

3. EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO: PRINCIPALI TIPOLOGIE

A) Equazioni risolubili per SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

1) $x^3 - 4x = 0$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x+2)(x-2) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

equazione di 3° grado \rightarrow 3 soluzioni: $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$

2) $x^4 + x^2 - 12 = 0$

$$(x^2 - 3)(x^2 + 4) = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \quad x^2 = 3 \quad x = \pm\sqrt{3}$$

$$x^2 + 4 = 0 \quad x^2 = -4 \quad \text{impossibile in } \mathbb{R}; \text{ in } \mathbb{C}, x = \pm 2i$$

equazione di 4° grado \rightarrow in \mathbb{C} , 4 soluzioni: $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -2i, x_4 = 2i$

3) $4x^3 - 8x^2 - 11x - 3 = 0$

Scomponendo con Ruffini si ottiene:

$$(x-3)(2x+1)^2 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -\frac{1}{2} \text{ (soluz. di molteplicità 2)}$$

equazione di 3° grado \rightarrow tenendo conto della molteplicità, 3 soluzioni: $x_1 = 3, x_2 = x_3 = -\frac{1}{2}$

4) $6x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

$$x^2(6x^3 - 3x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x^2[3x^2(2x-1) - (2x-1)] = 0$$

$$x^2(2x-1)(3x^2-1) = 0$$

$$x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (molt. 2)}$$

$$2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$3x^2-1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

5) $x^2(x^2-1) = 1-2x$

$$x^4 - x^2 = 1 - 2x$$

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^4 - (x-1)^2 = 0$$

$$(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{ imposs. in } \mathbb{R} (\Delta < 0); \text{ in } \mathbb{C}, x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

B) Equazioni BINOMIE $ax^n + b = 0$

1)

$$8x^3 - 125 = 0$$

$$8x^3 = 125$$

$$x^3 = \frac{125}{8}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$$

Risolvendo per scomposizione in fattori, si troverebbero anche le soluzioni complesse:

$$8x^3 - 125 = 0$$

$$(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25) = 0$$

$$x = \frac{5}{2}; \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 100}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{-75}}{4} = \frac{-5 \pm i\sqrt{75}}{4} = \frac{-5 \pm 5i\sqrt{3}}{4}$$

2)

$$128x^3 + 6 = 0$$

Semplifico innanzitutto per 2 e ottengo

$$64x^3 + 3 = 0$$

$$64x^3 = -3$$

$$x^3 = -\frac{3}{64}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{64}} = -\sqrt[3]{\frac{3}{64}} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{4}$$

3)

$$81x^4 - 16 = 0$$

$$81x^4 = 16$$

$$x^4 = \frac{16}{81}$$

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm \frac{2}{3}$$

Scomponendo in fattori:

$$81x^4 - 16 = 0$$

$$(9x^2 + 4)(9x^2 - 4) = 0$$

$$9x^2 + 4 = 0; \quad x^2 = -\frac{4}{9} \text{ imposs. in } \mathbb{R}; \text{ in } \mathbb{C}, x = \pm \frac{2}{3}i$$

$$9x^2 - 4 = 0; \quad x^2 = \frac{4}{9} \quad x = \pm \frac{2}{3}$$

4) $81x^4 + 16 = 0$ impossibile in \mathbb{R}

5)

$$x^5 - 32 = 0$$

$$x^5 = 32$$

$$x = \sqrt[5]{32} = 2$$

6)

$$x^5 + 32 = 0$$

$$x^5 = -32$$

$$x = \sqrt[5]{-32} = -2$$

7)

$$x^6 - 1 = 0$$

$$x^6 = 1$$

$$x = \pm \sqrt[6]{1} = \pm 1$$

8)

$$x^6 + 1 = 0$$

$$x^6 = -1$$

impossibile in \mathbb{R}

9)

$$x^7 + 5x^4 = 0$$

$$x^4(x^3 + 5) = 0$$

$$x^4 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x^3 + 5 = 0 \rightarrow x^3 = -5 \rightarrow x = \sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5}$$

**Uno
SCHEMA
GENERALE
per le
equazioni
binomie**

Se p è una costante positiva ($p > 0$)

- esponente pari: $\begin{cases} x^{2n} = p & \rightarrow x = \pm \sqrt[2n]{p} \text{ (2 soluzioni opposte in } \mathbb{R}) \\ x^{2n} = -p & \rightarrow \text{impossibile in } \mathbb{R} \end{cases}$
- esponente dispari: $\begin{cases} x^{2n+1} = p & \rightarrow x = \sqrt[2n+1]{p} \text{ (1 soluzione in } \mathbb{R}) \\ x^{2n+1} = -p & \rightarrow x = \sqrt[2n+1]{-p} = -\sqrt[2n+1]{p} \text{ (1 soluzione in } \mathbb{R}) \end{cases}$

C) Eq. TRINOMIE $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ **e, in particolare, BIQUADRATICHE** $ax^4 + bx^2 + c = 0$

1)

$$8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$$

$$(x^3)^2 - 7x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = t$$

$$8t^2 - 7t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{16} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{16} = \frac{7 \pm 9}{16} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{8} \\ 1 \end{array} \right.$$

$$t = -\frac{1}{8} \vee t = 1, \text{ da cui:}$$

$$x^3 = -\frac{1}{8} \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

$$x^3 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

♥ La posizione $x^3 = t$ si può evitare: basta
 “operare come se al posto di x
 ci fosse il blocco x^3 ”

$$(x^3)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{16} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{16} = \frac{7 \pm 9}{16} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{8} \\ 1 \end{array} \right.$$

$$x^3 = -\frac{1}{8} \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$x^3 = 1 \rightarrow x = 1$$

