L'EQUAZIONE DI 2° GRADO COMPLETA

Per risolvere un'equazione completa, si può:

a) scomporre in fattori ed applicare la **legge di annullamento del prodotto**:

$$x^2-13x-30=0$$
$$(x-15)(x+2)=0$$
$$x=15 \vee x=-2$$

b) oppure utilizzare il **"metodo del completamento del quadrato"**:

$$4x^2-12x+3=0$$
$$4x^2-12x+9-6=0$$
$$(2x-3)^2=6$$
$$2x-3=\pm\sqrt{6}\left\langle\begin{array}{l} 2x-3=\sqrt{6};\quad x=\dfrac{3+\sqrt{6}}{2} \\ 2x-3=-\sqrt{6};\; x=\dfrac{3-\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$$

In realtà, questo metodo è rarissimamente utilizzato e lo presentiamo soltanto perché si utilizza per "costruire" la formula risolutiva di cui al successivo punto c)

c) oppure ancora, servirsi della seguente **formula risolutiva**:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$ **FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE** $\boxed{ax^2+bx+c=0}$

Esempio di applicazione della formula:

$$3x^2+x-2=0 \quad (a=3,\; b=1,\; c=-2)$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{-1\pm 5}{6}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-1-5}{6}=-\dfrac{6}{6}=-1\\ \dfrac{-1+5}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

La formula considerata è valida anche per le equazioni incomplete;
per queste ultime, però, sono di gran lunga più veloci i metodi "specifici" visti in precedenza.

Come è stata ricavata la formula risolutiva?

Sostanzialmente, applicando all'equazione "generale" $ax^2+bx+c=0$ il metodo del *completamento del quadrato*.
Si tratta di trovare la maniera di far comparire, a primo membro, un quadrato di binomio della forma $(x+...)^2$.

Ecco i passaggi:

$$ax^2+bx+c=0; \qquad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0; \qquad x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}=0;$$
$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0; \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a};$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}; \qquad x+\frac{b}{2a}\underset{\text{NOTA 1}}{=}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}};$$
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\underset{\text{NOTA 2}}{=}-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

NOTA 1
Questo passaggio vale a condizione che la quantità di cui si vuole estrarre la radice sia ≥ 0. Poiché il denominatore $4a^2$ è positivo in quanto è un quadrato, in definitiva dovrà essere $b^2-4ac\geq 0$ perché il passaggio sia effettuabile.
A dire il vero, dopo l'introduzione dei cosiddetti "numeri complessi", questo vincolo di positività verrà a cadere …

NOTA 2
Nell'estrarre il fattore ci vorrebbero le stanghette di valore assoluto, ma sono rese superflue dalla presenza del doppio segno.

Il "DELTA" E IL NUMERO DI SOLUZIONI

La quantità $\boxed{b^2-4ac}$ **che sta sotto radice quadrata nella formula risolutiva, è chiamata "delta" o "discriminante" e indicata col simbolo** Δ (la lettera greca "*delta*" maiuscola).

Sono possibili tre casi:

- **se** $\Delta>0$, **l'equazione ha due soluzioni distinte**
- **se** $\Delta=0$, **l'equazione ha una sola soluzione (si può anche dire che ha "due soluzioni coincidenti")**
- **se** $\Delta<0$, **l'equazione non ha nessuna soluzione (= è impossibile)**

ESERCIZI SVOLTI SULLE EQUAZIONI DI 2° GRADO COMPLETE

1) $6\left(x^2+1\right)=x(x-13)$ *Svolgo i calcoli...*

$6x^2+6=x^2-13x$ *... e ora, dato che l'equazione è completa, porto tutto a primo membro*

$\underline{6x^2}+6\underline{-x^2}+13x=0$ *... dopodiché, riduco i termini simili scrivendoli nell'ordine corretto*

$5x^2+13x+6=0$ *Posso a questo punto applicare la formula:*

$$x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot5\cdot6}}{2\cdot5}=\frac{-13\pm\sqrt{169-120}}{10}=\frac{-13\pm\sqrt{49}}{10}=\frac{-13\pm7}{10}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-13-7}{10}=-\dfrac{\cancel{20}^{\,2}}{\cancel{10}}=-2\\[2ex]\dfrac{-13+7}{10}=-\dfrac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{10}_{\,5}}=-\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$$

