ESERCIZI (quesiti sulle equazioni parametriche di 2° grado)

E' richiesto, in ciascun esercizio, dopo aver determinato il valore desiderato del parametro, di calcolare pure qual è il valore delle soluzioni nel caso specifico. Ciò servirà anche da verifica.

Nell'equazione …	determinare il parametro (o i parametri) in modo che …
1) $x^2+2ax+a+6=0$	le soluzioni coincidano
2) $(b-1)x^2+bx+(1-b)=0$	$\sqrt{2}$ sia soluzione
3) $x^2-4mx+m-1=0$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano reciproche 3. le soluzioni siano antireciproche 4. una soluzione sia nulla
4) $(2-a)x^2+2(3-a)x+4=0$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano uguali 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche
5) $q(x^2+1)=4x$	1. le soluzioni siano opposte 2. le soluzioni siano reciproche 3. le soluzioni siano uguali 4. le soluzioni abbiano per somma 4
6) $x^2-(3a+2b+1)x+a+b+1=0$	le soluzioni siano i numeri 1 e 2
7) $(a-1)x^2+ax+(a-1)=0$	1. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$ 2. l'equazione data abbia una soluzione in comune con l'equazione $x^2-4x+3=0$
8) $kx^2+(5k-1)x+4=0$	1. $x_1 \equiv x_2$ 2. ${x_1}^2+{x_2}^2=65/4$ 3. una soluzione sia -4
9) $x^2=\frac{4ax-3}{a}$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. una soluzione sia 3 4. la somma delle soluzioni sia 4 5. la somma delle soluzioni sia -4 6. $x_1 \cdot x_2=3$ 7. il prodotto delle soluzioni sia 6 8. le soluzioni siano reciproche
10) $kx^2+(2k+1)x+k=0$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche
11) $kx^2+2(k+1)x+(k+2)=0$	1. le soluzioni siano uguali 2. le soluzioni siano opposte 3. le soluzioni siano reciproche 4. le soluzioni siano antireciproche 5. la somma dei quadrati delle soluzioni sia 10
12) $(m+4)x^2+(m-1)x-1=0$	1. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$ 2. $\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=10$
13) $cx^2-cx+2=0$	1. ${x_1}^3+{x_2}^3=7$ 2. ${x_1}^4+{x_2}^4=\frac{1}{8}$

14) Per quali valori dei parametri a, b le due equazioni $2x^2+7x=4$ e $(a+3b)x^2+2ax-(a+b+2)=0$ hanno le stesse soluzioni?

15) Scrivi un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni i due numeri -8 e 3.

16) Nell'equazione $x^2-(k+5)x+2(2k+1)=0$ determina k in modo che le soluzioni siano una doppia dell'altra

INDICAZIONE: si potrebbe risolvere, ottenendo le soluzioni come espressioni contenenti k, poi cercare i valori di k per cui risulti $x_1=2x_2$ oppure $x_2=2x_1$; tuttavia, le equazioni nell'incognita k ottenute in questo modo conterrebbero k sotto radice e sarebbero, dunque, equazioni "irrazionali"; ora, il discorso su tali tipi di equazioni, risolvendo le quali è possibile imbattersi in soluzioni "non accettabili", non è stato ancora trattato.

C'è d'altra parte un metodo molto migliore: il sistema $\begin{cases} x_1=2x_2 \\ x_1+x_2=k+5 \\ x_1 \cdot x_2=2(2k+1) \end{cases}$ porta a determinare x_1, x_2, k.

Pur essendo il sistema di 2° grado, ci puoi provare: non è difficile.

17) Nell'equazione $(h+1)x^2+3hx-2h=0$ determina h in modo che il rapporto delle soluzioni sia -4

18) Nell'equazione $x^2-2(m+1)x+4m+3=0$ determina m in modo che $x_2-x_1=2$ (vedi esercizio 16)

19) Nell'equazione $x^2-2(m+1)x+4m+3=0$ determina m in modo che $|x_1+x_2|=10$

20) Nell'equazione $rx^2-2rx-24=0$ determina r in modo che le soluzioni:
1. siano uguali 2. siano opposte 3. siano reciproche 4. abbiano prodotto 3 5. abbiano rapporto 3

RISPOSTE

1)
$a=-2$ (in questo caso $x_1=x_2=2$)
oppure
$a=3$ (in questo caso $x_1=x_2=-3$)
Ricorda che la condizione da porre è, per le soluzioni coincidenti, $\Delta=0$;
qui è meglio, dato che il "b" è pari, $\frac{\Delta}{4}=0$

