## 5. PRODOTTO E QUOZIENTE DI RADICALI (esercizi a pag. 19)

Valgono le uguaglianze:

(7) $\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}}$ (8) $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$

Esse possono essere lette così:

(7) **il prodotto di due radicali aventi lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice, e per radicando il prodotto dei radicandi;**

(8) **il quoziente di due radicali aventi lo stesso indice è un radicale che ha per indice lo stesso indice, e per radicando il quoziente dei radicandi.**

Leggendo la (7) e la (8) da destra verso sinistra, otteniamo

(7') $\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$ (8') $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

ossia:

(7') **la radice di un prodotto è uguale al prodotto delle radici dei singoli fattori;**
(8') **la radice di un quoziente è uguale al quoziente delle radici del dividendo e del divisore.**

*Dimostrazione* di (7), (8), (7'), (8').

Basterà dimostrare, ovviamente, la (7) e la (8).
Dimostriamo la (7); la tecnica dimostrativa per la (8) è identica.

Dunque, consideriamo i due membri della (7) ed applichiamo il "principio E", utilizzando n come esponente a cui elevare ambo i membri:

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\underset{\substack{\text{identità}\\ (4),\\ \text{due volte}}}{=}\boxed{ab}$$

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n\underset{\substack{\text{identità}\\ (4)}}{=}\boxed{ab}$$

*Poiché, elevando il 1° e il 2° membro dell'uguaglianza (7) da dimostrare al medesimo esponente n, si è ottenuto lo stesso risultato ab, resta stabilito, in virtù del "principio E", che la (7) è corretta.*

Ricordiamo l'identità (4):
$$\left(\sqrt[\cancel{n}]{a}\right)^{\cancel{n}}=a$$

Esempi: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$ ; $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[\cancel{3}]{x^{\cancel{3}}}=x$ ; $\sqrt[4]{\dfrac{5}{16}}=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{16}}=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{2}$ ; $\sqrt{xy}:\sqrt{y}=\sqrt{xy:y}=\sqrt{x}$

**Se vogliamo moltiplicare o dividere due radicali con indici diversi, dovremo prima portarli allo stesso indice applicando la proprietà invariantiva.**
**Come indice comune converrà assumere il m.c.m. degli indici**, detto "**minimo comune indice**".

Esempi:

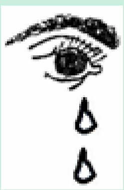
$$\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{3}=\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{3^2}=\sqrt[12]{2^3\cdot 3^2}=\sqrt[12]{8\cdot 9}=\sqrt[12]{72}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{a^2}}=\sqrt[6]{\frac{a^3}{a^2}}=\sqrt[6]{a}$$

$$\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}}\cdot\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}=\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}}=\sqrt[4]{\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+2}}\cdot\frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{(x+1)^{\cancel{2}}}}=\sqrt[4]{\frac{x+2}{x+1}}$$

♥ **OCCHIO !!!**
Attento a non cadere in un "tipico" errore!
In generale, NON è vero che



$$\cancel{\sqrt[n]{a\pm b}=\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}}$$

**NO, PER CARITA' !!!**

Ad esempio,
$\sqrt{\mathbf{9+16}}=$
$=\sqrt{25}=\mathbf{5}$

mentre
$\sqrt{\mathbf{9}}+\sqrt{\mathbf{16}}=$
$=3+4=\mathbf{7}$