14. ESPRESSIONI VARIE CON RADICALI (esercizi alle pagg. 26-27)

Presentiamo qualche esempio svolto.

a) $\boxed{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}+\sqrt[6]{64x^3+128x^2+64x}}$

Dobbiamo moltiplicare i primi due radicali, dopo averli portati allo stesso indice;
nell'ultimo radicale, invece, scomponiamo in fattori il radicando:
potendosi raccogliere $64=2^6$, si potrà estrarre un fattore 2.

L'estrazione di un fattore, quando è possibile,
è quasi sempre conveniente negli esercizi coi radicali.

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}+\sqrt[6]{64x^3+128x^2+64x}=$$

$$=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2}}+\sqrt[6]{64x\left(x^2+2x+1\right)}=$$

$$=\sqrt[6]{x^{\cancel{3}}\cdot\frac{(x+1)^2}{\cancel{x^2}}}+\sqrt[6]{64x(x+1)^2}=\sqrt[6]{x(x+1)^2}+2\sqrt[6]{x(x+1)^2}\underset{\substack{\text{radicali}\\ \text{simili}}}{=}3\sqrt[6]{x(x+1)^2}$$

b) $\boxed{\frac{\sqrt{25a^2-25}}{\sqrt{4a+4}+\sqrt{9a+9}}}$

Innanzitutto raccogliamo ed estraiamo un fattore:

$$\frac{\sqrt{25a^2-25}}{\sqrt{4a+4}+\sqrt{9a+9}}=$$

$$=\frac{\sqrt{25\left(a^2-1\right)}}{\sqrt{4(a+1)}+\sqrt{9(a+1)}}=\frac{5\sqrt{a^2-1}}{2\sqrt{a+1}+3\sqrt{a+1}}=\frac{\cancel{5}\sqrt{(a+1)(a-1)}}{\cancel{5}\sqrt{a+1}}\underset{\substack{\text{quoziente}\\ \text{di radicali}\\ \text{con lo stesso}\\ \text{indice}}}{=}\sqrt{\frac{\cancel{(a+1)}(a-1)}{\cancel{a+1}}}=\sqrt{a-1}$$

c) $\boxed{\frac{\sqrt{15}}{7-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}}$

Cominciamo a svolgere i calcoli a denominatore, poi vedremo.

$$\frac{\sqrt{15}}{7-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{7-\left(5+2-2\sqrt{10}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{\cancel{7}\cancel{-7}+2\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\cancel{15}^{\,3}}{\cancel{10}^{\,2}}}\underset{\substack{\text{conviene}\\ \text{spezzare}\\ \text{il radicale}}}{=}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

d) $\boxed{\dfrac{\sqrt a}{\sqrt a+\sqrt b}-\dfrac{\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}+\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}}$

Questo esercizio si presta ad essere eseguito in due modi alternativi:

♪ *razionalizzando* le prime due frazioni …

$$\frac{\sqrt a}{\sqrt a+\sqrt b}-\frac{\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{\sqrt a}{\sqrt a+\sqrt b}\cdot\frac{\sqrt a-\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}-\frac{\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}\cdot\frac{\sqrt a+\sqrt b}{\sqrt a+\sqrt b}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{\sqrt a\left(\sqrt a-\sqrt b\right)}{a-b}-\frac{\sqrt b\left(\sqrt a+\sqrt b\right)}{a-b}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{a\cancel{-\sqrt{ab}}\cancel{-\sqrt{ab}}-b\cancel{+2\sqrt{ab}}}{a-b}=\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{a-b}}=1$$

♫ … oppure *scomponendo in fattori* il denominatore della terza frazione

$$\frac{\sqrt a}{\sqrt a+\sqrt b}-\frac{\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}=$$

$$=\frac{\sqrt a}{\sqrt a+\sqrt b}-\frac{\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}+\frac{2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt a+\sqrt b\right)\left(\sqrt a-\sqrt b\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt a\left(\sqrt a-\sqrt b\right)-\sqrt b\left(\sqrt a+\sqrt b\right)+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt a+\sqrt b\right)\left(\sqrt a-\sqrt b\right)}=$$

$$=\frac{a\cancel{-\sqrt{ab}}\cancel{-\sqrt{ab}}-b\cancel{+2\sqrt{ab}}}{a-b}=\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{a-b}}=1$$

e) $\boxed{\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)-\sqrt{x-1}}$

In quest'altra espressione, è decisamente poco conveniente razionalizzare: converrà invece fare il denominatore comune entro ciascuna parentesi.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)-\sqrt{x-1}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}:\frac{1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x-1}=\frac{\cancel{1+\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{\cancel{1+\sqrt{x^2-1}}}-\sqrt{x-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x-1}=\frac{\cancel{\sqrt{x+1}}\cdot\sqrt{x-1}}{\cancel{\sqrt{x+1}}}-\sqrt{x-1}=\cancel{\sqrt{x-1}}\cancel{-\sqrt{x-1}}=0$$

f) $\boxed{\dfrac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1}-\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt2}}{\sqrt{3-2\sqrt2}}+\dfrac{10}{\sqrt2}}$

Qui si potrà procedere razionalizzando, e spezzando i radicali doppi.

$$\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt2}}{\sqrt{3-2\sqrt2}}+\frac{10}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1}\cdot\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2-1}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt2+1\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt2-1\right)^2}}+\frac{10}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt2}{\sqrt2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt2-1\right)^2}{2-1}-\frac{\sqrt2+1}{\sqrt2-1}\cdot\frac{\sqrt2+1}{\sqrt2+1}+\frac{\cancel{10}^{5}\sqrt2}{\cancel{2}}=\left(\sqrt2-1\right)^2-\frac{\left(\sqrt2+1\right)^2}{2-1}+5\sqrt2=$$

$$=\cancel{2}\cancel{+1}\underline{-2\sqrt2}\cancel{-2}\cancel{-1}\underline{-2\sqrt2}\ \underline{+5\sqrt2}=\sqrt2$$