

## 2. EQUAZIONI DI 2° GRADO LETTERALI

1)  $3x^2 - 25kx + 8k^2 = 0$

Si tratta di un'equazione di 2° grado "letterale", o "parametrica".

$x$  è l'incognita, mentre  $k$  è un numero noto, che va a far parte dei coefficienti.

I coefficienti di questa equazione sono dunque:  $a = 3$   $b = -25k$   $c = 8k^2$

$$x_{1,2} = \frac{25k \pm \sqrt{625k^2 - 96k^2}}{6} = \frac{25k \pm \sqrt{529k^2}}{6} = \frac{25k \pm 23k}{6} = \begin{cases} \frac{25k - 23k}{6} = \frac{2k}{6} = \frac{1}{3}k \\ \frac{25k + 23k}{6} = \frac{48k}{6} = 8k \end{cases}$$

(NOTA)

Anche per FATTORIZZAZIONE:

$$3x^2 - 25kx + 8k^2 = 0$$

$$3x^2 - kx - 24kx + 8k^2 = 0$$

$$x(3x - k) - 8k(3x - k) = 0$$

$$(3x - k)(x - 8k) = 0$$

$$3x - k = 0 \quad \vee \quad x - 8k = 0$$

$$x = \frac{k}{3} = \frac{1}{3}k \quad x = 8k$$

NOTA

Per la precisione, sarebbe

$$\sqrt{529k^2} = 23|k|;$$

ma il valore assoluto è reso inutile dalla presenza del doppio segno  $\pm$ .

Si deve comunque osservare che in questo modo, ogniqualvolta il parametro assumesse un valore NEGATIVO, la soluzione che abbiamo scritto per prima NON risulterebbe più la minore tra le due.

2)  $(x - a)^2 + a(a + 2b) = (a + b)^2$  Qui evidentemente i parametri " $a$ " e " $b$ " dell'esercizio non vanno confusi con le lettere " $a$ " e " $b$ " della teoria!

$$x^2 - 2ax + \cancel{a^2} + a^2 + \cancel{2ab} = \cancel{a^2} + \cancel{2ab} + b^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

$$x^2 - 2ax + (a^2 - b^2) = 0 \quad 1^\circ \text{coeff.} = 1; \quad 2^\circ \text{coeff.} = -2a; \quad 3^\circ \text{coeff.} = a^2 - b^2$$

$$x_{1,2} = \text{con la RIDOTTA} \quad a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)} = a \pm \sqrt{\cancel{a^2} - \cancel{a^2} + b^2} = a \pm b = \begin{cases} \frac{a-b}{a+b} \\ \frac{a+b}{a+b} \end{cases}$$

NOTA

♥ In un'equazione di 2° grado letterale, in generale occorre

3)  $x^2 + 3(x + 2m^2) + 2 = m(5x + 7)$   
(NOTA)

$$x^2 + 3x + 6m^2 + 2 = 5mx + 7m$$

$$x^2 + 3x - 5mx + 6m^2 - 7m + 2 = 0$$

$$x^2 + (3 - 5m)x + (6m^2 - 7m + 2) = 0$$

1) svolgere i calcoli

2) portare tutto a 1° membro

3) ordinare (termini con  $x^2$ ; termini con  $x$ ; costanti)

4) raccogliere  $x^2$

fra tutti i termini che contengono  $x^2$   
(in questo caso, però, ce n'è uno solo)

5) raccogliere  $x$

fra tutti i termini che contengono  $x$

6) ... e a questo punto applicare la formula.

$$x_{1,2} = \frac{-3 + 5m \pm \sqrt{(3 - 5m)^2 - 4(6m^2 - 7m + 2)}}{2} = \frac{-3 + 5m \pm \sqrt{9 - 30m + 25m^2 - 24m^2 + 28m - 8}}{2} =$$

$$= \frac{-3 + 5m \pm \sqrt{m^2 - 2m + 1}}{2} = \frac{-3 + 5m \pm \sqrt{(m-1)^2}}{2} = \frac{-3 + 5m \pm (m-1)}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-3 + 5m - m + 1}{2} = \frac{4m - 2}{2} = \frac{\cancel{2}(2m - 1)}{\cancel{2}} = 2m - 1 \\ \frac{-3 + 5m + m - 1}{2} = \frac{6m - 4}{2} = \frac{\cancel{2}(3m - 2)}{\cancel{2}} = 3m - 2 \end{cases}$$

## EQUAZIONI ... CON LA "CODA"



4)

$$(x+1)[a(x-2)+3]+2a=2x(x+2)$$

$$(x+1)[ax-2a+3]+2a=2x^2+4x \quad ax^2-\cancel{2ax}+\underline{3x}+\underline{ax}-\cancel{2a}+3+\cancel{2a}=2x^2+\underline{4x} \quad ax^2-2x^2-ax-x+3=0$$

$$(a-2)x^2-(a+1)x+3=0$$

$$x_{1,2} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 - 12(a-2)}}{2(a-2)} \quad \text{NOTA: nel calcolo del } \Delta = b^2 - 4ac, \text{ per via dell'esponente 2 } \\ \text{è indifferente usare } -b \text{ anziché } b! \quad b^2 - 4ac = (-b)^2 - 4ac$$

L'applicazione della formula comporta in questo caso la divisione per la quantità  $2(a-2)$ .

