13. RADICALI DOPPI (esercizi a pag. 26)

Si dice "radicale doppio" un'espressione della forma

$$\sqrt{\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}}$$

A volte (non sempre!) un radicale doppio si può trasformare nella somma algebrica di due espressioni che non contengano più radici quadrate "sovrapposte".

SPEZZAMENTO DI UN RADICALE DOPPIO PER TENTATIVI

L'idea di "spezzare", se possibile, un radicale doppio, parte da un'osservazione.
Quando si esegue il quadrato di un binomio nel quale uno o entrambi i termini contengano radici quadrate, si incontrano situazioni come quelle che seguono:

$$\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2 = \underline{\underline{7}} + 2\sqrt{35} \underline{\underline{+5}} = 12 + 2\sqrt{35}$$

$$\left(4\sqrt{2}-3\right)^2 = \underline{\underline{32}} - 24\sqrt{2} \underline{\underline{+9}} = 41 - 24\sqrt{2}$$

vale a dire:
inizialmente si ottengono tre termini (quadrato del primo / doppio prodotto / quadrato del secondo), ma **nel passaggio successivo questi tre termini si riducono a due**, per il fatto che i due quadrati, non contenendo più la radice, possono diventare per somma algebrica un termine solo.
Rimane poi il doppio prodotto, che conserva la radice.

In definitiva, dunque,
dal quadrato di un binomio "a base di radici quadrate" si ottiene un altro binomio, con:

- ♪ **un termine senza radice (proveniente dalla somma dei quadrati)**
- ♫ **e un termine che presenta ancora la radice (proveniente, questo, dal doppio prodotto).**

Ma allora, di fronte ad un radicale doppio $\sqrt{\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}}$,
noi possiamo "sperare" che l'espressione sotto la radice quadrata principale, $\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}$,
risulti essere proprio il risultato dello sviluppo di un opportuno quadrato di binomio.
Se dovesse verificarsi questo caso "fortunato", scriveremmo $\sqrt{\alpha \pm \gamma\sqrt{\beta}} = \sqrt{(\ldots \pm \ldots)^2}$
e nel passaggio dopo manderemmo via la radice semplificandola con l'esponente 2.

Vediamo QUALCHE ESEMPIO.

- ❑ Prendiamo il radicale doppio: $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.

  Il nostro obiettivo è di riuscire a scrivere $\sqrt{17+\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{doppio} \\ \textit{prodotto}}}{12\sqrt{2}}} = \sqrt{(\ldots+\ldots)^2}$

  Se $\textit{doppio prodotto} = 12\sqrt{2}$, sarà $\textit{prodotto} = 6\sqrt{2}$
  e si tratta quindi di determinare due numeri che abbiano come prodotto $6\sqrt{2}$ e come somma dei quadrati 17.

$$\boxed{\textit{prodotto} = 6\sqrt{2}} \rightarrow \begin{array}{l} \left(6,\ \sqrt{2}\right) \textit{ oppure} \\ \left(6\sqrt{2},\ 1\right) \textit{ oppure} \\ \left(3,\ 2\sqrt{2}\right) \textit{ oppure} \\ \quad\ldots \end{array}$$

  Fra le varie possibilità dobbiamo cercare (se esiste) quella per cui la somma dei quadrati è 17;
  provando a fare i calcoli, vediamo che $3^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 9+8=17$ e di conseguenza
  la coppia che fa al caso nostro sarà $\left(3,\ 2\sqrt{2}\right)$ da cui, finalmente:

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}} = \sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2} = 3+2\sqrt{2}. \quad \textit{Ce l'abbiamo fatta! E' spezzato!!!}$$

- L' esempio che segue è più complicato, per un paio di ragioni.

$$\sqrt{62-20\sqrt{6}}$$

$doppio\ prodotto \underset{\text{NOTA}}{=} 20\sqrt{6} \to \boxed{prodotto = 10\sqrt{6}}$

da cui le possibilità

$$\left(10,\ \sqrt{6}\right)\ opp.\ \left(10\sqrt{6},\ 1\right)\ opp.\ \left(5\sqrt{6},\ 2\right)\ opp.\ \left(2\sqrt{6},\ 5\right)$$

sennonché, disgraziatamente:

