4. A COSA SERVONO I NUMERI COMPLESSI

Adesso che abbiamo ben chiarito in quali ambiti i numeri complessi sono inutilizzabili, andiamo a vedere invece dove ha senso (e utilità) impiegarli.

a) Impiego dei numeri complessi in matematica pura

In Matematica pura, trattare determinate questioni in campo complesso può essere estremamente conveniente, comodo, ed illuminante, nonché affascinante. A livello preuniversitario non è facile dare un'idea appropriata di questo fatto (bisognerebbe infatti poter parlare, tanto per fare un esempio, di equazioni differenziali).
Qui ci limitiamo a citare un risultato di estremo interesse, chiamato **Teorema Fondamentale dell'Algebra,** la cui prima dimostrazione è attribuita al tedesco Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855) e datata **1799**.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA (T. F. A.), ENUNCIATO I
Un'equazione algebrica (NOTA 1) **di grado n** (NOTA 2) **a coefficienti reali o complessi ammette sempre almeno una soluzione nell'insieme dei numeri complessi.**

NOTA 1 - Si dice "**equazione algebrica**" un'equazione della forma $\mathrm{P}(x)=0$,
con $\mathrm{P}(x)$ *polinomio* a coefficienti in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$. Equazione *algebrica* = equazione *polinomiale*.

NOTA 2 - Si dice "**grado**" di un'equazione algebrica $\mathrm{P}(x)=0$, il grado del polinomio $\mathrm{P}(x)$.

Affermare che α è soluzione dell'equazione $P(x)=0$ equivale ad affermare che $P(\alpha)=0$.
Ma se $P(\alpha)=0$, il Teorema del Resto (Volume 1, pag. 116),
il quale si estende anche al caso in cui i coefficienti, e i valori che la variabile può assumere, siano complessi,
assicura che il resto della divisione $P(x):(x-\alpha)$ è zero
e quindi garantisce che il polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $(x-\alpha)$
ovvero scomponibile in un prodotto $P(x)=(x-\alpha)\cdot P_1(x)$
dove $P_1(x)$ è un nuovo polinomio, il cui grado è inferiore di un'unità rispetto al grado di $P(x)$.
Applicando ora il Teorema Fondamentale dell'Algebra al polinomio $P_1(x)$,
avremo che esiste certamente, nell'insieme dei numeri complessi, un β tale che $P_1(\beta)=0$.
Ma allora il polinomio $P_1(x)$ potrà essere scomposto in $P_1(x)=(x-\beta)\cdot P_2(x)$
dove $P_2(x)$ è un polinomio il cui grado è inferiore di un'unità rispetto al grado di $P_1(x)$.
Se ne trae che per il polinomio di partenza si avrà la scomposizione $P(x)=(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot P_2(x)$.

E' evidente la possibilità di procedere allo stesso modo fino a scomporre $P(x)$ in fattori tutti di 1° grado.

In definitiva, il T. F. A. garantisce che ogni polinomio di grado n

$$\mathbf{P}(x)=\mathbf{a_0}x^{\mathbf{n}}+\mathbf{a_1}x^{\mathbf{n-1}}+\ldots+\mathbf{a_{n-1}}x+\mathbf{a_n}\quad(\mathbf{a_i}\in\mathbb{C}),$$

a coefficienti complessi o in particolare reali, ammette una scomposizione della forma:

$$\mathbf{P}(x)=\mathbf{a_0}(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-x_n)\quad(x_i\in\mathbb{C})$$

(anche se non indica in alcun modo se e come si possa *effettivamente* realizzare, nella pratica, tale scomposizione).

Ma da qui, tenendo conto della "legge di annullamento del prodotto"
(un prodotto di numeri complessi o in particolare reali è uguale a zero se e solo se
è uguale a zero almeno uno dei fattori), si trae una conseguenza molto elegante e rilevante, ossia:

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA (T. F. A.), ENUNCIATO II
Un'equazione algebrica di grado n a coefficienti reali o complessi ammette ESATTAMENTE n soluzioni, purché si intenda di cercare le soluzioni in campo complesso e si conti ciascuna soluzione con la "molteplicità" (NOTA 3) che le compete.

