

3. PROBLEMI DI 2° GRADO

- *Trovare due numeri tali che la loro somma sia 20, e la somma dei loro quadrati sia 328.*

I numeri richiesti si possono indicare con x e $20 - x$ rispettivamente.

L'equazione risolvente è

$$x^2 + (20 - x)^2 = 328$$

$$x^2 + 400 - 40x + x^2 = 328$$

$$2x^2 - 40x + 72 = 0$$

$$x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 36} = 10 \pm \sqrt{64} = 10 \pm 8 = \begin{cases} 2 \\ 18 \end{cases}$$

Se $x = 2$, allora $20 - x = 18$; e se $x = 18$, allora $20 - x = 2$.

I numeri cercati sono perciò $\boxed{2 \text{ e } 18}$ (non ha importanza, è evidente, l'ordine nel quale li si considera).

- *Sia Anna che Bruno partono dalla stessa località per raggiungerne un'altra distante 600 km, e guidano a velocità costante; tuttavia Anna, che è più prudente, parte un'ora in anticipo rispetto a Bruno, e viaggia ad una velocità di 20 km/h inferiore. Di quanti km/h sono le loro due velocità, se giungono a destinazione simultaneamente?*

Nel moto a velocità costante, detti s lo spazio percorso, t il tempo impiegato, v la velocità, valgono le formule

$$\boxed{v = \frac{s}{t} \quad s = v \cdot t \quad t = \frac{s}{v}}$$

Allora, se indichiamo con v la velocità di Anna (in pratica, v è la nostra " x "), e con $v + 20$ la velocità di Bruno, avremo

$$\frac{600}{v} = \frac{600}{v+20} + 1 \quad (\text{Anna ci mette 1 ora in più ...})$$

NOTA:

$$\frac{600(v+20)}{\cancel{v(v+20)}} = \frac{600v + v(v+20)}{\cancel{v(v+20)}} \quad \begin{array}{l} \text{le condizioni di non annullamento del denominatore} \\ \text{sono superflue, perché in ogni caso} \\ \text{se alla fine trovassimo } v = 0 \text{ oppure } v < 0 \\ \text{un tale valore sarebbe ovviamente da scartare} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \cancel{600v} + 12000 &= \cancel{600v} + v^2 + 20v \\ v^2 + 20v - 12000 &= 0 \end{aligned}$$

$$v_{1,2} = -10 \pm \sqrt{100 + 12000} = -10 \pm \sqrt{12100} = -10 \pm 110 = \begin{cases} \cancel{\geq 120} & \text{non ha senso,} \\ & \text{in questo contesto,} \\ \boxed{100} & \text{una velocità negativa!} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Anna}}$ viaggia perciò a $\boxed{100 \text{ km/h}}$,

$\boxed{\text{Bruno}}$ a $100 + 20 = \boxed{120 \text{ km/h}}$.

Facciamo una verifica:

Anna, viaggiando a 100 km/h, quanto ci mette a fare 600 km?

$$\frac{600}{100} = 6 \text{ ore.}$$

E Bruno, viaggiando a 120 km/h, quanto ci mette a fare 600 km?

$$\frac{600}{120} = 5 \text{ ore, cioè proprio 1 ora in meno, OK.}$$

- La differenza fra due numeri è 3, e il loro prodotto è 550. Quali sono i due numeri?

Detti x e $x+3$ i numeri richiesti, sarà

$$x(x+3) = 550; \quad x^2 + 3x = 550; \quad x^2 + 3x - 550 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 2200}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{2209}}{2} = \frac{-3 \pm 47}{2} = \begin{cases} -25 \\ 22 \end{cases}$$

Se $x = -25$, allora $x+3 = -25+3 = -22$; e se $x = 22$, allora $x+3 = 25$.

I numeri cercati possono perciò essere $\boxed{-25 \text{ e } -22}$, oppure $\boxed{22 \text{ e } 25}$.

- Quale numero è inferiore di 12 unità al suo quadrato?

Indicato con x il numero cercato, avremo

$$x = x^2 - 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \text{ (OSSERVAZIONE)}$$

$$(x-4)(x+3) = 0; \quad \boxed{x = 4 \vee x = -3}$$

Anche questo problema, dunque, ha DUE soluzioni.

Tanto il numero 4 che il numero -3 hanno la proprietà di essere inferiori di 12 unità al proprio quadrato:

$$4^2 = 16 \text{ e } 16 - 12 = 4;$$

$$\text{ma anche } (-3)^2 = 9 \text{ e } 9 - 12 = -3.$$

OSSERVAZIONE

Capita frequentemente di notare che, qualora si portasse tutto a PRIMO MEMBRO, si otterrebbe un COEFFICIENTE DI x^2 NEGATIVO.

