

5. QUALCHE ESERCIZIO SUI NUMERI COMPLESSI

Premessa: le potenze successive dell'unità immaginaria

$i^0 = 1$ (così come in \mathbb{R} : "un numero non nullo elevato a 0 dà, per definizione, 1")

$i^1 = i$ (così come in \mathbb{R} : "un numero elevato a 1 resta, per definizione, invariato")

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$\boxed{i^4} = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = \boxed{+1}$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = (+1) \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (+1) \cdot i^2 = (+1) \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = (+1) \cdot i^3 = (+1) \cdot (-i) = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = (+1) \cdot i^4 = (+1) \cdot (+1) = +1$$

$$i^9 = i^8 \cdot i = (+1) \cdot i = i$$

...

Le potenze successive dell'unità immaginaria i hanno dunque un andamento "ciclico":

continuano a ripetere all'infinito sempre il medesimo ritornello $\boxed{1 \ i \ -1 \ -i}$

esponente n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
risultato i^n	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$...



ESERCIZI

- 1) $\left(\frac{2}{3}i\right)^2$ 2) $\left(-\frac{2}{3}i\right)^2$ 3) $\left(\frac{1}{2}i\right)^3$ 4) $\left(\frac{1}{2}i\right)^4$ 5) $i(2+i)$ 6) $(7+5i)+(-9+4i)$ 7) $(7+5i)-(-9+4i)$
- 8) $(7+5i) \cdot (-9+4i)$ 9) $(3-2i) \cdot (3+2i)$ 10) $\frac{2+i}{3-i}$ 11) $\frac{3}{5+6i}$ 12) $(5+3i)^2$ 13) $\left(\frac{1}{2}-3i\right)^2$ 14) $\frac{(2+i)(3-i)}{i}$
- 15) i^{29} 16) $i^{371} + i^{372} + i^{373} + i^{374}$ 17) $(1+i)^3$ 18) $(1+i)^6$ 19) $i^{30} + i^{300}$ 20) $(\sqrt{2} + i\sqrt{3})^2$ 21) $\sqrt{-16}$
- 22) $\frac{1}{i^{23}}$ 23) $\sqrt{-7}$ 24) $6\left(\frac{2}{3}-i\right) - 5(1-3i)$ 25) $\frac{1+i}{3-4i}$ 26) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i) + \frac{1}{i^{14}}$ 27) $\frac{i^4+2i}{2i}$ 28) $\frac{1+i}{1-i}$ 29) $\frac{1}{\pi i}$
- 30) $(a+bi)^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 31) $(a+bi)(a-bi)$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 32) $i \cdot [(1+i)(2+i) - (1-i)(3-i)]$ 33) $(2-i)^4$
- 34) Quale fra le seguenti uguaglianze è FALSA?
 (a) $i^{176} = 1$ (b) $\frac{1}{i^3} = i^5$ (c) $\frac{1}{i} + i^3 = 0$ (d) $\frac{1}{i^{10}} = i^2$
- 37) Trova per tentativi i due numeri complessi $a+bi$ il cui quadrato è $2i$
- Da www.cliffsnotes.com:
- 35) The values of a and b (with $b > 0$) which satisfy $(a+bi)^2 = 5+12i$ are:
 (a) $a=3, b=-2$ (b) $a=3, b=2$ (c) $a=2, b=3$ (d) $a=2, b=-3$
- 36) The solution of the equation $(3-i)(z+4-2i) = 10+20i$ is:
 (a) $z=1-3i$ (b) $z=-3+9i$ (c) $z=46-52i$ (d) $z=5+5i$
- 38) Risolvi in \mathbb{C} le seguenti equazioni di 2° grado:
 a) $x^2 - 4x + 13 = 0$
 b) $2x^2 + 2x + 3 = 0$
 c) $9x^2 + 1 = 0$

RISULTATI

- 1) $-\frac{4}{9}$ 2) $-\frac{4}{9}$ 3) $-\frac{1}{8}i$ 4) $\frac{1}{16}$ 5) $-1+2i$ 6) $-2+9i$ 7) $16+i$ 8) $-83-17i$ 9) 13 10) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ 11) $\frac{15}{61} - \frac{18}{61}i$
- 12) $16+30i$ 13) $-\frac{35}{4} - 3i$ 14) $1-7i$ 15) i 16) 0 17) $-2+2i$ 18) $-8i$ 19) 0 20) $-1+2i\sqrt{6}$ 21) $\pm 4i$ 22) i
- 23) $\pm i\sqrt{7}$ 24) $-1+9i$ 25) $-\frac{1}{25} + \frac{7}{25}i$ 26) 2 27) $1 - \frac{1}{2}i$ 28) i 29) $-\frac{1}{\pi}i$ 30) $a^2 - b^2 + 2abi$ 31) $a^2 + b^2$
- 32) $-7-i$ 33) $-7-24i$ 34) c 35) b 36) b 37) $\frac{1+i}{-1-i}$ 38) a) $x=2 \pm 3i$ b) $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}i$ c) $x = \pm \frac{1}{3}i$