2) $16x^2+25=40x$

$16x^2-40x+25=0$ *Nel calcolo del $\Delta=b^2-4ac$, è indifferente se si prende $-b$ anziché b! $b^2-4ac=(-b)^2-4ac$*

$$x_{1,2}=\frac{40\pm\sqrt{1600-4\cdot16\cdot25}}{32}=\frac{40\pm\sqrt{1600-1600}}{32}=\frac{40\pm0}{32}=\frac{\cancel{40}^{\,5}}{\cancel{32}_{\,4}}=\frac{5}{4}$$

Risoluzione più "brillante":

$16x^2-40x+25=0$

$(4x-5)^2=0$

$x=\dfrac{5}{4}\quad\left(x_1=x_2=\dfrac{5}{4}\right)$

3) $-\dfrac{1}{15}x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{-x^2+5x+3}{\cancel{15}}=\dfrac{10}{\cancel{15}}$

$-x^2+5x-7=0$

$x^2-5x+7=0$ (NOTA)

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-28}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{-3}}{2}$ IMP. $(\Delta<0)$

NOTA:

♥ **quando il coefficiente di x^2 è < 0, è davvero conveniente cambiare tutti i segni!**

4) $12-x=x^2$

$x^2+x-12=0$ **(per avere immediatamente il 1° coefficiente positivo, ho portato tutto a 2° membro, e scambiato i membri fra loro)**

$(x-3)(x+4)=0$ (NOTA)

$x=3\vee x=-4$

Verifica che le soluzioni trovate sono corrette, sostituendole nell'uguaglianza iniziale!

NOTA:

♥ **quando la risoluzione per fattorizzazione è facile, è la via più rapida e comoda**

ESERCIZI (alcuni si prestano, volendo, all'applicazione dalla "formula ridotta" di cui alla pag. seguente)

5) $15x^2-22x+8=0$	**6)** $12x^2+7x-12=0$	**7)** $x^2-4x-5=0$	**8)** $x^2-4x+5=0$
9) $x^2-4x+4=0$	**10)** $x^2+19x+90=0$	**11)** $x^2+8x-2=0$	**12)** $3x(2-3x)=1$
13) $15x=2\left(x^2+11\right)$	**14)** $3\left(x^2+4\right)=7x$	**15)** $13x^2+40x+27=0$	**16)** $(23x-11)(19x-31)=0$
17) $5x^2+4x+1=0$	**18)** $4x^2+4x+1=0$	**19)** $3x^2+4x+1=0$	**20)** $2x^2+4x+1=0$
21) $2-\frac{2}{3}x=\frac{1}{6}x^2$	**22)** $x=\frac{(x+3)(x-3)}{8}$	**23)** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{32}=\frac{9}{4}x^2-\frac{x}{32}$	**24)** $(2x-3)^2=(x-2)^2$

SOLUZIONI (l'insieme delle soluzioni è indicato con S)

5) $S=\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{5}\right\}$	**6)** $S=\left\{-\frac{4}{3},\frac{3}{4}\right\}$	**7)** $S=\{-1,5\}$	**8)** $S=\varnothing$
9) $S=\{2\}$	**10)** $S=\{-10,-9\}$	**11)** $S=\left\{-4-3\sqrt{2},-4+3\sqrt{2}\right\}$	**12)** $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$
13) $S=\left\{2,\frac{11}{2}\right\}$	**14)** $S=\varnothing$	**15)** $S=\left\{-\frac{27}{13},-1\right\}$	**16)** $S=\left\{\frac{11}{23},\frac{31}{19}\right\}$
17) $S=\varnothing$	**18)** $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$	**19)** $S=\left\{-1,-\frac{1}{3}\right\}$	**20)** $S=\left\{\frac{-2-\sqrt{2}}{2},\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right\}$
21) $S=\{-6,2\}$	**22)** $S=\{-1,9\}$	**23)** $S=\left\{\frac{1}{8},\frac{1}{9}\right\}$	**24)** $S=\left\{1,\frac{5}{3}\right\}$