NOTA
Sì, è vero, rigorosamente sarebbe
$doppio\ prodotto = -20\sqrt{6}$,
ma è più comodo per noi pensare al VALORE ASSOLUTO dei termini; tanto, alla fine, metteremo il segno "–" in mezzo.

$$10^2+\left(\sqrt{6}\right)^2=100+6=106\neq 62; \qquad \left(10\sqrt{6}\right)^2+1^2=600+1=601\neq 62;$$

$$\left(5\sqrt{6}\right)^2+2^2=150+4=154\neq 62; \qquad \left(2\sqrt{6}\right)^2+5^2=24+25=49\neq 62$$

Tuttavia, possiamo trovare altre coppie con prodotto $10\sqrt{6}$ se spezziamo $\sqrt{6}$ in $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$;
in definitiva, vediamo che la coppia cercata è $\left(2\sqrt{3},\ 5\sqrt{2}\right)$.

Dunque scriviamo $\sqrt{62-20\sqrt{6}}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{3}-5\sqrt{2}\ \ldots$

… e a questo punto saremmo molto soddisfatti, se qualche scocciatore, purtroppo a ragione, non ci dicesse invece che IL NOSTRO RISULTATO E' SBAGLIATO!

Il fatto è che $2\sqrt{3}-5\sqrt{2}$ è un numero NEGATIVO : $2\sqrt{3}-5\sqrt{2}\approx 2\cdot 1{,}7-5\cdot 1{,}4=3{,}4-7<0$
e un numero negativo, per quanto abbiamo detto riguardo ai segni,
non può mai essere il risultato dell'estrazione di una radice quadrata!

Niente paura … basterà scambiare l'ordine dei termini, in modo da
far sì che la base del quadrato sia positiva, prima di mandar via l'esponente con la radice:

$$\sqrt{62-20\sqrt{6}}=\sqrt{\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2}=\underbrace{5\sqrt{2}-2\sqrt{3}}_{>0} \qquad \textit{Ora è tutto OK.}$$

SPEZZAMENTO DI UN RADICALE DOPPIO TRAMITE FORMULA

Per spezzare (*tentare* di spezzare) un radicale doppio,
esiste anche un'apposita FORMULA (difficilotta):

$$\boxed{\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}} \qquad (13)$$

Per esercizio, controllane tu stesso la validità verificando che, se si eleva al quadrato il secondo membro, si ottiene il radicando del radicale a primo membro, ossia $a\pm\sqrt{b}$

Esempio:

$$\sqrt{10-3\sqrt{11}}\overset{\textbf{NOTA}}{=}\sqrt{10-\sqrt{99}}=$$

$$=\sqrt{\frac{10+\sqrt{100-99}}{2}}-\sqrt{\frac{10-\sqrt{100-99}}{2}}=\sqrt{\frac{10+1}{2}}-\sqrt{\frac{10-1}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{11}{2}}-\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{22}-3\sqrt{2}}{2}$$

NOTA: è indispensabile, se si vuole applicare la formula, ricondursi innanzitutto alla situazione cui la formula si riferisce:
$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ SENZA fattore fuori da $\sqrt{b}$.
In pratica,
se c'è un fattore fuori da $\sqrt{b}$, questo fattore va fatto immediatamente **filtrare all'interno**;
solo a questo punto la formula sarà applicabile.

Ma … **esiste un CRITERIO per stabilire a priori se un radicale doppio è spezzabile oppure no?**
Risposta affermativa: **lo "spezzamento" di un radicale doppio si può effettuare se e soltanto se il numero $\boxed{a^2-b}$ presente nella formula è un QUADRATO PERFETTO**.

Se non lo è, abbandoniamo pure l'impresa:
il radicale doppio non si potrà spezzare, né con la formula, né per tentativi.