NOTA 3
La definizione di "**molteplicità di una soluzione (= radice) di un'equazione algebrica**" può essere formulata in diversi modi equivalenti.
Ad esempio, possiamo dire che una soluzione α di un'equazione algebrica $\mathrm{P}(x)=0$ ha molteplicità *k* se e solo se il polinomio $\mathrm{P}(x)$ è divisibile per il binomio $(x-\alpha)$ per esattamente *k* volte di seguito.
Oppure che una soluzione α di un'equazione algebrica $\mathrm{P}(x)=0$ ha molteplicità *k* se e solo se il fattore $(x-\alpha)$ compare per esattamente *k* volte nella scomposizione di $\mathrm{P}(x)$ in fattori di 1° grado (scomposizione la cui esistenza è garantita appunto dal Teorema, sebbene il Teorema stesso non dia alcuna indicazione su come effettivamente possa essere realizzata tale scomposizione).

Esempio. Prendiamo l'equazione di quarto grado $x^4+2x^2+8x+5=0$.
Possiamo fattorizzare, ottenendo $(x+1)^2(x^2-2x+5)=0$. Dunque:

$(x+1)^2=0 \quad x=-1$ (*molteplicità* 2)

$x^2-2x+5=0 \quad x=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm\sqrt{-4}=1\pm 2i$

e abbiamo trovato **4 soluzioni, tante quant'è il grado dell'equazione**:

$x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=1+2i,\ x_4=1-2i$.

Se invece ci fossimo confinati ad operare nel solo insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali,
avremmo individuato una sola soluzione ($x=-1$),
o, tenendo conto della molteplicità, 2 soluzioni ($x_1=x_2=-1$)

Facciamo un'ulteriore riflessione su quanto visto.

Consideriamo un'equazione algebrica (si dice anche "equazione polinomiale") P(x) = 0.
Supponiamo che i coefficienti di questa equazione siano tutti reali.
Può darsi ora che l'equazione non ammetta nessuna soluzione nell'ambito dei numeri reali;
però il Teorema Fondamentale dell'Algebra assicura che certamente una soluzione esiste,
quando la cerchiamo nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.
Si può dunque affermare che l' insieme $\mathbb{C}$ "completa", dal punto di vista algebrico, l'insieme $\mathbb{R}$.

Osserviamo ancora che, anche volendo restare esclusivamente nell'ambito dei numeri reali, nella teoria delle equazioni algebriche l'utilizzo dei numeri complessi sembra "imporsi per forza propria". Basti pensare che la formula generale per la risoluzione delle equazioni di 3° grado obbliga ad operare coi numeri complessi nei passaggi intermedi, anche in quei casi in cui le soluzioni sono poi tutte reali.
Questo fatto portò sconcerto negli algebristi del Cinquecento
che per primi ebbero a incontrarsi e "scontrarsi" coi numeri immaginari.

Su questi interessantissimi argomenti, vedi ad esempio, su Internet:

♪ ⇨

♫ ⇨

Limitandoci ora per un momento alle sole equazioni di 2° grado,
la conoscenza dei numeri complessi ci permette di affermare che

in campo complesso, ogni equazione di 2° grado
$$\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}=0 \quad (\mathbf{a,b,c}\in\mathbb{R}\ \text{ o anche }\ \mathbf{a,b,c}\in\mathbb{C},\ \ \mathbf{a}\neq 0)$$
ammette sempre ESATTAMENTE 2 SOLUZIONI (eventualmente coincidenti, nel caso $\Delta=0$)

Esempi:

$\boxed{x^2-6x+8=0}$ $\quad x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm\sqrt{\boxed{1}}=3\pm 1=\left\langle\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ $\quad\boxed{\Delta>0}$, **due soluzioni reali distinte**

$\boxed{x^2-6x+9=0}$ $\quad x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-9}=3\pm\sqrt{\boxed{0}}=3\pm 0=\left\langle\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right.$ $\quad\boxed{\Delta=0}$, **due soluzioni reali coincidenti**

$\boxed{x^2-6x+10=0}$ $\quad x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-10}=3\pm\sqrt{\boxed{-1}}=3\pm i=\left\langle\begin{matrix}3-i\\3+i\end{matrix}\right.$ $\quad\boxed{\Delta<0}$, **impossibilità in $\mathbb{R}$** ma **due soluzioni in $\mathbb{C}$**

Due numeri complessi si dicono "coniugati" se hanno
ugual parte reale, e coefficienti dell'immaginario opposti.

