata:

$y = 2x + 1$

Equazioni trasformazione inversa:

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$$

Equazione curva immagine:

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\right) + 1 \quad -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = \frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y + 1 \quad -4x + 3y = 6x + 8y + 5 \quad -5y = 10x + 5$$

$$\boxed{y = -2x - 1}$$

Equazioni trasformazione diretta:

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$$

Equazione curva controimmagine:

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y\right) + 1 \quad \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y + 1 \quad 4x + 3y = 6x - 8y + 5 \quad 11y = 2x + 5$$

$$\boxed{y = \frac{2}{11}x + \frac{5}{11}}$$

2) della circonferenza $\gamma : x^2 + y^2 = 1$

$Curva\ assegnata:$

$x^2 + y^2 = 1$

$Equazioni\ trasformazione\ inversa:$

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$$

$Equazione\ curva\ immagine:$

$$\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)^2 = 1$$

$$\frac{9}{25}x^2 + \frac{16}{25}y^2 + \cancel{\frac{24}{25}xy} + \frac{16}{25}x^2 + \frac{9}{25}y^2 - \cancel{\frac{24}{25}xy} = 1$$

$$\frac{25}{25}x^2 + \frac{25}{25}y^2 = 1$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

$L'immagine\ della\ curva\ è\ la\ curva\ stessa!$

$Equazioni\ trasformazione\ diretta:$

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$$

$Equazione\ curva\ controimmagine:$

$$\left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y\right)^2 + \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)^2 = 1$$

$$\frac{9}{25}x^2 + \frac{16}{25}y^2 - \cancel{\frac{24}{25}xy} + \frac{16}{25}x^2 + \frac{9}{25}y^2 + \cancel{\frac{24}{25}xy} = 1$$

$$\frac{25}{25}x^2 + \frac{25}{25}y^2 = 1$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

$Anche\ la\ controimmagine\ della\ curva\ è\ la\ curva\ stessa!$