OLTRE LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

1. EQUAZIONI ALGEBRICHE, LORO SOLUZIONI E RISOLUBILITA'

Definizioni

Un'equazione si dice "**algebrica**" se è riconducibile alla forma **P(*x*) = 0 , con P(*x*) polinomio**

Dicesi "**grado**" di un'equazione algebrica P(*x*) = 0 , il grado del polinomio P(*x*)

❑ QUANTE SOLUZIONI HA UN'EQUAZIONE ALGEBRICA ?

Alla domanda risponde il "Teorema Fondamentale dell'Algebra",
di cui abbiamo già parlato a pag. 56, nel capitolo sui Numeri Complessi.

La prima dimostrazione del T.F.A. viene attribuita al tedesco Gauss (1777-1855) e datata 1799,
anche se tale dimostrazione, non esente da pecche, dovette essere successivamente perfezionata
ad opera del francese Jean Robert Argand (1768-1822) e dello stesso Friedrich Gauss.

Teorema Fondamentale dell'Algebra (T.F.A.)

♥ **Un'equazione algebrica di grado *n* a coefficienti reali o complessi**
ammette esattamente *n* soluzioni,
purché si intenda di cercare le soluzioni in campo complesso
e si conti ciascuna soluzione con la "molteplicità" (NOTA) che le compete.

NOTA
La definizione di **molteplicità di una soluzione di un'equazione algebrica**
(sinonimo di "soluzione" è "radice") può essere formulata in diversi modi equivalenti.
Ad esempio, possiamo dire che
una soluzione α *di un'equazione algebrica* $P(x)=0$ *ha molteplicità k se e solo se*
il fattore $(x-\alpha)$ *compare per esattamente k volte nella scomposizione del polinomio P in fattori di 1° grado.*
Si può dimostrare (vedi pag. 56) che una scomposizione in fattori "lineari" (= di 1° grado)
esiste certamente per *ogni* polinomio a coefficienti reali o complessi,
anche se non è possibile costruire alcun algoritmo di carattere generale
che permetta di effettuarla, "nella pratica", per un polinomio arbitrario.

❑ Esempio 1

$x^4+2x^3-15x^2=0$

$x^2(x^2+2x-15)=0$

$x^2=0\ \ (x\cdot x=0)\to\ \ x_1=x_2=0,\ \ o\ anche:"x=0\ soluzione\ di\ molteplicità\ 2"$

$x^2+2x-15=0\to\ \ x_3=-5,\ x_4=3\quad (con\ la\ \ formula\ oppure\ \ per\ \ scomposizione)$

Dunque abbiamo trovato **4 soluzioni, tante quant'è il grado**, a patto di tener conto che
la soluzione $x = 0$ "va contata 2 volte", "è soluzione doppia", "è soluzione di molteplicità 2".

❑ Esempio 2

$x^5-6x^4+13x^3-14x^2+12x-8=0$

Scomponiamo con Ruffini ottenendo:

$(x-2)^3(x^2+1)=0$

da cui:

$(x-2)^3=0\ \ \to\ \ x=2\qquad (molteplicità\ 3)$

$x^2+1=0\ \ \to\ \ nessuna\ soluzione\ in\ \mathbb{R},\ ma\ in\ \mathbb{C}:\ x^2=-1,\ \ da\ cui\ \ x=\pm i$

Anche:

$(x-2)(x-2)(x-2)(x+i)(x-i)=0$ in quanto $(x+i)(x-i)=x^2-i^2=x^2-(-1)=x^2+1$

In definitiva, le soluzioni sono: $\left[\begin{array}{ll} x=2 & (molteplicità\ 3) \\ x=-i & (molteplicità\ 1) \\ x=i & (molteplicità\ 1) \end{array}\right.$

Volendo si può scrivere: $x_1=2\qquad x_2=2\qquad x_3=2\qquad x_4=-i\qquad x_5=i$

Le soluzioni risultano quindi essere 5, cioè esattamente tante quant'è il grado dell'equazione.
Se invece avessimo lavorato esclusivamente in campo reale, avremmo trovato
una sola soluzione ($x=2$) o, tenendo conto della molteplicità, 3 soluzioni $x_1=x_2=x_3=2$.

❑ ESISTONO FORMULE PER LA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE DI GRADO SUPERIORE AL 2°?

