4. LA PROPRIETA' INVARIANTIVA DEI RADICALI (esercizi a pag. 19)

(6) $\boxed{\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{PROPRIETA' INVARIANTIVA}}$

ossia:

- **se il radicando è una potenza, il cui esponente è semplificabile con l'indice, è possibile effettuare la semplificazione: il valore del radicale non cambierà;**
- **e viceversa**, leggendo da destra verso sinistra:

  il valore di un radicale non cambia se si moltiplicano
  sia l'indice che l'esponente del radicando per uno stesso intero positivo k;

  o, in altre parole,

  se si moltiplica l'indice per un intero positivo k,
  e contemporaneamente si eleva il radicando all'esponente k.

Dimostrazione della (6)
Il ragionamento dimostrativo si basa su di una proprietà dei numeri reali della quale ci serviremo in seguito anche per altre dimostrazioni, e che quindi appare opportuno denominare con un termine convenzionale.
Chiameremo questa proprietà "principio E" ("E" come "Elevamento a potenza").

Il "**Principio E**"
Se elevando ad uno stesso esponente $p \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ due numeri reali POSITIVI O NULLI, si ottengono risultati uguali, allora si era partiti da numeri uguali

$$x^p = y^p \Rightarrow x = y \quad (x, y \text{ numeri reali non negativi, } p \text{ numero naturale non nullo})$$

Prendiamo dunque separatamente il primo e il secondo membro della uguaglianza (6)
che vogliamo dimostrare, ed eleviamoli entrambi all'esponente nk.
Se così facendo otterremo risultati uguali,
ne dedurremo che eravamo partiti da numeri uguali, cioè che la (6) è corretta.

$$\left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^{nk} \underset{\substack{\text{identità} \\ (4)}}{=} \boxed{a^{mk}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^k \underset{\substack{\text{identità} \\ (4)}}{=} \left(a^m\right)^k = \boxed{a^{mk}}$$

OK!!! In virtù del "principio E", la (6) è corretta.

Poiché, elevando il 1° e il 2° m. dell'uguaglianza (6) da dimostrare al medesimo esponente nk, si è ottenuto lo stesso risultato a^{mk}, resta stabilito, in virtù del "principio E", che la (6) è corretta.

Ricordiamo l'identità (4):
$\left(\sqrt[\cancel{n}]{a}\right)^{\cancel{n}} = a$

Esempi:

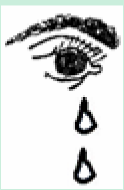
$\sqrt[12]{x^{15}} = \sqrt[\overset{4}{\cancel{12}}]{x^{\overset{5}{\cancel{15}}}} = \sqrt[4]{x^5}$; $\sqrt[4]{9} = \sqrt[\overset{2}{\cancel{4}}]{3^{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$; $\sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{49}$ (NOTA 1) ; $\sqrt{x+y} = \sqrt[6]{(x+y)^3}$

$\sqrt[8]{9x^2y^4z^6} = \sqrt[\overset{4}{\cancel{8}}]{\left(3xy^2z^3\right)^{\cancel{2}}} = \sqrt[4]{3xy^2z^3}$ quindi, direttamente: $\sqrt[\overset{4}{\cancel{8}}]{3^{\cancel{2}}\, x^{\cancel{2}}\, y^{\overset{2}{\cancel{4}}}\, z^{\overset{3}{\cancel{6}}}} = \sqrt[4]{3xy^2z^3}$ (NOTA 2)

$\sqrt[6]{\dfrac{a^3b^6}{125}} = \sqrt[\overset{2}{\cancel{6}}]{\left(\dfrac{ab^2}{5}\right)^{\cancel{3}}} = \sqrt{\dfrac{ab^2}{5}}$ quindi, direttamente: $\sqrt[\overset{2}{\cancel{6}}]{\dfrac{a^{\cancel{3}}b^{\overset{2}{\cancel{6}}}}{5^{\cancel{3}}}} = \sqrt{\dfrac{ab^2}{5}}$ (NOTA 2)

NOTA 1 - L'applicazione della proprietà invariantiva "nel senso della moltiplicazione" si rende necessaria in determinate circostanze, ad esempio quando, per la moltiplicazione o divisione di due radicali, occorre preliminarmente portare i radicali in gioco allo stesso indice.

♥ NOTA 2 - **ATTENZIONE BENE!**
Semplificazioni indice-esponenti di questo tipo
si possono fare quando a radicando compaiono ESCLUSIVAMENTE moltiplicazioni e/o divisioni,
mentre sarebbero ERRORE GRAVE
in presenza di addizioni e sottrazioni!



$\cancel{\sqrt[\overset{3}{\cancel{15}}]{a^{\overset{2}{\cancel{10}}} + b^{\cancel{5}}}}$

NO,
PER
CARITA' !!!

Ad esempio,
$\sqrt[4]{\mathbf{3^4 + 4^4}} =$
$= \sqrt[4]{337} = \mathbf{4,28\dots}$
mentre
$\sqrt[2]{\mathbf{3^2 + 4^2}} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$