Ad esempio, una coppia di *complessi coniugati* è $5+8i,\ 5-8i$.
Se un numero reale viene pensato come elemento dell'insieme $\mathbb{C}$, risulta essere il coniugato di sé stesso.

Si può dimostrare che se un'equazione algebrica a coefficienti reali ammette una certa soluzione z, allora anche $\bar{z}$ (= il complesso coniugato di z) sarà senz'altro soluzione della stessa equazione. In breve, si può dunque dire che

"**in un'equazione algebrica a coefficienti reali,**
le soluzioni si presentano sempre in coppie di complessi coniugati".

Terminiamo qui il nostro discorso sulle equazioni algebriche, citando ancora, da ultimo,
l'interessante risultato seguente, facilmente giustificabile per via grafica:

"**un'equazione algebrica a coefficienti reali, di grado dispari, ammette sempre almeno una soluzione reale**".

b) Impiego dei numeri complessi In Fisica e in Ingegneria

Per quanto riguarda gli importantissimi settori di impiego dei numeri complessi in Fisica e in Ingegneria, ti propongo alcuni contributi scaricati da Internet.

- Dal sito www.guardian.co.uk

QUESTION:

WHAT USE ARE IMAGINARY NUMBERS IN THE REAL WORLD?
DO THEY HAVE PURPOSE OR IS IT JUST MATHEMATICIANS HAVING SOME FUN ?
[Bob Jones, Aberdeen Scotland]

ANSWERS:

- Introducing the square root(s) of -1 is convenient because
  i) all n-degree polynomials with real coefficients then have n roots, making algebra "complete";
  ii) it saves using matrix representations for objects that square to -1
  (such objects representing **an important part of the structure of linear equations which appear in quantum mechanics, heat diffusion, optics**, etc) (…) [M. Hall, Canberra Australia]

Traduzione:
Introdurre la radice quadrata, o le radici quadrate, di –1, è conveniente perché

i) (in tal modo) tutti i polinomi di grado n con coefficienti reali hanno n "zeri"
e così, quindi, l'algebra diventa "completa"

NOTA: in Inglese si parla di "radice" ("root") di un polinomio,
per indicare un valore che, assegnato alla variabile,
renda uguale a 0 il valore del polinomio.
In Italiano si preferisce parlare di "zeri" quando ci si riferisce ad un polinomio,
e di "radici" (o "soluzioni") con riferimento, invece, ad un'equazione.
Tuttavia, anche in lingua italiana, i termini "zero" e "radice" sovente
vengono impiegati indifferentemente sia per polinomi che per equazioni,
diventando quindi, nell'uso di parecchi autori, dei sinonimi.

ii) Permette di fare a meno dell'uso di matrici per rappresentare quegli oggetti il cui quadrato è –1
(oggetti che rappresentano una parte importante della struttura di equazioni lineari
che compaiono in meccanica quantistica, diffusione del calore, ottica, ecc.)

- They are of enormous use in applied maths and physics.
  Complex numbers (the sum of real and imaginary numbers)
  occur quite naturally in the study of quantum physics.
  They're useful for modelling periodic motions (such as water or light waves)
  as well as alternating currents.
  Understanding complex analysis, the study of functions of complex variables,
  has enabled mathematicians to solve **fluid dynamic problems**
  particularly for largely 2 dimensional problems where viscous effects are small.
  You can also understand their instability and progress to turbulence.
  All of the above are relevant in the real world, as they give insight into how to pump oil in oilrigs,
  how earthquakes shake buildings and how electronic devices (such as transistors and microchips)
  work on a quantum level (increasingly important as the devices shrink.) [Gareth Owen, Crewe UK]

Traduzione:
Sono enormemente utilizzati in matematica e fisica applicata.
I numeri complessi (somma di numeri reali e numeri immaginari)
si presentano in modo assai naturale nello studio della fisica quantistica.
Sono utili per modellizzare i moti periodici (ad esempio le onde nell'acqua o le onde luminose)
come pure le correnti alternate.
Comprendere l'analisi complessa, lo studio delle funzioni di variabile complessa,
ha reso i matematici capaci di risolvere problemi di fluidodinamica
in particolare per problemi sostanzialmente bidimensionali in cui gli effetti dovuti alla viscosità sono piccoli.
Si può anche comprendere l'instabilità di tali sistemi e il loro evolvere verso la turbolenza.
Tutte le questioni di cui sopra sono rilevanti nel mondo reale,
perché permettono di capire più chiaramente come pompare il petrolio negli impianti di trivellazione,
come i terremoti scuotono gli edifici e come i dispositivi elettronici (es. transistor e microchip)
funzionano a livello quantistico (il che è via via più importante al crescere della miniaturizzazione).

