NUMERI COMPLESSI

1. "IMPOSSIBILE"? UAH, UAH!

Com'è noto, la **radice quadrata** è **l'operazione inversa** rispetto all'**elevamento al quadrato**; vale a dire, la radice quadrata di un numero *x* è quel numero *y* il quale, se elevato al quadrato, dà come risultato *x* (con la convenzione che, in caso di risultato "doppio", si prende solo quello positivo: $\sqrt{9}=3$ e NON $\sqrt{9}=\pm 3$).

Ora, poiché elevando un numero al quadrato si ottiene sempre risultato positivo (o, al più, nullo), ne deriva che **l'estrazione di radice quadrata di un numero negativo è impossibile**.

In particolare, è dunque impossibile l'operazione

$$\boxed{\sqrt{-1}}\,.$$

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali relativi (quelli che stanno sulla "number line")

$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali relativi (quelli che sono esprimibili sotto forma di frazione, ossia di rapporto fra due interi). Sono razionali tutti gli interi ($5=5/1$) e tutti quei numeri con la virgola che sono o finiti, o periodici.

$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri irrazionali relativi. Sono irrazionali tutti i numeri con la virgola che sono illimitati non periodici.

$\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi relativi (è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, che a sua volta è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$)

D'altra parte, se provi a ripercorrere, per un istante, la tua "carriera" scolastica, ti verranno in mente **diversi casi di operazioni che in un primo tempo ritenevi impossibili, e che invece poi, con l'ampliarsi delle tue conoscenze, sono risultate possibili.**

a) Ad esempio:
quando frequentavi le elementari,
e non avevi ancora sentito parlare né di frazioni, né di numeri con la virgola,
ma ti limitavi a lavorare esclusivamente coi numeri interi,
di fronte all'operazione $23:4$ (divisione, ossia operazione inversa della moltiplicazione) avresti detto:
è un'operazione impossibile, se si cerca il risultato esatto!
Infatti non esiste alcun numero intero il quale, moltiplicato per 4, dia come risultato 23.

Se la stessa operazione 23:4 ti fosse stata, invece, proposta ai tempi della scuola media, avresti tratto una conclusione differente, affermando che l'operazione 23:4 dà come risultato la frazione $\dfrac{23}{4}$ (o, il che è lo stesso, il numero $5{,}75$).

Ricapitolando e schematizzando:
l'operazione 23:4 coinvolge due numeri interi,
ma nell'ambito degli interi essa è priva di risultato (= impossibile).
Nell'insieme, più vasto, dei numeri razionali (di cui gli interi sono casi particolari),
l'operazione diventa invece possibile ed ha come risultato il numero 23/4 (= 5,75).

b) Anche per un'operazione come
$5-7$
accade qualcosa di simile.
Il bambino delle scuole elementari lavora esclusivamente coi numeri assoluti (= senza segno);
egli non ha mai sentito parlare di numeri positivi e negativi.
Se, dunque, gli viene proposta l'operazione $5-7$, egli dirà che è impossibile.
Quando, alla fine della scuola media, lo stesso alunno avrà ampliato l'insieme dei numeri assoluti, affiancando ad essi i numeri negativi, e pervenendo così all'insieme più ampio dei numeri relativi, dirà invece che l'operazione è possibile e dà come risultato -2.

c) E ancora: abbiamo dimostrato (pagg. 10-11) che non esiste alcun numero razionale che elevato al quadrato dia come risultato 2. Pertanto,
l'operazione $\sqrt{2}$ è impossibile nell'ambito dei numeri razionali;
diventa possibile solo uscendo da tale insieme.
Se l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali viene ampliato, con l'aggiunta degli irrazionali,
così da pervenire all'insieme più vasto $\mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali),
allora all'operazione $\sqrt{2}$ si potrà attribuire un risultato.
Bisognerà però, per forza, USCIRE da $\mathbb{Q}$.

