

## e) QUESITI SULLE EQUAZIONI PARAMETRICHE DI 2° GRADO

E' data l'equazione

$$(m-1)x^2 - (m+5)x + 2m = 0$$

Si chiede di determinare il parametro  $m$  in modo che:

- |  |  |
|--|--|
| <p>i) la somma delle soluzioni valga 4</p> <p>ii) il prodotto delle soluzioni valga 2</p> <p>iii) le soluzioni siano coincidenti</p> <p>iv) una soluzione sia uguale a 2</p> | <p>v) la somma dei quadrati delle soluzioni sia 10</p> <p>vi) le soluzioni siano reciproche l'una dell'altra</p> <p>vii) le soluzioni siano antireciproche</p> <p>viii) le soluzioni siano opposte</p> |
|--|--|

**i)** ?m/  $x_1 + x_2 = 4$

$$-\frac{b}{a} = 4$$

$$\frac{m+5}{m-1} = 4$$

$$m+5 = 4m-4 \quad (m \neq 1)$$

$$-3m = -9$$

$$m = 3$$

Sappiamo che in ogni equazione di 2° grado la somma delle soluzioni è sempre uguale a  $-\frac{b}{a}$  (opposto del rapporto fra il secondo e il primo coefficiente).  
 Porremo perciò la condizione  $-\frac{b}{a} = 4$ ,  
 per poi cercare i valori del parametro che la soddisfano.

Abbiamo trovato  $m=3$ . Facciamo la verifica!  
 Andiamo a vedere cosa diventa la nostra equazione nel caso  $m=3$ ,  
 e risolviamola, per controllare che la somma delle soluzioni valga proprio 4:

$$(3-1)x^2 - (3+5)x + 2 \cdot 3 = 0; \quad \cancel{2}x^2 - \cancel{8}x + \cancel{6} = 0; \quad (x-1)(x-3) = 0; \quad x=1 \vee x=3 \rightarrow 1+3=4, \quad \text{OK!}$$

**ii)** ?m/  $x_1 x_2 = 2$

$$\frac{c}{a} = 2$$

$$\frac{2m}{m-1} = 2$$

$$\cancel{2}m = \cancel{2}m - 2 \quad (m \neq 1)$$

$$0 = -2 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

Sappiamo che in ogni equazione di 2° grado il prodotto delle soluzioni è sempre uguale a  $\frac{c}{a}$  (rapporto fra il termine noto e il primo coefficiente).  
 Porremo perciò la condizione  $\frac{c}{a} = 2$ ,  
 per poi cercare i valori del parametro che la soddisfano.

Abbiamo trovato un'equazione, nell'incognita  $m$ , impossibile.  
 Ciò significa che non esiste alcun valore di  $m$  per cui il prodotto delle soluzioni valga 2.  
 Insomma, nella famiglia delle infinite equazioni  $(m-1)x^2 - (m+5)x + 2m = 0$ ,  
 non ne esiste nemmeno una nella quale il prodotto delle soluzioni valga 2.

**iii)** ?m/  $x_1 = x_2$

$$\Delta = 0 \quad (b^2 - 4ac = 0)$$

$$(m+5)^2 - 8m(m-1) = 0$$

$$m^2 + 10m + 25 - 8m^2 + 8m = 0$$

$$-7m^2 + 18m + 25 = 0$$

$$7m^2 - 18m - 25 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+175}}{7} = \frac{9 \pm \sqrt{256}}{7} = \frac{9 \pm 16}{7} = \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ 25/7 \end{array} \right.$$

Verifica nel caso  $m = -1$

$$(-1-1)x^2 - (-1+5)x + 2(-1) = 0$$

$$-2x^2 - 4x - 2 = 0; \quad x^2 + 2x + 1 = 0; \quad (x+1)^2 = 0;$$

$$x_1 = x_2 = -1 \rightarrow \text{soluzioni coincidenti, OK}$$

Fai tu, caro studente, la verifica con  $m = 25/7$ .

**MOLTO IMPORTANTE !!!**

In un'equazione di 2° grado  
 le **SOLUZIONI** sono **COINCIDENTI** se e solo se  $\Delta = 0$

Nel caso poi in cui  $b$  sia pari, converrà rimpiazzare questa condizione  
 con  $\Delta/4 = 0$  (equivalente ma più comoda).  
 Ad esempio, l'equazione  $x^2 + 2(2-k)x - (2+9k) = 0$   
 ha soluzioni coincidenti quando  $\frac{\Delta}{4} = (2-k)^2 + (2+9k) = 0$  ossia  
 $4 - 4k + k^2 + 2 + 9k = 0; \quad k^2 + 5k + 6 = 0; \quad \dots \quad k = -3 \vee k = -2$

... Certo, sarebbe pure possibile:

- 1) risolvere l'equazione, trovando  $x_1$  e  $x_2$  che sarebbero espressioni con  $m$  sotto radice
- 2) uguagliare le due espressioni, ottenendo in questo modo l'equazione finalizzata a determinare  $m$ .