Abbiamo visto che **le equazioni di 2° grado** $ax^2+bx+c=0$ **ammettono una formula risolutiva**:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\quad \text{FORMULA RISOLUTIVA DELL'EQUAZIONE DI 2° GRADO}$$

Anche le equazioni di 1° grado $ax+b=0$
ammettono un procedimento risolutivo, che, volendo, si può sintetizzare in una formula:

$$ax+b=0;\quad ax=-b;\quad \boxed{x=-\frac{b}{a}}\quad \text{FORMULA RISOLUTIVA DELL' EQUAZIONE DI 1° GRADO}$$

Già 4000 anni fa circa, i babilonesi sapevano affrontare un'equazione di 2° grado
(purché avesse almeno una soluzione positiva),
con procedimenti che sostanzialmente equivalevano all'applicazione della formula da noi attualmente usata.

Bene!

♥ **Pure le equazioni di 3° e di 4° grado ammettono la loro formula risolutiva**;
tali formule furono scoperte nel XVI secolo
(apparvero per la prima volta in un testo del **1545**, l' "Ars Magna" dell'italiano **Girolamo Cardano**).

♥ **E' stato invece dimostrato che le equazioni di 5° grado e di grado superiore al 5° non ammettono formula risolutiva**; cioè, che non può esistere alcuna formula
la quale permetta di calcolare, mediante un numero finito di operazioni sui coefficienti,
le soluzioni di una *generica* equazione di 5° grado, o di 6° grado, ecc.
Tale dimostrazione di impossibilità si deve ai due studiosi
- Niels Henrik **Abel** (norvegese, 1802-1829)
- ed Évariste **Galois** (francese, 1811-1832, ritenuto uno dei matematici più geniali di tutti i tempi).

Purtuttavia, per le equazioni di 5° grado o di grado superiore al 5°
esistono metodi che consentono di *approssimare* le soluzioni
(vale a dire, di calcolarle non proprio esattamente, ma comunque con la precisione desiderata).
Tali metodi, la cui applicazione al giorno d'oggi è facilitata dall'uso dei computer,
fanno parte di quella branca della Matematica che prende il nome di "**calcolo numerico**".

Per approfondimenti sulla storia delle equazioni algebriche
puoi ad esempio consultare un bell'articolo del professor Dario Palladino ⇨

In queste pagine non presenteremo le formule risolutive delle equazioni di 3° e di 4° grado,
e neppure i metodi di "calcolo numerico" cui accennavo prima; tuttavia
- *vedremo rapidamente alcuni metodi per la risoluzione di certe equazioni algebriche che costituiscono "**casi particolari**" (eq."binomie", "trinomie", risolubili "per fattorizzazione" o "con artifici")*
- *riprenderemo il **metodo grafico**, già presentato nel Volume 1, che permette di visualizzare e di approssimare le soluzioni di un'equazione qualsiasi (anche non algebrica!). Bisogna innanzitutto imparare a tracciare bene questi grafici con carta e matita; volendoli poi realizzare al computer, ci si può servire ad esempio dell'ottimo freeware GeoGebra.*

TERMINOLOGIA

❑ **Quando si parla di equazioni, talvolta al posto di "SOLUZIONE" si usa il sinonimo "RADICE".**
Per fare un esempio, l'equazione $3x-7=0$ ha una sola *radice*: il numero $7/3$.
Ancora: l'equazione $x^2-4x-5=0$ ha due radici, che sono -1 e 5.

❑ **Si dice "ZERO" di un polinomio ogni numero che, sostituito al posto della variabile del polinomio, rende quest'ultimo uguale a 0.**
Ad esempio, gli "zeri" del polinomio x^3-x sono i numeri $x=0,\ x=1,\ x=-1$.
Insomma, schematicamente: α è uno zero del polinomio $P(x)$ se e solo se risulta $P(\alpha)=0$.
Ovviamente, dato un polinomio $P(x)$, i suoi zeri non sono altro che le soluzioni o radici dell'equazione $P(x)=0$ (quest'ultima si dice "l'equazione associata al polinomio P").
Insomma, **gli zeri di un polinomio sono le soluzioni (= "radici") dell'equazione associata**.
E' lecito comunque, anche se un tantino improprio, parlare di "radici" (inglese: *roots*)
pure con riferimento a un polinomio, anziché impiegare il termine "zeri".