2. NUMERI IMMAGINARI, NUMERI COMPLESSI

RIASSUNTO

- La divisione fra i due interi 23 e 4 (cioè, l'operazione $23:4$) è impossibile (a meno che non ci si accontenti di un risultato approssimato) nell'insieme degli interi. Tuttavia, USCENDO da tale insieme si riesce a trovarne il risultato: è la frazione $23/4$, che appartiene NON all'insieme degli interi, ma al suo AMPLIAMENTO $\mathbb{Q}$.
- La differenza fra i due numeri assoluti 5 e 7 presi in quest'ordine (vale a dire, l'operazione $5-7$) è impossibile nell'insieme dei numeri assoluti. Diventa però possibile se si ESCE da tale insieme, passando all'insieme, PIU' AMPIO, dei numeri relativi. In esso si trova finalmente il risultato: -2.
- La radice quadrata del numero razionale 2 (ossia, $\sqrt{2}$) è un operazione impossibile in $\mathbb{Q}$. Essa diventa possibile solo a patto di USCIRE da $\mathbb{Q}$. Il risultato di tale operazione non appartiene a $\mathbb{Q}$ ma al suo AMPLIAMENTO $\mathbb{R}$.

In tutti e tre i casi, il risultato di una certa operazione fra numeri di un dato insieme è stato trovato uscendo dall'insieme considerato e passando ad un insieme più vasto; ampliando, insomma, la famiglia dei numeri con cui si lavorava.

Per l'operazione $\boxed{\sqrt{-1}}$ in Algebra si percorre una strada analoga.

Tale operazione coinvolge un numero reale, ma non ha risultato nell'insieme $\mathbb{R}$.
Allora **AMPLIEREMO** l'insieme $\mathbb{R}$,
passando ad un insieme più vasto nel quale l'operazione sia possibile.

Procediamo.
Indicheremo col simbolo $\boxed{i}$ il risultato dell'operazione $\sqrt{-1}$.

Il numero i verrà detto "unità immaginaria". La sua proprietà fondamentale sarà dunque $\boxed{i^2=-1}$.
i non appartiene, non può appartenere, all'insieme $\mathbb{R}$;
i è invece il "capostipite" di una nuova famiglia di numeri, **ESTERNI AL "RECINTO"** $\mathbb{R}$.

Moltiplicando l'unità immaginaria i per i numeri reali si ottengono nuove entità numeriche, che vengono dette **NUMERI IMMAGINARI**.

Esempi: $3i \quad -5i \quad \frac{2}{9}i \quad \sqrt{3}\,i$

Sottolineiamo subito che le operazioni con queste nuove entità numeriche vengono definite in modo tale che restino valide tutte le proprietà di cui le analoghe operazioni godono in $\mathbb{R}$.
Se noi ora prendiamo, ad esempio, il numero $3i$ e lo eleviamo al quadrato, avremo

$$(3i)^2=3^2\cdot i^2=9\cdot(-1)=-9$$

Quindi il numero $3i$ risolve il problema di trovare un risultato
per la radice quadrata del numero negativo -9!
Anzi, è pure

$$(-3i)^2=(-3)^2\cdot i^2=9\cdot(-1)=-9$$

e quindi, nell'insieme dei numeri immaginari,
il numero negativo -9 si trova ad avere ben DUE radici quadrate:
il numero immaginario $3i$ e il numero immaginario $-3i$.
A ben guardare, la stessa operazione dalla quale avevamo preso le mosse, ossia $\sqrt{-1}$,
si ritrova ad avere DUE risultati: i e $-1\cdot i$ (che si abbrevia in $-i$):

$$\sqrt{-1}=\pm i \quad \text{(NOTA)}$$

NOTA: *quando il simbolo di radice è utilizzato con l'intesa di poter uscire dal campo dei numeri reali per trovare il risultato dell'operazione, allora non si "scarta" più nessun risultato, e si parla di "radici" (al plurale) del numero considerato.*

Generalizzando,
i numeri immaginari sono caratterizzati dal fatto che il loro quadrato è sempre un numero reale <0;
essi risolvono perciò il problema di estrarre la radice quadrata di un numero reale negativo qualsiasi:

$$\sqrt{-25}=\sqrt{-1\cdot 25}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{25}=\pm i\cdot 5=\pm 5i$$

La somma indicata di un numero reale con un numero immaginario
prende il nome di NUMERO COMPLESSO.