- Ask any phisical scientist or engineer (mechanical, civil or electrical)
how they would get on without using the square root of minus one.
They will tell you most of our technology depends on it.
For example, without **using imaginary numbers to calculate various circuit theories**,
you would not be reading this on a computer. [G. Baker, Ockendon UK]

Traduzione:
Domanda a qualsiasi fisico o ingegnere (meccanico, civile od elettrico)
come se la caverebbero senza utilizzare la radice quadrata di -1.
Ti diranno che la maggior parte della nostra tecnologia dipende da essa.
Per esempio, senza l'uso dei numeri immaginari per calcolare varie teorie sui circuiti,
non staresti leggendo queste righe su di un computer.

- Imaginary numbers can be very useful for solving engineering problems.
An example is if you have a pendulum swinging, it starts to slow down and eventually stop.
If you want to work out the motion of the pendulum over a certain time (i.e. derive a formula) then the best way to do it is to use complex numbers. [Aidan Randle-Conde, Crewe UK]

Traduzione:
I numeri immaginari possono essere molto utili per risolvere problemi ingegneristici.
Per esempio, se hai un pendolo che oscilla, comincerà a rallentare e prima o poi si fermerà.
Se vuoi fare una analisi quantitativa del moto del pendolo in un certo intervallo di tempo
(es. ricavare una formula) allora il miglior modo di farlo è usare i numeri complessi.

- Mathematicians have fun?!
[Tim Campbell, Wigan UK]

❑ Tanto di cappello, poi, a Philip Spencer dell'Università di Toronto (Canada)
che si occupa splendidamente di numeri complessi e delle loro applicazioni sulla pagina web
www.math.toronto.edu/mathnet/questionCorner/complexinlife.html dalla quale riporto questo estratto:

- In electronics, the state of a circuit element is described by two real numbers
(the voltage V across it and the current I flowing through it).
A circuit element also may possess a capacitance C and an inductance L that
(in simplistic terms) describe its tendency to resist changes in voltage and current respectively.
Rather than the circuit element's state having to be described by two different real numbers V and I, it can be described by a single complex number $z = V + iI$.
Similarly, inductance and capacitance can be thought of as the real and imaginary parts of another single complex number $w = C + iL$.
The laws of electricity can be expressed using complex addition and multiplication.

Another example is **electromagnetism.**
Rather than trying to describe an electromagnetic field by two real quantities (electric field strength and magnetic field strength), it is best described as a single complex number, of which the electric and magnetic components are simply the real and imaginary parts.

In elettronica, lo stato di un elemento di circuito è descritto da due numeri reali
(la differenza di potenziale V fra le sue estremità e la corrente elettrica I che scorre in esso).
Un elemento di circuito può possedere anche una capacità C e un'induttanza L
che (parlando in modo semplice) descrivono la sua tendenza a resistere
ai cambiamenti di differenza di potenziale e di corrente rispettivamente.
L'elemento di circuito, invece di dover essere descritto da due diversi numeri reali V e I,
può essere descritto da un singolo numero complesso $z = V + iI$

[NOTA: a volte si usa, in questi contesti, il simbolo j al posto del simbolo i per indicare l'unità immaginaria, proprio perché una I - maiuscola o anche minuscola - è già "impegnata" per indicare l'intensità della corrente].

Analogamente, l'induttanza e la capacità possono essere pensate
come la parte reale e [il coeff. della parte] immaginaria di un altro singolo numero complesso $w = C + iL$.
Le leggi dell'elettricità possono essere espresse usando l'addizione e moltiplicazione fra numeri complessi.

Un altro esempio è l'elettromagnetismo. Piuttosto che cercare di descrivere un campo elettromagnetico
tramite due quantità reali (l'intensità del campo elettrico e l'intensità del campo magnetico),
è meglio rappresentarla attraverso un singolo numero complesso,
di cui la componente elettrica e magnetica sono semplicemente le parti reale e immaginaria.