2)
$b=\sqrt{2}-1$
L'altra soluzione è
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3)
1. $m=0$ $(x=\pm 1)$
2. $m=2$. In questo caso si ha $x_{1,2}=4\pm\sqrt{15}$,
   e questi numeri sono fra loro reciproci in quanto
   - moltiplicandoli, si ottiene 1 (verificalo!)
   - oppure, facendo ad es. il calcolo $1/x_1$,
     si ottiene, dopo razionalizzazione, x_2
3. $m=0$ $(x=\pm 1)$ 4. $m=1$ (l'altra soluz. vale 4)

4) 1. $a=3$ 2. $a=1$ 3. $a=-2$ 4. $a=6$
5) 1. Impossibile, nessun valore di q 2. Qualsiasi valore di q eccetto 0 3. $q=\pm 2$ 4. $q=1$
6) $a=0,\ b=1$ Sostituendo al posto di x prima il valore 1, poi 2, si hanno due condizioni, di cui si fa il sistema.

7)
1. $a=2/3$. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}\ ...$
2. $a=2/3,\ a=10/13$

8) 1. $k=1\left(x_{1,2}=-2\right)\ \vee\ k=1/25\left(x_{1,2}=10\right)$
2. $k=2\left(x_1=-4,\ x_2=-\frac{1}{2}\right)\ \vee\ k=\frac{2}{35}\left(x_{1,2}=\frac{25\pm 3i\sqrt{55}}{4}\right)$
3. $k=2$ (l'altra soluzione è $-1/2$)

9) 1. $a=3/4$ 2. nessun valore di a 3. $a=1$ 4. qualsiasi valore di a, tranne 0 5. nessun valore di a 6. $a=1$
7. $a=1/2$. In questo caso le soluz. sono due numeri complessi, $2-i\sqrt{2}$ e $2+i\sqrt{2}$, il cui prodotto è appunto 6.
8. $a=3$. In questo caso le soluzioni sono due numeri irrazionali, $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$, appunto reciproci fra loro: puoi constatarlo
♪ moltiplicandoli (otterrai 1, e due numeri sono reciproci se e solo se il loro prodotto è 1)
♫ oppure eseguendo per esempio il calcolo $\boxed{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}\boxed{=2+\sqrt{3}}$

10) 1. $k=-1/4$ 2. $k=-1/2$ (ma in questo caso le soluzioni sono complesse; in $\mathbb{R}$, il problema è impossibile)
3. Qualsiasi valore di k, tranne 0 4. Impossibile, nessun valore di k

11) 1. Impossibile
2. $k=-1$
3. Impossibile
4. $k=-1$
5. $k=1,\ k=-1/2$

12)
1. $m=2$
2. $m=\pm 1$
Denom. comune, innanzitutto …

13) 1. $c=-1$
2. $c=8\left(x_1=x_2=\frac{1}{2}\right)\ \vee\ c=\frac{8}{7}$ (soluz. complesse)
Si utilizzano le formule di Waring, pag. 65.

14)
$a=7$,
$b=-1$

15) Si potrebbe pensare alla generica equazione $ax^2+bx+c=0$ e imporre che $-8, 3$ ne siano soluzioni;
si otterrebbe così il sistema $\begin{cases}64a-8b+c=0\\9a+3b+c=0\end{cases}$ che non ha una sola soluzione, bensì ne ha infinite,
perché è verificato da tutte le terne a, b, c per le quali $b=5a,\ c=-24a$, con a qualsiasi.
Ad esempio, una terna che "va bene" è $a=1, b=5, c=-24$; un'altra è $a=-3, b=-15, c=72$ …
Moltiplicando tutti i coefficienti di un'equazione per uno stesso numero, le soluzioni non cambiano!
Tuttavia, c'è un modo molto veloce ed efficace per scrivere un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni due numeri assegnati: nel nostro caso, l'equazione cercata è semplicemente $(x+8)(x-3)=0$
(anche tutte le equazioni ottenibili moltiplicando quella per una costante risolverebbero il problema).

♥ *In generale*: un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni due valori assegnati r, s è semplicemente la $(x-r)(x-s)=0$.

Altro es.: un'equazione di 2° grado che abbia per soluzioni $-\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ è $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=0$
che si può riscrivere come $(3x+2)(4x-3)=0$.

16) $k=4$ 17) $h=1$ (perché $h=0$ non va bene?) 18) $m=-1, m=3$ 19) $m=4,\ m=-6$
20) 1. $r=-24$ 2. nessun valore di r 3. $r=-24$ 4. $r=-8$ (però con soluzioni complesse) 5. $r=-32$

Puoi andare a vedere come sono spiegate le equazioni di 2° grado sul bel sito www.themathpage.com di Lawrence Spector

TheMathPage
Lawrence Spector

Di equazioni di 2° grado si parla anche nel capitolo su "Grafici e risoluzioni grafiche" (da pag. 106 a pag. 113)