11. L'AGGETTIVO "IRRAZIONALE"

Ripassiamo innanzitutto alcune cose già viste in passato.

Un **numero** è detto

- "**RAZIONALE**" se è esprimibile come frazione, ossia come "ratio", "rapporto", fra due interi:

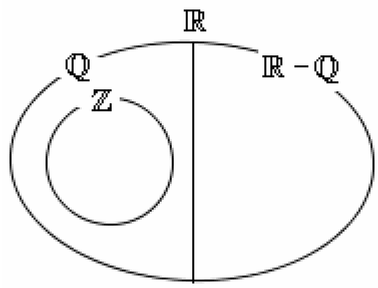
  es. $\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{12}$; $+3=+\frac{3}{1}$; $-0,7=-\frac{7}{10}$; $1,\overline{2}=1,22222...=\frac{12-1}{9}=\frac{11}{9}$; ecc. ecc.

- "**IRRAZIONALE**" in caso contrario.
  Sappiamo che quando si trasforma una frazione in numero decimale, eseguendo la divisione, si ottiene sempre un numero decimale *finito*, oppure *periodico*;
  NON si potrà mai ottenere un numero decimale *illimitato non periodico*.
  Bene! Ciò implica allora che **i numeri con la virgola illimitati non periodici sono tutti irrazionali**.

Dal punto di vista insiemistico, **gli interi sono considerati come casi particolari di razionali** (ad es., 5 = 5/1);
l'insieme costituito da tutti i numeri razionali, più anche tutti i numeri irrazionali,
viene detto "insieme dei numeri REALI" e indicato con uno dei due simboli $\mathbb{R}$ oppure $(-\infty,+\infty)$.

Quando si parla di "numeri reali", ci si riferisce di norma ai "reali *relativi*".
L'insieme dei reali *assoluti* (= senza segno) può essere indicato con $\mathbb{R}_a$.

Il simbolo per indicare l'insieme dei RAZIONALI è $\mathbb{Q}$
(dal tedesco Quotient = Quoziente, rapporto).
Per indicare l'insieme degli IRRAZIONALI
si utilizza di solito l'operazione di "differenza insiemistica", scrivendo $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
(in pratica, se dall'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali noi togliamo gli elementi
di $\mathbb{Q}$, ossia i razionali, otteniamo l'insieme dei non-razionali o irrazionali).
Quando si dice "numeri razionali", senza specificare altro,
si intende "razionali *relativi*"; se si desidera indicare l'insieme
dei razionali *assoluti* (= senza segno), al posto di $\mathbb{Q}$ si scrive $\mathbb{Q}_a$.



$\mathbb{R}=\{\text{reali (relativi)}\}$
$\mathbb{Q}=\{\text{razionali (relativi)}\}$
$\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\{\text{irrazionali (relativi)}\}$
$\mathbb{Z}=\{\text{interi (relativi)}\}$

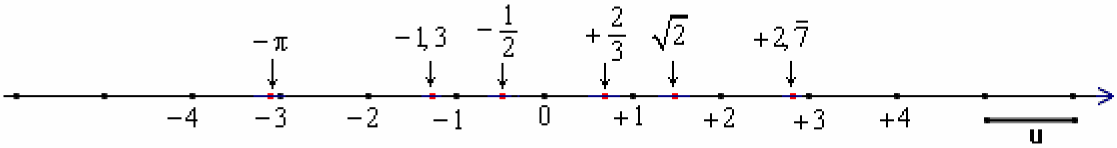
Ad esempio, **si dimostra che sono irrazionali**:

- **i decimali illimitati non periodici**, come abbiamo già sottolineato
- **le radici quadrate degli interi che non sono "quadrati perfetti"**, come $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ ...$
- **le radici n-esime degli interi che non sono n-esime potenze perfette**, come $\sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{8},\ ...$
- **il numero π**, che esprime il rapporto fra una circonferenza e il suo diametro,
  o anche, volendo, "la misura della circonferenza, se come unità di misura si prende proprio il diametro".
  La prima dimostrazione dell'irrazionalità di π si deve al francese J. Lambert (2^a metà del XVIII secolo).

L'insieme $\mathbb{R}$ è "rappresentabile sopra una retta", nel senso che, presa una "number line"
(= retta dotata di origine, orientamento e unità di misura),

♪ **ad ogni punto corrisponde uno e un solo numero reale (detto "ascissa" di quel punto)**
e viceversa
♫ **ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto (detto "immagine" di quel numero).**

In ogni intervallino, anche piccolissimo, della "number line",
troviamo sempre infiniti punti con ascissa razionale ed infiniti altri punti con ascissa irrazionale.



Esistono infiniti numeri razionali, ed esistono pure infiniti numeri irrazionali;
però, in un certo senso, i numeri irrazionali sono "più infiniti ancora" dei razionali
(la loro "numerosità" ha un "grado di infinito" maggiore).
Affascinante! Se vuoi approfondire, puoi andare alla pagina 402 di questo volume.

