LE EQUAZIONI DI 2° GRADO - PRIMA PARTE

1. CHE COS'È E COME SI RISOLVE UN' EQUAZIONE DI 2° GRADO

Si dice "di 2° grado", o "quadratica" (inglese: *quadratic* equation)**, un'equazione della forma**

$$\boxed{\mathbf{ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)}}$$

Casi particolari (equazioni "**incomplete**"):

$b=0$	$\mathbf{ax^2+c=0}$	equazione "**binomia pura**"
$c=0$	$\mathbf{ax^2+bx=0}$	equazione "**binomia spuria**"
$b=c=0$	$\mathbf{ax^2=0}$	equazione "**monomia**"

LE EQUAZIONI DI 2° GRADO INCOMPLETE

❑ BINOMIA PURA

Per risolvere una binomia pura, si isola x^2;
l'equazione potrà, a seconda dei casi, avere due soluzioni opposte, oppure essere impossibile.

$4x^2-9=0$
$4x^2=9$
$x^2=\frac{9}{4}$
$x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}$ → vedi NOTA

$4x^2+9=0$
$4x^2=-9$
$x^2=-\frac{9}{4}$ IMPOSSIBILE

$8x+25=(x+4)^2$
$\cancel{8x}+25=x^2\cancel{+8x}+16$
$-x^2=-9;\ \ x^2=9;\ \ x=\pm3$

NOTA Il DOPPIO SEGNO davanti alla radice è INDISPENSABILE.
Infatti il simbolo $\sqrt{9/4}$ indicherebbe il solo numero $3/2$,
quindi *senza il doppio segno perderemmo una delle due soluzioni.*

❑ BINOMIA SPURIA

Per risolvere una binomia spuria, si scompone in fattori raccogliendo *x*,
e si applica la "legge di annullamento del prodotto":

LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO: $\mathbf{a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0\vee b=0}$

$\Leftarrow$ *Se almeno uno dei fattori è nullo, il prodotto vale 0;*
$\Rightarrow$ *e viceversa: se un prodotto è uguale a 0, allora certamente almeno uno dei fattori è 0.*

In breve: **UN PRODOTTO E' UGUALE A 0 SE E SOLO SE ALMENO UNO DEI FATTORI E' 0**.

$5x^2-3x=0$
$x(5x-3)=0$
$x=0\ \vee\ 5x-3=0$
$5x=3$
$x=\frac{3}{5}$

$5x^2+3x=0$
$x(5x+3)=0$
$x=0\ \vee\ 5x+3=0$
$5x=-3$
$x=-\frac{3}{5}$

$\frac{(2x+1)(2x-1)}{4}=x-\frac{1}{4};\ \ \frac{4x^2-1}{\cancel{4}}=\frac{4x-1}{\cancel{4}}$
$4x^2\cancel{-1}=4x\cancel{-1}$
$\cancel{4}x^2-\cancel{4}x=0$
$x^2-x=0\quad x(x-1)=0$
$x=0\ \vee\ x=1$

Una binomia spuria ha sempre due soluzioni, di cui una nulla.

❑ MONOMIA

Un'equazione monomia ha sempre una sola soluzione, uguale a zero;
si può anche dire che ha "due soluzioni coincidenti, entrambe nulle".

$7x^2=0$
$x^2=0$
$x=0\ \ (x_1=x_2=0)$

Si parla di "**due soluzioni coincidenti** $x_1=x_2=0$"
per il fatto che, essendo $x^2=x\cdot x$,
è come se la soluzione *x* = 0 venisse "trovata due volte";
e anche perché … (vedi NOTA)

$x^2=0$
$x\cdot x=0$
$x=0\ \vee\ x=0$
1° *fatt.* 2° *fatt.*

NOTA: $x^2=4\to x=\pm2;\ \ x^2=\frac{1}{4}\to x=\pm\frac{1}{2};\ \ x^2=\frac{1}{100}\to x=\pm\frac{1}{10};\ \ x^2=\frac{1}{1000000}\to x=\pm\frac{1}{1000};\ \ \ldots$

In $x^2=k$, quanto più la costante non negativa *k* diminuisce, tanto più le due soluzioni si avvicinano l'una all'altra sulla *number line* … Se *k* diventasse 0, si può pensare a due soluzioni che a forza di avvicinarsi hanno finito per sovrapporsi, per coincidere.

ESERCIZI SVOLTI SULLE EQUAZIONI DI 2° GRADO INCOMPLETE

1)
$9(x^2-2)=7$
$9x^2-18=7$
$9x^2=25$
$x^2=\frac{25}{9}$
$x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$

Non c'è x, quindi questa equazione è **binomia pura**: va isolato x^2

2)
$\frac{(x+4)^2}{8}-x=0$
$(x+4)^2-8x=0$
$x^2\cancel{+8x}+16\cancel{-8x}=0$
$x^2+16=0$
$x^2=-16$
IMPOSSIBILE

3)
$(4-x)(x-3)+12=0$
$4x\cancel{-12}-x^2+3x\cancel{+12}=0$
$-x^2+7x=0$
$x^2-7x=0$ (*)

Scompare il termine noto: si ha una **binomia spuria**

(*) ♥ **Quando il coeff. di x^2 è negativo, conviene cambiare tutti i segni!**

$x(x-7)=0$
$x=0 \vee x=7$

4)
$15x^2+4x=3x^2$
$\cancel{12}^{\,3}x^2+\cancel{4}x=0$
$3x^2+x=0$
$x(3x+1)=0$
$x=0 \vee 3x+1=0$
$3x=-1$
$x=-\frac{1}{3}$

In questo caso abbiamo semplificato l'equazione, dato che tutti i coefficienti erano divisibili per uno stesso numero (il 4).