*Tale procedimento sarebbe però inutilmente lungo e ingombrante!*

iv)

$$\boxed{?m / x = 2}$$

Sostituiamo...

$$(m-1) \cdot 2^2 - (m+5) \cdot 2 + 2m = 0$$

$$4m - 4 - 2m - 10 + 2m = 0$$

$$4m = 14$$

$$m = 7/2$$

**BANALE, MA IMPORTANTE:**  
**una data equazione**  
**ammette come soluzione**  
**un determinato numero**  
**se e solo se,**  
**sostituendo quel numero**  
**al posto dell'incognita,**  
**si ottiene un'uguaglianza vera.**

Verifica tu, caro lettore, che con  $m=7/2$  l'equazione ammette le due soluzioni  $x=7/5$  e, appunto,  $x=2$ .

v)

$$\boxed{?m / x_1^2 + x_2^2 = 10}$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = 10$$

$$\left(\frac{m+5}{m-1}\right)^2 - 2\frac{2m}{m-1} = 10$$

$$(m+5)^2 - 4m(m-1) = 10(m-1)^2 \quad (m \neq 1)$$

$$\dots 13m^2 - 34m - 15 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 195}}{13} = \frac{17 \pm 22}{13} = \begin{cases} -\frac{5}{13} \\ \frac{39}{13} = 3 \end{cases}$$

La verifica, in ciascuno dei due casi,  
è lasciata allo studente.

$$\text{Con } m = -\frac{5}{13}$$

le due soluzioni sono irrazionali;  
tuttavia, come si constata col calcolo,  
la somma dei loro quadrati dà proprio 10.

### ♥ LE FORMULE DI WARING

Vale l'identità  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$   
che ci permette di ricondurre la somma dei quadrati  
alla somma e al prodotto delle basi.

Abbiamo, in pratica, utilizzato la prima di una sequenza  
di formule, chiamate **formule di Waring**,  
le quali **permettono di esprimere una somma di**  
**due potenze di ugual grado** (quadrati, cubi, ...) **in**  
**funzione della somma delle basi e del loro prodotto.**

$$\boxed{x^2 + y^2} = x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = \boxed{(x + y)^2 - 2xy}$$

$$\boxed{x^3 + y^3} = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2 =$$

$$= \boxed{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}$$

$$\boxed{x^4 + y^4} = (x + y)^4 - 4x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 =$$

$$= (x + y)^4 - 4xy(x^2 + y^2) - 6x^2y^2 =$$

$$= (x + y)^4 - 4xy[(x + y)^2 - 2xy] - 6x^2y^2 =$$

$$= (x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 8x^2y^2 - 6x^2y^2 =$$

$$= \boxed{(x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2}$$

vi)

$$\boxed{?m / x_1 = \frac{1}{x_2}}$$

$$x_1x_2 = 1$$

$$\frac{c}{a} = 1$$

$$\frac{2m}{m-1} = 1$$

$$\dots m = -1$$

Ricordiamo che due numeri  
si dicono "reciproci"  
se il loro prodotto è 1  
quindi se ognuno di essi  
è uguale a "1 fratto l'altro".  
Ad esempio,  
sono reciproci i numeri  
 $4$  e  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{2}$ ;  $-\frac{3}{5}$  e  $-\frac{5}{3}$

vii)

$$\boxed{?m / x_1 = -\frac{1}{x_2}}$$

$$x_1x_2 = -1$$

$$\frac{c}{a} = -1$$

$$\frac{2m}{m-1} = -1$$

$$\dots m = 1/3$$

"Antireciproco" significa  
"l'opposto del reciproco".  
Ad es., sono antireciproci  
i due numeri  $\frac{2}{3}$  e  $-\frac{3}{2}$ .  
Due numeri  
sono antireciproci  
se e solo se  
hanno per prodotto  $-1$ .

viii)

$$\boxed{?m / x_1 = -x_2}$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$-\frac{b}{a} = 0$$

$$\frac{m+5}{m-1} = 0$$

$$\dots m = -5$$

Molto semplice: due numeri sono opposti se e solo se la loro somma è 0.

Verifica. La nostra equazione  $(m-1)x^2 - (m+5)x + 2m = 0$  diventa, con  $m = -5$ ,  
 $(-5-1)x^2 - (-5+5)x + 2(-5) = 0$ ;  $-6x^2 - 10 = 0$ ;  $3x^2 + 5 = 0$

Ora, in campo reale questa equazione NON ha soluzioni opposte, come si desiderava,  
bensì è impossibile; tuttavia, sconfinando in campo complesso si può scrivere:

$x^2 = -\frac{5}{3}$ ;  $x = \pm\sqrt{-\frac{5}{3}} = \pm i\sqrt{\frac{5}{3}}$  quindi si ottengono due soluzioni effettivamente opposte.

Ricapitolando, il valore richiesto di  $m$

- ❑ non esiste se intendiamo che le soluz. debbano obbligatoriamente appartenere a  $\mathbb{R}$ ,
- ❑ esiste ed è  $m = -5$  se ammettiamo che le soluzioni possano essere cercate in tutto  $\mathbb{C}$ .