12. RAZIONALIZZAZIONE DEL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE

(esercizi a pag. 23)

L'esperienza mostra che in parecchi casi (non sempre, ma con grande frequenza), quando in una frazione compare **il SEGNO DI RADICE a DENOMINATORE**, tale segno di radice **"dà fastidio"**:

- può essere scomodo ai fini della valutazione del valore numerico del risultato,
- o per le esigenze del calcolo letterale,
- oppure può influire negativamente sulla compattezza e/o eleganza dell'espressione.

E' spesso conveniente, dunque, **operare sulla frazione (senza alterarne, beninteso, il valore),** in modo da **cacciar via il segno di radice dal denominatore**.
Tale procedimento prende il nome di "**razionalizzazione del denominatore**".

Esso si effettua applicando la **PROPRIETÀ INVARIANTIVA DELLE FRAZIONI**, ossia
moltiplicando sia "sopra" che "sotto" per uno stesso numero,
da scegliersi opportunamente
(= da scegliersi in modo tale che, una volta eseguite le moltiplicazioni,
il nuovo denominatore non contenga più il segno di radice).

Due esempi:

♪ $\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=2\sqrt{2}$

♫ $\frac{2}{3+\sqrt{7}}=\frac{2}{3+\sqrt{7}}\cdot\frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}=\frac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{3^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{2\left(3-\sqrt{7}\right)}{9-7}=\frac{\cancel{2}\left(3-\sqrt{7}\right)}{\cancel{2}}=3-\sqrt{7}$

Il fattore per cui moltiplicare ambo i termini della frazione, onde eliminare il segno di radice dal denominatore, prende il nome di "**fattore razionalizzante**".

Passiamo ora in rassegna le casistiche più rilevanti di razionalizzazione.

❑ $\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{3}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}=\frac{\cancel{3}\sqrt{15}}{\cancel{15}_{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$; $\quad \frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{xy}}{3y}$

Regola 1: $\frac{1}{a\sqrt{b}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}}=\frac{\sqrt{b}}{ab}$

❑ $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\cancel{2}}=2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

$\frac{1}{2\sqrt{2}-3}=\frac{1}{2\sqrt{2}-3}\cdot\frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}+3}=\frac{2\sqrt{2}+3}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-3^2}=\frac{2\sqrt{2}+3}{8-9}=\frac{2\sqrt{2}+3}{-1}=-\left(2\sqrt{2}+3\right)$

Regola 2: $\frac{1}{a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}}\cdot\boxed{\frac{a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}}{a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}}}=\frac{a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}}{a^2b-c^2d}$

❑ $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\cdot\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^3}}=\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^4}}=\frac{\sqrt[4]{a^3}}{a}$; $\quad \frac{xy}{3\sqrt[5]{x^4y^2t}}=\frac{xy}{3\sqrt[5]{x^4y^2t}}\cdot\frac{\sqrt[5]{xy^3t^4}}{\sqrt[5]{xy^3t^4}}=\frac{xy\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3\sqrt[5]{x^5y^5t^5}}=\frac{\cancel{xy}\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3\cancel{xy}t}=\frac{\sqrt[5]{xy^3t^4}}{3t}$

Regola 3:

$\frac{1}{x\sqrt[n]{a^mb^pc^k}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}{x\sqrt[n]{a^nb^nc^n}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}b^{n-p}c^{n-k}}}{x\cdot abc}\quad (m,\,p,\,k<n)$ NOTA

NOTA: se così non fosse, si estrarrebbero innanzitutto uno o più fattori e ci si ricondurrebbe a questo caso

❑ $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\cancel{2}+\cancel{3}+2\sqrt{6}\cancel{-5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

L'ultimo esempio illustra la
Regola 4:
Quando a denominatore abbiamo la somma algebrica di tre termini con radicali quadratici,
prima di tutto si raggruppano due fra i termini entro parentesi,
poi si moltiplica per l'espressione che permette di ottenere il prodotto notevole
$(a+b)(a-b)$,
tenendo presente che in questo caso occorrono
DUE FASI SUCCESSIVE per completare la razionalizzazione.

Vediamo un'altra situazione analoga:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}-\left(\sqrt{5}-1\right)}\cdot\frac{2\sqrt{2}+\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\sqrt{2}+\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{8-\left(5-2\sqrt{5}+1\right)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{8-5+2\sqrt{5}-1}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{2+2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{2\left(1+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{2(1-5)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1-2\sqrt{10}-5+\sqrt{5}}{2\cdot(-4)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-6}{-8}=-\frac{\cancel{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}-3\right)}{\cancel{8}\,4}=$$

$$=\frac{3+\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$$

❑ $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+7}$ Questo caso, bizzarro ma rilevante, si affronta nel modo seguente:
si "tratta" l'espressione $(\sqrt[3]{5}+7)$ come un binomio $(a+b)$
che verrà moltiplicato per un'opportuna espressione,
in modo da ottenere come risultato a^3+b^3 e mandar via così le radici cubiche.
Ma questa espressione è il trinomio (a^2-ab+b^2)!
Infatti è noto che $a^3 \pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.
Dunque, nel nostro esempio,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}+7}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}+7}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-7\sqrt[3]{5}+49}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-7\sqrt[3]{5}+49}=\frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-7\sqrt[3]{5}+49}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3+7^3}=\frac{\sqrt[3]{25}-7\sqrt[3]{5}+49}{5+343}=\frac{\sqrt[3]{25}-7\sqrt[3]{5}+49}{348}$$

Ancora due razionalizzazioni del medesimo tipo:

♪ $$\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}=\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{4}\right)^3}_{=5-4=1}}=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+2\sqrt[3]{2}$$

♫ $$\frac{4}{5-3\sqrt[3]{2}}=\frac{4}{5-3\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}{25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}}=\frac{4\left(25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}\right)}{125-54}=\frac{4\left(25+15\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{4}\right)}{71}$$

Regola 5: $$\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a\pm b}$$