LE EQUAZIONI DI 2° GRADO - SECONDA PARTE

NOTA - *Preliminare a questi argomenti, è la conoscenza dei "numeri complessi"* (*capitolo precedente*)

a) RELAZIONI FRA SOLUZIONI E COEFFICIENTI IN UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO

In ogni equazione di 2° grado $\boxed{ax^2+bx+c=0}$ **la somma e il prodotto delle soluzioni sono legati ai coefficienti dalle formule:**

$$\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x_1x_2=\frac{c}{a}}$$

$$ax^2+bx+c=0; \qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{array} \right.$$

$$\boxed{x_1+x_2=}\ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\cancel{-\sqrt{\Delta}}-b\cancel{+\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a}\ \boxed{=-\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{x_1\cdot x_2=}\ \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}=$$

$$=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{\cancel{b^2}\cancel{-b^2}+4ac}{4a^2}=\frac{\cancel{4}\cancel{a}c}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}}\ \boxed{=\frac{c}{a}}$$

Esempio 1. Le soluzioni dell'equazione $2x^2-5x-3=0$ hanno per somma $-\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ e per prodotto $\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}$

Risolvi l'equazione e verificalo direttamente!

Esempio 2. Le soluzioni dell'equazione $x^2+4x+5=0$ non esistono in campo reale;

sono due numeri complessi, la cui somma è $-\frac{b}{a}=-4$ e il cui prodotto è $\frac{c}{a}=5$

b) TROVARE DUE NUMERI CONOSCENDONE LA SOMMA s E IL PRODOTTO p

Il problema si può risolvere in più modi (vedi ⇨); tuttavia,

basta scrivere l'equazione di 2° grado $\boxed{x^2-sx+p=0}$ **e risolverla.**
Le soluzioni di questa equazione saranno i due numeri cercati!

Infatti, tali due soluzioni avranno per somma $-\frac{b}{a}=-\frac{-s}{1}=s$ e per prodotto $\frac{c}{a}=\frac{p}{1}=p$.

Esempio: trovare due numeri sapendo che la loro somma è $s=4\sqrt{3}$ e il loro prodotto è $p=11$.

$$x^2-4\sqrt{3}\cdot x+11=0; \qquad x_{1,2}=2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-11}=\left\langle \begin{array}{l} 2\sqrt{3}-1 \\ 2\sqrt{3}+1 \end{array} \right.$$

NOTA Se nell'equazione $x^2-sx+p=0$ è $\Delta=0$, allora i due numeri sono uguali;
se è $\Delta<0$, i due numeri sono complessi: in $\mathbb{R}$, non esistono.

ESERCIZI (trovare due numeri conoscendone somma e prodotto)

1) $s=134,\ \ p=1353$ 2) $s=4,\ \ p=1$ 3) $s=2,\ \ p=-575$ 4) $s=54,\ \ p=729$
5) $s=\frac{7}{6},\ \ p=\frac{1}{3}$ 6) $s=-\frac{5}{6},\ \ p=-1$ 7) $s=0,\ \ p=-5$ 8) $s=5,\ \ p=5$
9) $s=2\sqrt{3},\ \ p=1$ 10) $s=-4\sqrt{3},\ \ p=12$ 11) $s=4k\sqrt{2},\ \ p=6k^2$ 12) $s=a^2+2,\ \ p=a^3+1$

RISULTATI

1) $11,\ 123$ 2) $2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$ 3) $-23,\ 25$ 4) $27,\ 27$
5) $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}$ 6) $-\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}$ 7) $\sqrt{5},\ -\sqrt{5}$ 8) $\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}$
9) $\sqrt{3}+\sqrt{2},\ \ \sqrt{3}-\sqrt{2}$ 10) $-2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3}$ 11) $k\sqrt{2},\ 3k\sqrt{2}$ 12) $a+1,\ \ a^2-a+1$