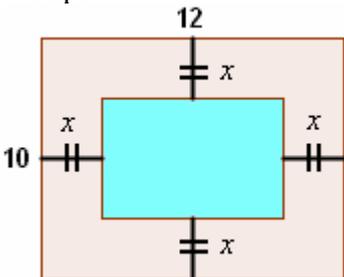
In questi casi, piuttosto che portare a primo membro e poi cambiare tutti i segni, conviene immaginare di

PORTARE TUTTO A SECONDO MEMBRO e simultaneamente

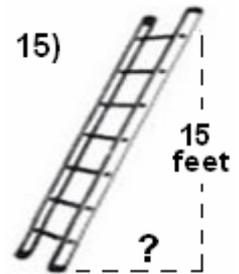
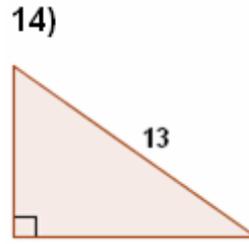
SCRIVERE DA DESTRA A SINISTRA, SCAMBIANDO I DUE MEMBRI FRA LORO.

In questo modo, si fa un passaggio in meno!

ESERCIZI (PROBLEMI DI SECONDO GRADO) - *Clicca sulla freccia per la correzione*

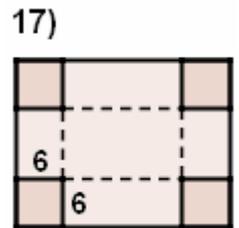
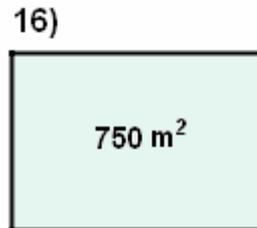
- Due numeri positivi, reciproci fra loro, differiscono di $7/12$. Quali sono?
- Trova due numeri naturali pari consecutivi, tali che la somma dei loro quadrati sia 1060.
- I termini di una frazione minore di 1 sono due interi positivi consecutivi. Se si aggiunge 3 sia al numeratore che al denominatore, il valore della frazione aumenta di $1/6$. Di che frazione si tratta?
- Trova due numeri sapendo che differiscono di 10 unità e che se si aggiunge alla loro somma il loro prodotto, si ottiene come risultato 815.
- In una sala cinematografica, originariamente il numero delle file era uguale al numero delle poltrone presenti in ciascuna fila. Per via di una ristrutturazione, si è poi dovuto ridurre di 4 il numero delle poltrone in ogni fila, ma in compenso si è aumentato di 4 il numero delle file. In tal modo il locale ha perso $1/16$ della sua capienza. Quanti spettatori poteva ospitare il cinema prima della ristrutturazione? E dopo?
- Un cortile ha forma rettangolare, coi lati di 12 metri e 10 metri. Al centro del cortile è stata ricavata una vasca, anch'essa rettangolare (vedi figura), in modo che tutti i bordi della vasca hanno ugual distanza x dal contorno del cortile. Determinare questa distanza costante, sapendo che l'area della vasca è di 48 metri quadrati.
 
- L'autobus per la gita scolastica di una classe ha un costo globale di 600 euro. Purtroppo al momento della gita 5 allievi devono rinunciare perché a letto con l'influenza e i restanti decidono di tassarsi per non far pagare gli ammalati, spendendo in questo modo ciascuno 10 euro in più del previsto. Quanti sono gli allievi che vanno in gita? ⇨
- Se una distanza di 225 km viene percorsa "andata e ritorno", con una velocità al ritorno maggiore di 10 km/h rispetto all'andata, e il tempo totale del viaggio è di 4 ore e $3/4$, quali sono le due velocità? ⇨
- L'età di un padre 2 anni fa era uguale al quadrato dell'età del figlio, mentre fra 2 anni il padre si ritroverà ad avere il quadruplo dell'età del figlio. Quanti anni hanno ora padre e figlio?
- a) Se il lato di un quadrato aumentasse di 5 cm, l'area del quadrato raddoppierebbe. Quanto vale il lato?
b) Se il raggio di un cerchio aumentasse di 5 cm, l'area del cerchio raddoppierebbe. Quanto vale il raggio?
- Tanti anni fa, quando ero al massimo della forma, nella corsa di resistenza riuscivo a mantenere un'andatura di ben 4 km/h più veloce, e ci mettevo 30 minuti in meno ad ultimare il mio tragitto di allenamento di 24 km. A quanti km all'ora sto correndo? ⇨