Domanda: sarebbe lecito semplificare pure per x?
… NO, perché così facendo "perderemmo" la soluzione $x=0$.
Se ne riparlerà comunque a pag. 71.

5)
$\frac{4x-3}{3}=\frac{1-x}{x}$
$x(4x-3)=3(1-x)$
$(x\neq 0)$
$4x^2\cancel{-3x}=3\cancel{-3x}$
$x^2=\frac{3}{4}$
$x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

La condizione $x\neq 0$ è dovuta al fatto che moltiplicando per $3x$ se n'è andato il denominatore. E' come se avessimo fatto il den. comune $3x$ in entrambi i membri e poi lo avessimo eliminato.

6)
$\frac{x+8}{x^2-4x}+\frac{x+4}{2x}=\frac{x}{x-4}$ $\qquad \frac{x+8}{x(x-4)}+\frac{x+4}{2x}=\frac{x}{x-4}$

$\frac{2(x+8)+(x-4)(x+4)}{2x\cancel{(x-4)}}=\frac{2x^2}{2x\cancel{(x-4)}}$ $\qquad x\neq 0$, $x\neq 4$

$2x\cancel{+16}+x^2\cancel{-16}=2x^2$
$2x+x^2-2x^2=0$
$-x^2+2x=0$
$x^2-2x=0$ (**Quando il coefficiente di x^2 è negativo, è conveniente cambiare tutti i segni**)
$x(x-2)=0$
$\cancel{x=0}$ NON ACCETTABILE; $\boxed{x=2}$

7)
$\frac{2}{5}x=\frac{3}{2}x^2$
$4x=15x^2$ (NOTA 1)
$15x^2-4x=0$ (NOTA 2)
$x(15x-4)=0$
$x=0 \vee x=4/15$

NOTA 1
Abbiamo moltiplicato per 10 per sbarazzarci dei denominatori

NOTA 2
Qui, allo scopo di far sì che x^2 avesse subito coefficiente positivo, abbiamo portato tutto a 2° membro, e simultaneamente abbiamo scambiato i due membri fra loro

ESERCIZI

8) $x^2-4x=0$ **9)** $x^2-4=0$ **10)** $-4x^2=0$ **11)** $x^2+4=0$ **12)** $x^2+4x=0$
13) $x^2-3=0$ **14)** $x^2+3=0$ **15)** $x^2=3x$ **16)** $4x^2-3x=0$ **17)** $4x^2-3=0$
18) $x^2=\frac{1}{2}x$ **19)** $\frac{3}{4}x=\frac{6}{7}x^2$ **20)** $1-\frac{1}{9}x^2=0$ **21)** $-\frac{1}{9}x^2=0$ **22)** $\frac{1}{3}x^2=-3x$
23) $25-16x^2=0$ **24)** $25+16x^2=0$ **25)** $25x+16x^2=0$ **26)** $3x^2=2$ **27)** $7x=6x^2$
28) $15x^2-30=0$ **29)** $15x^2-30x=0$ **30)** $(x+1)^2=1$ **31)** $(x+1)^2=2x$ **32)** $(x+1)^2=x+1$

SOLUZIONI (l'insieme delle soluzioni è indicato con S)

8) $S=\{0,4\}$ **9)** $S=\{-2,2\}$ **10)** $S=\{0\}$ **11)** $S=\varnothing$ **12)** $S=\{0,-4\}$
13) $S=\{-\sqrt{3},+\sqrt{3}\}$ **14)** $S=\varnothing$ **15)** $S=\{0,3\}$ **16)** $S=\{0,3/4\}$ **17)** $S=\{-\sqrt{3}/2,\sqrt{3}/2\}$
18) $S=\{0,1/2\}$ **19)** $S=\{0,7/8\}$ **20)** $S=\{-3,3\}$ **21)** $S=\{0\}$ **22)** $S=\{0,-9\}$
23) $S=\left\{-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right\}$ **24)** $S=\varnothing$ **25)** $S=\left\{0,-\frac{25}{16}\right\}$ **26)** $S=\left\{-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$ **27)** $S=\left\{0,\frac{7}{6}\right\}$
28) $S=\{-\sqrt{2},+\sqrt{2}\}$ **29)** $S=\{0,2\}$ **30)** $S=\{0,-2\}$ **31)** $S=\varnothing$ **32)** $S=\{0,-1\}$