Ma una divisione è effettuabile soltanto a patto che il numero per cui si intende dividere sia diverso da 0.

Pertanto, la catena  $x_{1,2} = \dots$  vale a condizione che sia  $2(a-2) \neq 0$ , ossia  $a \neq 2$ .

Il caso particolare  $a=2$  andrà valutato a parte; ce ne occuperemo in coda all'esercizio.

$$x_{1,2} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 - 12(a-2)}}{2(a-2)} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1 - 12a + 24}}{2(a-2)} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{a^2 - 10a + 25}}{2(a-2)} = \\ = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a-5)^2}}{2(a-2)} = \frac{(a+1) \pm (a-5)}{2(a-2)} = \dots \quad x_1 = \frac{3}{a-2}, \quad x_2 = 1$$

**CODA:** COSA ACCADE NEL CASO  $a=2$  PROVVISORIAMENTE LASCIATO DA PARTE ?

Con  $a=2$  non è possibile applicare la formula (si otterrebbe infatti una divisione per 0, che non ha senso!).  
Abbandoniamo dunque, per quanto riguarda il caso  $a=2$ , l'uso della formula e chiediamoci direttamente cosa diventa l'equazione, quando al parametro  $a$  si attribuisce il valore 2. Essa diventa

$$\cancel{(2-2)}x^2 - (2+1)x + 3 = 0; \quad -3x + 3 = 0; \quad -3x = -3; \quad x = 1$$

Abbiamo quindi scoperto che nel caso particolare  $a=2$  l'equazione si abbassa di grado (non è più di secondo grado, ma di primo) e ammette una sola soluzione:  $x=1$ .

Ricapitolando, l'equazione data possiede in generale due soluzioni, e precisamente  $x_1 = \frac{3}{a-2}$ ;  $x_2 = 1$   
e soltanto nel caso particolare  $a=2$  si abbassa di grado,

"perdendo" una soluzione e "conservando" come  $\boxed{\text{unica soluzione } x=1}$ .

5)

$$\frac{x}{kx+k} + \frac{k}{x^2+3x+2} = 2 \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{x(x+2)+k^2}{k(x+1)\cancel{(x+2)}} = \frac{2k(x+1)}{k(x+1)\cancel{(x+2)}} \quad \boxed{k \neq 0} \quad \text{COND. PRELIMINARE: questa equazione NON} \\ \text{ha significato con } k=0! \\ \boxed{x \neq -1, x \neq -2} \quad \text{CONDIZIONI DI ACCETTABILITÀ'}$$

$$x^2 + 2x + k^2 = 2kx + 2k; \quad x^2 + 2x - 2kx + k^2 - 2k = 0$$

$$x^2 - 2(k-1)x + k^2 - 2k = 0$$

$$x_{1,2} = k-1 \pm \sqrt{(k-1)^2 - (k^2 - 2k)} = k-1 \pm \sqrt{\cancel{k^2} - 2k + 1 - \cancel{k^2} + 2k} = k-1 \pm 1 = \begin{cases} \boxed{k-2} & (x_1) \\ \boxed{k} & (x_2) \end{cases}$$

**CODA** (ESISTONO VALORI DEL PARAMETRO PER CUI UNA SOLUZIONE RISULTA NON ACCETTABILE, IN QUANTO UGUALE A  $-1$  OPPURE A  $-2$  ?)

$$x_1: k-2 = -1 \text{ con } \boxed{k=1}; \quad k-2 = -2 \text{ con } k=0 \text{ (però con } k=0 \text{ l'eq. perde significato!);}$$

$$x_2: k = -1, \text{ banalmente, con } \boxed{k=-1}; \quad k = -2, \text{ banalmente, con } \boxed{k=-2}$$

In definitiva, i valori  $k=0$ ,  $k=1$ ,  $k=-1$ ,  $k=-2$  sono notevoli in quanto:

con  $k=0$  l'equazione è priva di significato

con  $k=1$  non è accettabile la soluzione  $k-2$ , mentre l'altra ( $k$ ) è accettabile e vale 1

con  $k=-1$  non è accettabile la soluzione  $k$ , mentre l'altra ( $k-2$ ) è accettabile e vale  $-3$

con  $k=-2$  non è accettabile la soluzione  $k$ , mentre l'altra ( $k-2$ ) è accettabile e vale  $-4$

**ESERCIZIO A**

Riprendi dal principio l'es. 4 e sostituisci  $a=2$  nell'eq. iniziale, poi risolvi.

**ESERCIZIO B**

Fai lo stesso nell'esempio 5, con  $k=-2$ .

**ESERCIZIO C**

Verifica che per l'equazione

$$\frac{mx(mx-2)}{2x-1} = 2x+1$$

si hanno 4 casi nei quali la soluzione è unica:

$$m=2 \quad (x=1/4), \\ m=-2 \quad (x=-1/4), \\ m=0 \quad (x=-1/2), \\ m=4 \quad (x=1/6).$$