

c) FORMULA GENERALE PER SCOMPORRE IN FATTORI UN TRINOMIO DI 2° GRADO

Indicato con $ax^2 + bx + c$ il trinomio da scomporre, per effettuare la scomposizione basterà scrivere l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ("equazione associata" al trinomio considerato), e risolverla.

Dette x_1, x_2 le soluzioni di questa (NOTE), si avrà:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

NOTE

♫ Se le due soluzioni coincidono ($\Delta = 0$: $x_1 = x_2$) la formula rimane pienamente valida, e può essere riscritta come $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$

Quindi (IMPORTANTE!): se $\Delta = 0$, il trinomio $ax^2 + bx + c$ è uguale al QUADRATO DI UN BINOMIO, moltiplicato eventualmente per una costante.



♫ Se $\Delta < 0$, il trinomio non è scomponibile in campo reale (= utilizzando solo coefficienti reali); tuttavia, volendo, si può pensare alle due soluzioni complesse x_1, x_2 dell'equazione associata, e allora la formula rimane pienamente valida.

DIMOSTRAZIONE, o meglio: "costruzione" della formula

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] = \\ &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{C.V.D.} \end{aligned}$$

Esempio 1. Scomporre in fattori il trinomio $6x^2 + x - 1$.

Equazione associata:

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} = \left\langle \begin{array}{l} -1/2 \\ 1/3 \end{array} \right\rangle$$

$$6x^2 + x - 1 = 6 \cdot \left[x - \left(-\frac{1}{2}\right) \right] \left[x - \frac{1}{3} \right] = 6 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) = \cancel{6} \cdot \frac{2x+1}{\cancel{2}} \cdot \frac{3x-1}{\cancel{3}} = (2x+1)(3x-1)$$

Esempio 2. Fattorizzare $y^2 - 4y\sqrt{3} + 12$. Immagino nella mia mente l'equazione associata e la risolvo:

$$y_{1,2} = 2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 12} = 2\sqrt{3} \pm 0 = \boxed{2\sqrt{3}}$$

$$y^2 - 4y\sqrt{3} + 12 = (y - 2\sqrt{3})(y - 2\sqrt{3}) = (y - 2\sqrt{3})^2$$

ESERCIZI (fattorizzazione di un trinomio di 2° grado)

- | | | |
|--------------------------------|--|---|
| 1) $8x^2 - 6x + 1$ | 2) $3x^2 + 10x - 8$ | 3) $6x^2 - 5x\sqrt{2} + 2$ |
| 4) $x^2 - 2x - 1$ | 5) $x^2 - 2x\sqrt{5} + 5$ | 6) $12x^2 - 16mx - 3m^2$ |
| 7) $x^2 + 2ax\sqrt{2} - 16a^2$ | 8) $x^2 - 6x + 1$ | 9) $2y^2 + 3y\sqrt{3} - 6$ |
| 10) $24a^2 + 10a - 25$ | 11) $z^2 + z(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 2$ | 12) $d^2 - 2d(3 - \sqrt{2}) + (11 - 6\sqrt{2})$ |
| 13) $6x^2 - 13ax + 6a^2$ | 14) $3y^2 + 4ty - 4t^2$ | 15) $a^2 + 4ab - 12b^2$ |

RISULTATI

- | | | |
|---|---|-------------------------------------|
| 1) $(2x - 1)(4x - 1)$ | 2) $(3x - 2)(x + 4)$ | 3) $(2x - \sqrt{2})(3x - \sqrt{2})$ |
| 4) $(x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$ | 5) $(x - \sqrt{5})^2$ | 6) $(6x + m)(2x - 3m)$ |
| 7) $(x - 2a\sqrt{2})(x + 4a\sqrt{2})$ | 8) $(x - 3 + 2\sqrt{2})(x - 3 - 2\sqrt{2})$ | 9) $(2y - \sqrt{3})(y + 2\sqrt{3})$ |
| 10) $(4a + 5)(6a - 5)$ | 11) $(z - 1)(z + 2 - \sqrt{2})$ | 12) $(d + \sqrt{2} - 3)^2$ |
| 13) $(2x - 3a)(3x - 2a)$ | 14) $(3y - 2t)(y + 2t)$ | 15) $(a - 2b)(a + 6b)$ |