2)

$$4x^4 - 11x^2 - 3 = 0$$

$$(x^2)^2 - 11x^2 - 3 = 0$$

EQUAZIONE BIQUADRATICA (cioè, trinomia con $n = 2$)

$$(x^2)_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{8} = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{11 \pm 13}{8} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \\ 3 \end{array} \right.$$

$$x^2 = -\frac{1}{4} \text{ impossibile in } \mathbb{R}$$

$$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

3)

$$x^4 - 11x^2 + 18 = 0$$

Come prima, oppure per scomposizione in fattori:

$$(x^2 - 9)(x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9; x = \pm 3$$

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2; x = \pm\sqrt{2}$$

**Uno
 SCHEMA
 GENERALE
 per le
 equazioni
 biquadratiche**

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Se $\Delta < 0$, non si ha nessuna soluzione in \mathbb{R}

$$\text{Se } \Delta \geq 0: (x^2)_{1,2} = \dots = \left\langle \begin{array}{l} h \\ k \end{array} \right.$$

Ora,

se $h > 0, k > 0$
 4 soluzioni in \mathbb{R}

se $h < 0, k < 0$
 nessuna soluzione in \mathbb{R}

se h, k discordi
 2 soluzioni in \mathbb{R}

Nel caso particolare $h = k$ ($\Delta = 0$),

se $h = k > 0$

4 soluzioni,

a due a due coincidenti, in \mathbb{R}

se $h = k < 0$

nessuna soluzione in \mathbb{R}

D) Equazioni risolubili con ARTIFICI (= posizioni)

$$1) \quad \boxed{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = 2}$$

$$\boxed{\frac{x-1}{x-2} = t}$$

$$t^4 + t^2 = 2; \quad t^4 + t^2 - 2 = 0; \quad (t^2)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$t^2 = -2 \text{ imposs. in } \mathbb{R}; \quad t^2 = 1 \rightarrow \boxed{t = \pm 1}$$

$$\frac{x-1}{x-2} = \boxed{-1} \rightarrow x-1 = -x+2 \quad (x \neq 2); \quad 2x = 3; \quad \boxed{x = 3/2}$$

$$\frac{x-1}{x-2} = \boxed{1} \rightarrow \cancel{x} - 1 = \cancel{x} - 2 \quad (x \neq 2) \text{ impossibile}$$

$$2) \quad \boxed{(x^2 + 3x + 1)^3 = (x^2 + 3x + 1)^2 + x^2 + 3x}$$

Convorrà addizionare 1 ad ambo i membri,
per ottenere:

$$(x^2 + 3x + 1)^3 + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 + x^2 + 3x + 1$$

dopodiché:

$$x^2 + 3x + 1 = z$$

$$z^3 + 1 = z^2 + z; \quad z^3 - z^2 - z + 1 = 0; \quad z^2(z-1) - (z-1) = 0;$$

$$(z-1)(z^2-1) = 0; \quad (z-1)(z+1)(z-1) = 0; \quad (z-1)^2(z+1) = 0; \quad z = 1 \vee z = -1$$

$$x^2 + 3x \neq 1 = \cancel{x}; \quad x(x+3) = 0; \quad x = 0 \vee x = -3$$

$$x^2 + 3x + 1 = -1; \quad x^2 + 3x + 2 = 0; \quad \dots \quad x = -1 \vee x = -2$$

Le soluzioni sono, in definitiva:

$$\boxed{x = -3, x = -2, x = -1, x = 0}$$

In alternativa:

$$(x^2 + 3x + 1)^3 = (x^2 + 3x + 1)^2 + x^2 + 3x + 1 - 1$$

$$x^2 + 3x + 1 = z, \text{ ecc.}$$

$$3) \quad \boxed{x^6 - 5x^2 + 2 = 0}$$

Lasciando così, non si riesce a scomporre; ponendo invece $x^2 = t$ si ha $t^3 - 5t + 2 = 0$
ed è possibile scomporre con Ruffini in quanto si osserva che $P(2) = 0$. Si ottiene:

$$(t-2)(t^2 + 2t - 1) = 0$$

$$t = 2 \rightarrow x^2 = 2; \quad \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$$

$$t = -1 - \sqrt{2} \rightarrow x^2 = -1 - \sqrt{2} < 0 \text{ impossibile in } \mathbb{R}$$

$$t = -1 + \sqrt{2} \rightarrow x^2 = -1 + \sqrt{2}; \quad \boxed{x = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}}$$

ALTRI ESEMPI DI QUESTO TIPO

$$4) \quad \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + 7\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + 14 \cdot \frac{x}{1-x} + 8 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x = 2, \\ x = \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$5) \quad (x\sqrt{2}+1)^{-3} - (x\sqrt{2}+1)^{-2} - 3\left(\frac{1}{x\sqrt{2}+1} - 1\right) - 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{2}+1} - 1\right) = 0$$

uh, qui si può trovare
una soluzione "per strada",
semplificando!

$$\begin{bmatrix} x = 0, \\ x = -1, \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$6) \quad (x^2 - 2x - 3)^2 - 2(x^2 - 2x) + 3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x = 1 \pm \sqrt{3}, \\ x = 1 \pm \sqrt{7} \end{bmatrix}$$