6. TRASPORTO DI UN FATTORE DENTRO E FUORI DAL SEGNO DI RADICE

(esercizi a pag. 21)

La catena $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$ mostra che vale l'uguaglianza

(9) $\boxed{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}\quad (a,b\geq 0)}$

Un fattore POSITIVO, che moltiplica un radicale, può essere fatto FILTRARE SOTTO IL SEGNO DI RADICE, PURCHE' LO SI ELEVI ad un esponente uguale all'indice.

Esempi: $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{8\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$; $\quad (a-b)\sqrt{a-b}=\sqrt{(a-b)^2(a-b)}=\sqrt{(a-b)^3}$

Sovente è invece utile, ai fini del calcolo, percorrere il CAMMINO INVERSO; ossia, ESTRARRE UN FATTORE da un radicale il cui radicando è un prodotto. Ciò è possibile solo se uno dei fattori del prodotto che sta a radicando è elevato ad un esponente maggiore o uguale all'indice della radice.

♥ A tale scopo (estrazione di un fattore dal segno di radice) non è necessario imparare regole particolari (NOTA); **basterà procedere "per tentativi"**, ponendosi sempre, a cose fatte, la seguente domanda: **"e se adesso riportassi dentro il fattore che ho estratto, ritroverei l'espressione di partenza?" In caso di risposta affermativa, tutto è OK!**

NOTA. La regola - non indispensabile, ripeto - direbbe che un fattore interno ad un radicale, e avente esponente non inferiore all'indice, può essere estratto dal segno di radice con esponente uguale al QUOZIENTE della *divisione intera* ESPONENTE:INDICE, e rimanere all'interno della radice con esponente uguale al RESTO della stessa divisione.

Es.: $\sqrt[3]{x^3y}=x\sqrt[3]{y}$; $\quad\sqrt[7]{a^{14}b}=a^2\sqrt[7]{b}$; $\quad\sqrt[5]{x^{23}}=x^4\sqrt[5]{x^3}$; $\quad\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$ $\quad$ *PSST ... Guarda pure gli "esercizi svolti" di pag. 21!*

7. RADICE DI UN RADICALE (esercizi a pag. 21)

(10) $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}}$

La radice di un radicale è un radicale che ha per radicando lo stesso radicando, e per indice il prodotto degli indici.

Dimostrazione di (10). Col "Principio E":

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk}=\left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{n}\right]^{k}\underset{\text{identità (4)}}{=}\left[\sqrt[k]{a}\right]^{k}\underset{\text{identità (4)}}{=}\boxed{a}$$

$$\left(\sqrt[nk]{a}\right)^{nk}\underset{\text{identità (4)}}{=}\boxed{a}$$

Poiché, elevando il 1° e il 2° membro dell'uguaglianza (10) da dimostrare al medesimo esponente nk, si è ottenuto lo stesso risultato a, resta stabilito, per il "principio E", che la (10) è corretta.

Ricordiamo l'identità (4): $\left(\sqrt[\cancel{n}]{a}\right)^{\cancel{n}}=a$

Esempi: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}}=\sqrt[12]{6}$; $\quad\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}=\sqrt[8]{x}$; $\quad\sqrt{\sqrt[3]{121}}=\sqrt[6]{121}=\sqrt[\cancel{6}^{\,3}]{11^{\cancel{2}}}=\sqrt[3]{11}$

8. POTENZA DI UN RADICALE (esercizi a pag. 21)

(11) $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}}$

Per elevare a potenza un radicale, basta elevare a quell'esponente il radicando, mantenendo invariato l'indice. In altre parole: **un esponente esterno può essere fatto "filtrare sotto il simbolo di radice".**

Dim. di (11): lasciata al lettore. Col "Principio E", elevando allo stesso esponente n ambo i membri.

Esempi: $\left(\sqrt[7]{2}\right)^3=\sqrt[7]{2^3}=\sqrt[7]{8}$; $\quad\left(\sqrt[15]{a}\right)^6=\sqrt[\cancel{15}^{\,5}]{a^{\cancel{6}^{\,2}}}=\sqrt[5]{a^2}$ (NOTA 1); $\quad\left(\sqrt{3}\right)^4=\sqrt{3^4}=3^2=9$ (NOTA 2)

NOTA 1 - Si capisce allora che si può semplificare direttamente l'indice con l'esponente esterno, facendo poi filtrare questo all'interno soltanto alla fine: $\left(\sqrt[\cancel{15}^{\,5}]{a}\right)^{\cancel{6}^{\,2}}=\sqrt[5]{a^2}$

NOTA 2 - Nell'eseguire $\sqrt{3^4}$ si può pensare all'applicazione diretta della definizione di radice quadrata (qual è quel numero che elevato al quadrato dà come risultato 3^4? Evidentemente, è 3^2);
oppure
a una semplificazione che fa diventare l'indice uguale a 1, quindi fa scomparire il radicale (per definizione, un radicale con indice 1 lascia invariato il radicando e pertanto … è come se non ci fosse): $\sqrt{3^4}=\sqrt[\cancel{2}^{\,1}]{3^{\cancel{4}^{\,2}}}=\sqrt[1]{3^2}=3^2$