Andiamo ora alla dimostrazione del fantastico, importantissimo

TEOREMA	**Il numero $\sqrt{2}$ è irrazionale, ossia:** **non esiste nessuna frazione ("frazione" in senso stretto: "rapporto fra due interi")** **la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.**

Questo enunciato si dimostra ragionando *per assurdo*.
Supponiamo, per assurdo, che esista una frazione la quale, elevata al quadrato, dia come risultato 2.

Detta, per fissare le idee, $\frac{m}{n}$ tale frazione, avremo: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Riduciamo la frazione m/n ai minimi termini, se già non lo è; otterremo una frazione p/q,
con p e q primi fra loro (cioè: privi di divisori comuni; in altre parole: non più semplificabili), tale che $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Si potrà scrivere quindi la seguente catena di deduzioni:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \;\rightarrow\; \frac{p^2}{q^2} = 2 \;\rightarrow\; p^2 = 2q^2 \;\rightarrow\; \text{il numero } p^2 \text{ è pari} \;\rightarrow\; \boxed{p \text{ è PARI}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \text{esiste un INTERO } p' \text{ tale che } p = 2p' \;\rightarrow\; (2p')^2 = 2q^2 \;\rightarrow\; 4p'^2 = 2q^2 \;\rightarrow\; q^2 = 2p'^2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \text{il numero } q^2 \text{ è pari} \;\rightarrow\; \boxed{q \text{ è PARI}}$$

Ora, nel corso di tale catena abbiamo dedotto che p e q sono entrambi PARI, cioè entrambi divisibili per 2, mentre eravamo partiti dal presupposto che la frazione p/q fosse ridotta ai minimi termini, vale a dire non più semplificabile.

Ricapitoliamo:
supponendo che esistesse una frazione m/n tale che $(m/n)^2 = 2$, siamo pervenuti a conclusioni assurde.
Non esiste perciò alcuna frazione che elevata al quadrato dia 2.

♥ **Poiché il primo numero di cui fu scoperta l'irrazionalità fu $\sqrt{2}$, l'aggettivo "irrazionale" finì per essere storicamente collegato con l'idea della presenza di una radice!**

Precisiamo meglio.

I) Dicendo che **un'ESPRESSIONE è "irrazionale"**, si intende affermare che **contiene il segno di radice**.
Ad esempio, l'espressione $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x+1} - x + 2$ è "irrazionale".
Osserviamo che un'espressione come $\sqrt{2}+1$ può meritarsi l'aggettivo "irrazionale" per *entrambi* i motivi:

a) pensata come *espressione*, contiene il segno di radice;
b) pensata come *numero*, non è esprimibile sotto forma di rapporto fra due interi:
infatti, se per assurdo lo fosse, si avrebbe
$\sqrt{2}+1 = \frac{m}{n}$ (per due opportuni interi m, n) e ne seguirebbe $\sqrt{2} = \frac{m}{n} - 1 = \frac{m-n}{n}$
impossibile in quanto, come abbiamo visto, $\sqrt{2}$ non è esprimibile come rapporto fra due interi.

A proposito, con riferimento ai numeri:

a) sommando un irrazionale con un razionale si ottiene sempre un irrazionale (pensa all'es. prec. $\sqrt{2}+1$);
b) sommando due numeri razionali si ottiene sempre un numero razionale (ovviamente);
c) sommando due irrazionali si può ottenere, a seconda dei casi, un irrazionale oppure un razionale.
Esempi: $\underbrace{3\sqrt{2}}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} + \underbrace{\sqrt{2}}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} = \underbrace{4\sqrt{2}}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$ ma $\underbrace{(5-\sqrt{3})}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} + \underbrace{(\sqrt{3}-1)}_{\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} = \underbrace{4}_{\in\mathbb{Q}}$

II) Quando si dice che **un'EQUAZIONE** è "**irrazionale**",
si intende affermare che **contiene almeno una volta l'incognita sotto il segno di radice.**
Ad esempio, l'equazione $\sqrt{x+3} - 2x = 0$ è "irrazionale".
CONTROESEMPIO - Osserviamo che invece l'equazione $x^2 - 4x - 2\sqrt{3} = 0$ NON è irrazionale:
si tratta semmai di una equazione "a *coefficienti* irrazionali".

III) Quando si dice che **una FUNZIONE** è "**irrazionale**",
si intende affermare che **in essa la variabile indipendente compare almeno una volta sotto radice**.

NUMERO IRRAZIONALE: numero non esprimibile come rapporto (latino: *ratio*) fra due interi
ESPRESSIONE IRRAZIONALE: espressione contenente il segno di radice
EQUAZIONE IRRAZIONALE: equazione in cui l'incognita compare almeno una volta sotto radice
FUNZIONE IRRAZIONALE: funzione in cui la var. indipendente compare almeno una volta sotto radice