Esempi di numeri complessi sono: $3+7i$ $\quad -\frac{1}{2}+\sqrt{2}\cdot i$ $\quad \frac{3}{4}-\frac{2}{5}i$ $\quad 12{,}3-7{,}\overline{2}i$

RICAPITOLIAMO

Si dice **UNITA' IMMAGINARIA** un numero, indicato con il simbolo $\boxed{i}$,
il quale elevato al quadrato dà come risultato -1: $\boldsymbol{i^2=-1}$.

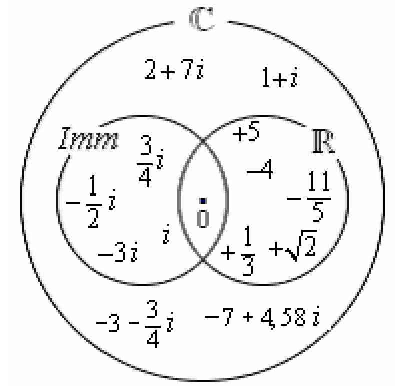
Si dicono **NUMERI IMMAGINARI**
i numeri ottenuti moltiplicando l'unità immaginaria i per un numero reale.

Si dicono **NUMERI COMPLESSI**
i numeri che sono una somma indicata di un numero reale con un numero immaginario,
ossia i numeri della forma $\boxed{\boldsymbol{a+bi}}$ (con a, b numeri reali; i unità immaginaria)

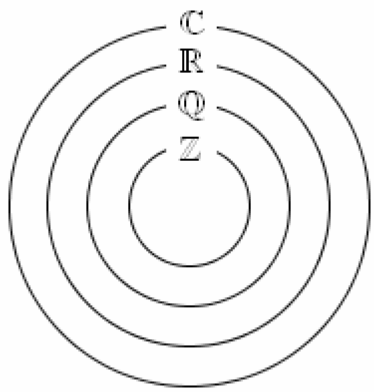
- ***a*** viene detta "**parte reale**";
- ***bi*** viene detta "**parte immaginaria**",
- ***b*** è chiamato il "**coefficiente dell'immaginario**".

L'insieme dei numeri complessi viene indicato col simbolo $\boxed{\mathbb{C}}$.

Per $a=0$, l'espressione $a+bi$ diventa semplicemente bi;
dunque possiamo considerare i numeri immaginari come casi particolari di numeri complessi.
Ma per $b=0$, l'espressione $a+bi$ diventa semplicemente a;
quindi, anche i numeri reali possono essere visti come particolari numeri complessi,
e in definitiva, dal punto di vista insiemistico, la situazione è la seguente:



Il numero 0 può essere anche scritto come $0\cdot i$, quindi è l'unico numero reale ed immaginario al tempo stesso.



$\mathbb{C}=\{complessi\}$
$\mathbb{R}=\{reali\}$
$\mathbb{Q}=\{razionali\}$
$\mathbb{Z}=\{interi\ relativi\}$

Abbiamo anticipato che **le operazioni coi numeri complessi vengono definite in modo tale che si conservino tutte le proprietà valide in campo reale**.
Di conseguenza, per svolgere una qualunque operazione coi numeri complessi,
basterà basarsi sulle ordinarie regole del calcolo algebrico e letterale, applicandole nel modo consueto (tutto ciò che occorre è semplicemente di ricordarsi che $i^2=-1$). Ad esempio:

$$(3+2i)+(-5+i)=3+2i-5+i=-2+3i$$

$$(3+2i)-(-5+i)=3+2i+5-i=8+i$$

$$(3+2i)(-5+i)=-15+3i-10i+2i^2=-15-7i+2\cdot(-1)=-15-7i-2=-17-7i$$

$$(-5+i)^2=25-10i+i^2=25-10i-1=24-10i$$

Per quanto riguarda la divisione, essa può essere effettuata scrivendo la frazione corrispondente, e moltiplicandone i termini per un medesimo numero (proprietà invariantiva delle frazioni), scelto in modo tale da far sì che, dopo l'operazione, il denominatore "perda" l'unità immaginaria e diventi quindi un numero reale:

$$(2-i):(3+2i)=\frac{2-i}{3+2i}=\frac{2-i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{6-4i-3i+2i^2}{9-4i^2}=\frac{6-7i-2}{9+4}=\frac{4-7i}{13}=\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i$$