- 12) Due rubinetti A e B permettono, se aperti simultaneamente, di riempire l'intera vasca in 2 ore. Il rubinetto A, se aperto da solo, riempirebbe la vasca in x ore, mentre il rubinetto B, se aperto da solo, ci metterebbe 3 ore in più del rubinetto A. Quanto vale x ? ⇨
- 13) Il motore di un barcone gli farebbe assumere, in assenza di corrente, una velocità di 2 m/s. Se il barcone naviga su di un fiume nel quale la corrente ha una velocità di x metri al secondo, prima nella direzione della corrente poi all'incontrario, e ci mette in totale 2 ore e 8 minuti a percorrere "andata e ritorno" un tratto di fiume lungo 7 km e 200 metri, quanto vale x ? ⇨
- 14) Un orto ha forma di triangolo rettangolo, e il suo contorno ha una lunghezza totale di 30 metri. Il lato più lungo misura metri 13. Di quanti metri quadrati è l'area dell'orto? (Pitagora per l'equazione risolvente!) ⇨



- 15) Da <http://academic.cuesta.edu>
A ladder is resting against a wall. The top of the ladder touches the wall at a height of 15 feet. Find the distance from the wall to the bottom of the ladder if the length of the ladder is one foot more than twice its distance from the wall.

- 16) Da www.vitutor.com
To fence a rectangular farm of 750 m^2 , 110 m of fence has been used. Calculate the dimensions of the farm.



- 17) A rectangular piece of cardboard is 4 cm longer than wide. A box of 840 cm^3 is constructed by using this piece of cardboard. A square of 6 cm is cut out in every corner and the rims are folded upwards to create the box. Find the dimensions of the box.

- 18) Da <http://www1.broward.edu>
Two cars leave an intersection. One car travels north; the other travels east. When the car traveling north had gone 24 miles, the distance between the cars was four miles more than three times the distance traveled by the car heading east. Find the distance between the cars at that time.

Problemi geometrici con eq. risolvente di 2° grado alle pagg. 246 ... 251

I quattro problemi che seguono sono tratti da "Elementi di Algebra" (pubblicato intorno all'anno 1765), del grande Leonhard Euler (Euléro).

- 19) Determina due numeri, di segno qualsiasi, il cui rapporto sia 2, e tali che se si addiziona la loro somma al loro prodotto, il risultato dell'operazione sia 90.
- 20) Una persona acquistò diverse pezze di tessuto per 180 corone; e se avesse ottenuto per la stessa somma di denaro 3 pezze in più, vorrebbe dire che ogni pezza gli sarebbe costata 3 corone in meno. Quante pezze comprò? E a che prezzo?
- 21) Psst ... Conosci la formula di Gauss per la somma dei primi n interi positivi? $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Un tale compra un certo numero di pezze di tessuto: per la prima paga 2 corone, per la seconda 4, per la terza 6, e allo stesso modo sempre 2 corone in più per ciascuna delle pezze successive; inoltre, tutte le pezze insieme gli costano 110 corone: quante sono queste pezze? E se la spesa fosse di 2260512 corone?
- 22) Due ragazze hanno portato 100 uova al mercato; una aveva più uova dell'altra, e tuttavia entrambe hanno ricavato la stessa somma dalla vendita. La prima dice alla seconda: "Se avessi avuto io il numero di uova che avevi tu, avrei guadagnato 15 penny". E l'altra replica: "Se invece avessi avuto io le tue uova, il mio guadagno sarebbe stato di 6 penny e $\frac{2}{3}$ di penny". Con quante uova è andata al mercato ciascuna delle due?

SOLUZIONI

- 1) $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$ 2) 22 e 24 3) $\frac{2}{3}$ 4) -35 e -25 oppure 23 e 33 5) 256, 240 6) 2 m
7) Gli allievi in gita sono 15, la classe in totale ha 20 allievi 8) 90 e 100 km/h 9) 8 anni, 38 anni
10) Tanto il lato del quadrato quanto il raggio del cerchio misurano $5(1+\sqrt{2})$ cm 11) A 12 km/h
12) $x = 3$ ore (rubinetto B: 6 ore) 13) $x = 0,5$ m/s = 1,8 km/h 14) 30 m^2 15) 8 feet 16) 30 m, 25 m
17) 14, 10, 6 cm 18) 25 miles 19) 12 e 6 oppure -15 e $-15/2$ 20) Comprò 12 pezze, a 15 corone l'una
21) 10; 1503 22) 40 uova la prima, che le ha vendute a $\frac{1}{4}$ di penny, 60 la seconda ($\frac{1}{6}$ di penny per uovo)